

DOMENICO FRENI

NICOLA RODINÒ

Sur le groupe des automorphismes d'un groupoïde

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 5, n° 2 (1998), p. 21-37

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1998__5_2_21_0>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES D'UN GROUPOÏDE

Domenico Freni, Nicola Rodinò

Abstract: In some of the articles quoted in the present paper it is proved that every group can be represented as the automorphism group of a groupoid. The groupoid constructed in [1] is a semilattice, in [2] the groupoid is a commutative monoid, in [9] it is a semigroup, and in [8] it is a commutative groupoid. In particular, in [5] M. Gould proves that every finite or countable group G is isomorphic to the automorphism group of a left-cancellative groupoid (G, \star) .

In this paper, using the faithful actions of a group on a set X , we define binary operations \star in such a way that the corresponding groupoid (X, \star) is, e. g., divisible from the left, left quasigroup, commutative, cyclic or has left cancellation, idempotents, left or right identities.

Of special interest is the case in which the action of G over X is regular, for, in this case, we show that, if X is finite or countable, then G is isomorphic to the automorphism group of a left cancellation groupoid (X, \star) . In particular we obtain another proof of Gould's theorem using the left regular representation of a group G on itself.

Résumé: La bibliographie présentée dans ce travail contient des articles dans lesquels il est prouvé que chaque groupe G est isomorphe au groupe des automorphismes de quelques groupoïdes, qui satisfont des propriétés. Par exemple dans [1] le groupoïde considéré est un demi-treillis, dans [2] il est un monoïde commutatif, dans [9] il est un demi-groupe et dans [8] il est un groupoïde commutatif. En particulier, dans la note [5] de M. Gould il est démontré que chaque groupe G fini ou dénombrable est isomorphe au groupe des automorphismes d'un groupoïde (G, \star) simplifiable à gauche.

Dans cet article, en utilisant la notion de groupe opérant fidèlement sur un ensemble X , on définit sur X des opérations binaires \star de façon que le groupoïde correspondant (X, \star) soit, par exemple, simplifiable à gauche, avec division à gauche, quasi-groupe à gauche, avec des éléments idempotents, avec une identité à gauche ou à droite, commutatif ou cyclique et tel que le groupe des opérateurs soit isomorphe au groupe des automorphismes de (X, \star) .

Le cas dans lequel l'action de G sur X est libre et transitive est significatif, car on démontre que si X est fini ou dénombrable, alors G est isomorphe au groupe des automorphismes d'un groupoïde (X, \star) simplifiable à gauche. En particulier on obtient le théorème de M. Gould en considérant l'action de G sur lui-même, déterminée par l'opération de G .

On décrit plusieurs exemples.

Dans tout l'article les notations (X, \star) et $(G, .)$ seront utilisées pour indiquer, respectivement, les groupoïdes et groupes, et souvent on utilisera G pour noter non seulement le support du groupe, mais aussi le groupe lui-même.

1. Construction générale .

Soit $(G, .)$ un groupe qui opère fidèlement à gauche sur un ensemble X par l'action $(g, x) \mapsto gx$.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ la famille des orbites de X relatives à l'action de G sur X .

Pour tout $i \in I$ soit u_i un élément fixé dans X_i , de sorte que $X_i = Gu_i$.

On pose $H_i = St_G(u_i)$, pour tout $i \in I$, et soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une famille d'applications de X en X vérifiant la propriété suivante:

$$(1. 1.) \quad \forall h \in H_i, \forall x \in X, \sigma_i(hx) = h\sigma_i(x).$$

Lemme 1.1: *Pour tout $i \in I$ et pour tout $y \in X$, $gu_i = hu_i$ implique $g\sigma_i(g^{-1}y) = h\sigma_i(h^{-1}y)$.*

Démonstration

Évidemment, on a $gu_i = hu_i$ si et seulement si $h^{-1}g \in H_i$. En outre, par (1.1), on a

$$h^{-1}g\sigma_i(g^{-1}y) = \sigma_i(h^{-1}gg^{-1}y) = \sigma_i(h^{-1}y),$$

et on conclut en multipliant à gauche par h .

Le lemme prouve que l'opération suivante est bien définie sur X :

$$(1. 2.) \quad x \star y = g\sigma_i(g^{-1}y), \text{ pour tout } x = gu_i \in X_i \text{ et pour tout } y \in X.$$

Proposition 1.2: *Pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ de X dans X est un automorphisme du groupoïde (X, \star) , et donc G est isomorphe à un sous-groupe du groupe $Aut(X, \star)$.*

Démonstration

Pour tout $g \in G$, notons avec f_g l'application de X dans X définie par $f_g(x) = gx$, $\forall x \in X$. L'application f_g est bijective. En outre, soient $x = hu_i$ et $y \in X$, alors on a:

$$gx \star gy = g(hu_i) \star gy = (gh)u_i \star gy = (gh)\sigma_i(h^{-1}g^{-1}gy) = (gh)\sigma_i(h^{-1}y) = g(h\sigma_i(h^{-1}y)) = g(x \star y).$$

Donc f_g est un automorphisme du groupoïde (X, \star) .

Enfin, G est isomorphe à un sous-groupe de $\text{Aut}(X, \star)$ car l'application $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(X, \star)$, définie par $\varphi(g) = f_g, \forall g \in G$, est un monomorphisme (G opère fidèlement à gauche sur X).

Théorème 1.3: *Soit (X, \bullet) un groupoïde, G un sous-groupe du groupe $\text{Aut}((X, \bullet))$ des automorphismes de (X, \bullet) . G opère à gauche sur X par l'action fidèle $(f, x) \mapsto f(x)$. Soit $(X_i = Gu_i)_{i \in I}$ la famille des orbites selon G et soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ la famille des applications $\sigma_i : X \rightarrow X$ définies par: $\sigma_i(y) = u_i \bullet y$.*

Les applications σ_i vérifient (1. 1) et l'opération \star sur X , définie dans (1. 2) relativement à la famille $(\sigma_i)_{i \in I}$ et au transversal $(u_i)_{i \in I}$, est égal à l'opération \bullet .

Démonstration

Pour tout $x \in X$ et $h \in \text{St}_G(u_i)$ on a $\sigma_i(h(x)) = u_i \bullet h(x) = h(u_i) \bullet h(x) = h(u_i \bullet x) = h(\sigma_i(x))$, donc la famille $(\sigma_i)_{i \in I}$ vérifie (1. 1).

Enfin, pour tout $x = f(u_i) \in X_i$ et $y \in X$, f étant un automorphisme de (X, \bullet) , on a:

$$x \star y = f(\sigma_i(f^{-1}y)) = f(u_i \bullet f^{-1}(y)) = f(u_i) \bullet y = x \bullet y.$$

En conservant la notation introduite dans (1. 2) on démontre la proposition suivante:

Proposition 1.4:

- i) *Le groupoïde (X, \star) est simplifiable à gauche si et seulement si pour tout $i \in I$, σ_i est injective.*
- ii) *Le groupoïde (X, \star) est avec division à gauche si et seulement si pour tout $i \in I$, σ_i est surjective.*
- iii) *Le groupoïde (X, \star) est un quasi-groupe à gauche si et seulement si pour tout $i \in I$, σ_i est bijective.*

Démonstration

(i) Puisque $\sigma_i(y) = u_i \star y$, si le groupoïde (X, \star) est simplifiable à gauche, alors σ_i est injective.

Réciproquement, soit $x = gu_i$, si σ_i est injective, alors l'application $y \mapsto x \star y = g\sigma_i(g^{-1}y)$ est aussi injective et le groupoïde (X, \star) est simplifiable à gauche.

(ii) Pour tout $x = gu_i \in X_i$, l'application $y \mapsto x \star y = g\sigma_i(g^{-1}y)$ de X dans X est surjective si et seulement si σ_i l'est, puisque les applications $y \mapsto g^{-1}y$ et $z \mapsto gz$ de X dans X sont bijectives.

(iii) est évident.

De toute évidence, il s'ensuit le

Corollaire 1.5: *Si X est un ensemble fini, les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) (X, \star) est un quasi-groupe à gauche;
- ii) Pour tout $i \in I$, σ_i est injective;
- iii) Pour tout $i \in I$, σ_i est surjective.

Proposition 1.6:

- i) Le groupoïde (X, \star) a un élément idempotent si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que u_i soit idempotent, si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que chaque élément de l'orbite X_i de u_i soit idempotent.
- ii) Le groupoïde (X, \star) a une identité à gauche si et seulement s'il existe $i \in I$ et $g \in G$ tel que $g\sigma_i(g^{-1}x) = x$, pour tout $x \in X$.
- iii) Le groupoïde (X, \star) a une identité à droite v si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\sigma_i(x) = u_i$, pour tout $x \in Gv$.
- iv) Le groupoïde (X, \star) a une identité si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que u_i soit un point fixe par l'action de G , $\sigma_i = Id_X$ et $\sigma_j(u_i) = u_j$ pour tout $j \in I$.

Démonstration

(i) Puisque le groupe G opère sur (X, \star) comme automorphismes, les implications suivantes sont évidentes:

$$\exists g \in G \text{ tel que } gu_i = gu_i \star gu_i = g(u_i \star u_i) \Rightarrow u_i = u_i \star u_i \Rightarrow (\forall h \in G) hu_i = h(u_i \star u_i) = hu_i \star hu_i \Rightarrow \exists g \in G \text{ tel que } gu_i = gu_i \star gu_i.$$

(ii) gu_i est une identité à gauche si et seulement si $gu_i \star x = x$ pour tout $x \in X$ c'est à dire si et seulement si $g\sigma_i(g^{-1}x) = x$.

(iii) Si v est une identité à droite, pour tout $g \in G$ et $i \in I$ on a $gu_i = gu_i \star v = g\sigma_i(g^{-1}v)$, donc $\sigma_i(g^{-1}v) = u_i$ et par conséquent $\sigma_i(x) = u_i$, pour tout $x \in Gv$.

Réciproquement, soit $x = gu_i$, on a $x \star v = g\sigma_i(g^{-1}v) = gu_i = x$, car $g^{-1}v \in Gv$.

(iv) Soit $v \in Gu_i$ l'identité de (X, \star) . Pour tout $g \in G$, on a $gv = v$, car l'identité est unique et elle est fixée par chaque automorphisme. Donc $Gv = \{v\}$, et comme $Gv = Gu_i$ on a $v = u_i$ et $Gu_i = u_i$.

En outre on a $\sigma_i(x) = u_i \star x = v \star x = x$, pour tout $x \in X$. Et les égalités $\sigma_j(u_i) = u_j \star u_i = u_j \star v = u_j$, sont vérifiées pour tout $j \in I$.

Réciproquement, il est évident que u_i est une identité à gauche car $u_i \star x = \sigma_i(x) = x$, pour tout $x \in X$; et elle est aussi identité à droite puisque, si $x = gu_j$, on a $x \star u_i = g\sigma_j(g^{-1}u_i) = g\sigma_j(u_i) = gu_j = x$ car $g^{-1}u_i \in Gu_i = \{u_i\}$.

Proposition 1.7: Le groupoïde (X, \star) est commutatif si et seulement si $\sigma_i(gu_j) = g\sigma_j(g^{-1}u_i)$ pour tout $g \in G$ et $(i, j) \in I \times I$.

Démonstration

On a $hu_i \star ku_j = ku_j \star hu_i$ si et seulement si $h\sigma_i(h^{-1}ku_j) = k\sigma_j(k^{-1}hu_i)$, donc si (X, \star) est commutatif, pour $h = 1_G$ et $k = g$, on a $\sigma_i(gu_j) = g\sigma_j(g^{-1}u_i)$. Réciproquement,

si $\sigma_i(gu_j) = g\sigma_j(g^{-1}u_j)$, en posant $g = h^{-1}k$, on obtient $\sigma_i(h^{-1}ku_j) = h^{-1}k\sigma_j(k^{-1}hu_i)$ et il s'ensuit $h\sigma_i(h^{-1}ku_j) = k\sigma_j(k^{-1}hu_i)$.

Proposition 1.8: *Soient (X, \star) un groupoïde, y un élément qui n'appartient pas à X et $Y = X \cup \{y\}$. Si (Y, \diamond) est le groupoïde dont le produit \diamond est défini par:*

$$\begin{cases} y \diamond a = a \diamond y = y, \forall a \in Y; \\ x \diamond x' = x \star x', \forall (x, x') \in X \times X; \end{cases}$$

alors $\text{Aut}((Y, \diamond)) \cong \text{Aut}((X, \star))$.

Démonstration

On commence par observer que pour tout automorphisme \bar{f} de (Y, \diamond) , on a $\bar{f}(y) = y$. En effet, par la surjectivité de \bar{f} , il existe un élément $a \in Y$ tel que $\bar{f}(a) = y$, et donc $\bar{f}(y) = \bar{f}(a \diamond y) = \bar{f}(a) \diamond \bar{f}(y) = y \diamond \bar{f}(y) = y$.

Donc, la restriction $\bar{f}|_X$ de \bar{f} à X est un automorphisme de (X, \star) , car $y \notin X$, $\bar{f}(X) = X$ et l'opération \diamond coïncide, sur X , avec l'opération \star .

En outre, pour tout couple (\bar{f}, \bar{g}) d'automorphismes de (Y, \diamond) , on a:

$$1) \quad \bar{f}|_X = \bar{g}|_X \Leftrightarrow \bar{f} = \bar{g};$$

$$2) \quad \bar{f}|_X \circ \bar{g}|_X = (\bar{f} \circ \bar{g})|_X;$$

car $\bar{f}(y) = \bar{g}(y) = y$.

Enfin, il est aussi facile de prouver que pour tout automorphisme h de (X, \star) , l'application $\bar{h} : Y \rightarrow Y$ tel que: $\bar{h}(y) = y$, $\bar{h}(x) = h(x)$, pour tout $x \in X$, est un automorphisme de (Y, \star) , et donc l'application $\bar{f} \mapsto \bar{f}|_X$ de $\text{Aut}((Y, \diamond))$ dans $\text{Aut}((X, \star))$ est un isomorphisme de groupes.

Théorème 1.9: *Soient G un groupe qui opère fidèlement à gauche sur un ensemble X par l'action $\phi : (g, x) \mapsto gx$ et (X, \star) le groupoïde correspondant à la famille $(u_i)_{i \in I}$, des représentants des orbites de ϕ , et à la famille d'applications $(\sigma_i)_{i \in I}$, vérifiant la propriété (1. 1). Alors, pour tout élément y qui n'appartient pas à X , il existe une action fidèle à gauche $\bar{\phi}$ de G sur $Y = X \cup \{y\}$, une famille de représentants $(v_i)_{i \in \bar{I}}$ des orbites de $\bar{\phi}$ et une famille $(\bar{\sigma}_i)_{i \in \bar{I}}$ d'applications de Y en Y , qui satisfont la propriété (1. 1), telles que le groupoïde correspondant de (Y, \diamond) ait son groupe des automorphismes isomorphe au groupe $\text{Aut}(X, \star)$.*

Démonstration

On considère l'action de G sur Y , définie dans la façon suivante:

$$\begin{cases} g.x = gx, \forall (g, x) \in G \times X; \\ g.y = y, \forall g \in G. \end{cases}$$

Évidemment on a $St_G(y) = G$, et $g.x = x \Leftrightarrow gx = x \Leftrightarrow g \in St_G(x)$, d'où, puisque G opère fidèlement sur X , l'action $\phi : (g, a) \mapsto g.a$ de G sur Y est aussi fidèle.

En outre, si j est un élément qui n'appartient pas à l'ensemble I en posant $\bar{I} = I \cup \{j\}$, on peut considérer la famille d'applications $(\bar{\sigma}_i)_{i \in \bar{I}}$ de Y dans Y définies par:

$$\bar{\sigma}_j(a) = y, \forall a \in Y,$$

et pour tout $i \in I$,

$$\bar{\sigma}_i : \begin{cases} \bar{\sigma}_i(x) = \sigma_i(x), \forall x \in X; \\ \bar{\sigma}_i(y) = y. \end{cases}$$

La famille $(\bar{\sigma}_i)_{i \in \bar{I}}$ satisfait la propriété (1. 1). En effet, pour tout $g \in G = St_G(y)$ et pour tout $b \in Y$, on a:

$$\bar{\sigma}_j(g.b) = y = g.y = g.\bar{\sigma}_j(b).$$

En outre, pour tout $i \in I$, $x \in X$ et $h \in H_i = St_G(u_i)$, on a:

$$\bar{\sigma}_i(h.x) = \sigma_i(hx) = h\sigma_i(x) = h.\bar{\sigma}_i(x), \text{ car } x \neq y \neq hx;$$

et

$$\bar{\sigma}_i(h.y) = \bar{\sigma}_i(y) = y = h.y = h.\bar{\sigma}_i(y).$$

Enfin, en posant $v_j = y$ et $v_i = u_i$, pour tout $i \in I$, et en notant \diamond l'opération correspondante à l'action $(g, x) \mapsto g.x$ et aux familles $(v_i)_{i \in \bar{I}}$, $(\bar{\sigma}_i)_{i \in \bar{I}}$, on obtient:

$$y \diamond a = (g.y) \diamond a = g.\bar{\sigma}_j(g^{-1}.a) = g.y = y, \text{ pour tout } a \in Y;$$

$$x \diamond y = (g.u_i) \diamond y = g.\bar{\sigma}_i(g^{-1}.y) = g.\bar{\sigma}_i(y) = g.y = y, \text{ pour tout } i \in I \text{ et } x = g.u_i = gu_i \in X;$$

$$x \diamond x' = (g.u_i) \diamond x' = g.\bar{\sigma}_i(g^{-1}.x') = g\sigma_i(g^{-1}.x') = x \star x', \text{ pour tout } i \in I, x = g.u_i = gu_i \in X \text{ et } x' \in X.$$

Donc le groupoïde (Y, \diamond) satisfait toutes les hypothèses de la proposition 1.8, et donc

$$Aut((Y, \diamond)) \cong Aut((X, \star)).$$

2. Action transitive et fidèle.

Dans ce paragraphe on suppose toujours que l'action de G sur X est transitive et fidèle. On a la seule orbite X et pour un élément $u \in X$ et une application $\sigma : X \rightarrow X$ vérifiant la propriété:

$$(2. 1) \quad \sigma(hx) = h\sigma(x), \text{ pour tout } h \in St_G(u);$$

on associe le groupoïde (X, \star) défini par l'opération:

$$(2. 2) \quad x \star y = g\sigma(g^{-1}y), \text{ pour tout } y \in X \text{ et pour tout } x = gu \text{ où } g \in G.$$

A l'aide des propositions démontrées dans §1 les propriétés suivantes sont évidentes:

(2. 3) Pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ dans X en X est un automorphisme du groupoïde (X, \star) .

(2. 4) Le groupoïde (X, \star) est simplifiable à gauche (resp. avec division à gauche, quasi-groupe à gauche) si et seulement si σ est injective (resp. surjective, bijective).

(2. 5) Le groupoïde (X, \star) a un élément idempotent si et seulement si u est idempotent si et seulement si chaque élément de X est idempotent.

(2. 6) Le groupoïde (X, \star) a une identité à gauche (resp. identité à droite, identité) gu si et seulement si $g\sigma(g^{-1}x) = x$ (resp. $\sigma(x) = u$, $X = \{u\}$), pour tout $x \in X$.

(2. 7) Le groupoïde (X, \star) est commutatif si et seulement si $\sigma(gu) = g\sigma(g^{-1}u)$, pour tout $g \in G$.

Exemple : Soit G un groupe tel que l'ordre de chaque élément soit différent de 2, et A un sous-ensemble de G tel que $A \cup A^{-1} = G$ et $A \cap A^{-1} = \{1_G\}$ (avec $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$).

Si G opère librement et transitivement sur un ensemble X et $u \in X$, l'application $\sigma : X \rightarrow X$ telle que:

$$\begin{cases} \sigma(hu) = hu, \forall h \in A; \\ \sigma(ku) = u, \forall k \in A^{-1} \end{cases}$$

est bien définie. En outre, pour tout $h \in A$. on a:

$$\sigma(hu) = hu = h\sigma(h^{-1}u)$$

et

$$\sigma(h^{-1}u) = u = h^{-1}hu = h^{-1}\sigma(hu) = h^{-1}\sigma((h^{-1})^{-1}u)$$

et par la propriété (2. 7), le groupoïde (X, \star) est commutatif.

Remarque : Si G est un groupe dont les éléments sont d'ordre différents de 2, il est toujours possible de déterminer un sous-ensemble A qui satisfait les hypothèses de l'exemple précédent. En effet, la famille

$$F = \{X \in P(G) \mid X \cap X^{-1} = \{1_G\}\}$$

est non vide et ordonnée par l'inclusion, et on prouve que (F, \subset) est inductif. Donc, par le lemme de Zorn, il existe un sous-ensemble maximal $A \in F$, et il est facile de démontrer $A \cup A^{-1} = G$, car les éléments de G ont un ordre différent de 2.

Remarque: Supposons que pour tout couple (y, z) d'éléments de X on a $(u \star y) \star z = u \star (y \star z)$. Si dans la dernière égalité on remplace y avec $g^{-1}y$ et z avec $g^{-1}z$, on obtient $(u \star g^{-1}y) \star g^{-1}z = u \star (g^{-1}y \star g^{-1}z)$. Ainsi, en utilisant (2. 3), on déduit $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$, $\forall x, y, z \in X$.

Donc on a:

(2. 8) (X, \star) est un demi-groupe si et seulement si $(u \star y) \star z = u \star (y \star z)$, pour tout $(y, z) \in X \times X$.

Exemple: Soit G un groupe commutatif, produit semi-direct de deux sous-groupes H et K avec K sous-groupe normal de G , et soit $(g, x) \mapsto gx$ l'action de G sur lui même, déterminée par l'opération de G . Si \star est l'opération sur G , déterminée par l'identité 1_G de G et par le projecteur σ de G sur H , alors l'égalité $\sigma \circ \sigma = \sigma$ est vérifiée et pour tout couple (y, z) d'éléments de G on a:

$$(1_G \star y) \star z = \sigma(y) \star z = \sigma(y)\sigma(\sigma(y)^{-1}z) = \sigma(y)\sigma(\sigma(y)^{-1})\sigma(z) = \sigma(y)\sigma(\sigma(y)^{-1})\sigma(\sigma(z)) = \sigma(y\sigma(y)^{-1}\sigma(z)) = 1_G \star (y\sigma(y)^{-1}\sigma(z)) = 1_G \star (y \star z).$$

Donc, par la propriété (2. 8), (G, \star) est un demi-groupe.

On démontre facilement la proposition suivante:

Proposition 2.1: Soit (X, \star) un demi-groupe. Alors:

- 1) Si u est un élément idempotent, on a $\sigma^2 = \sigma$;
- 2) $\sigma(x \star y) = \sigma(x) \star y$, pour tout $(x, y) \in X \times X$;
- 3) Si l'ensemble $H = \{x \in X \mid \sigma(x) = u\}$, est non vide, il est un sous-demi-groupe de (X, \star) ;
- 4) $Im\sigma$ est un sous-demi-groupe de (X, \star) ;
- 5) Si X est fini, alors $u \in H$ et chaque élément de (X, \star) est idempotent.

Démonstration

- 1) $\sigma^2(x) = \sigma(\sigma(x)) = \sigma(u \star x) = u \star (u \star x) = (u \star u) \star x = u \star x = \sigma(x), \forall x \in X.$
- 2) $\sigma(x \star y) = u \star (x \star y) = (u \star x) \star y = \sigma(x) \star y, \forall (x, y) \in X \times X;$
- 3) Pour tout couple (x, y) d'éléments de H , par (2), on a:

$$\sigma(x \star y) = \sigma(x) \star y = u \star y = \sigma(y) = u,$$

donc $x \star y \in H$.

- 4) Pour tout couple (x', y') d'éléments de $Im\sigma$, et $x' = \sigma(x)$, on a:

$$x' \star y' = \sigma(x) \star y' = (u \star x) \star y' = u \star (x \star y') = \sigma(x \star y'),$$

donc $x' \star y' \in Im\sigma$.

5) Si X est fini, alors (X, \star) est un demi-groupe fini et donc il existe un élément idempotent. Par la propriété (2. 5), chaque élément de (X, \star) est idempotent, et en particulier $\sigma(u) = u \star u = u$, c'est-à-dire $u \in H$.

N.B.: Par la suite, φ indiquera le monomorphisme canonique de G dans le groupe S_X des permutations de X , défini de la manière suivante: $\varphi(g)(x) = gx, \forall x \in X$.

En outre, un élément $u \in X$ étant fixé, on notera par Σ_u l'ensemble des applications de X dans X qui satisfont la propriété (2.1).

L'ensemble Σ_u est un sous-demi-groupe du demi-groupe (X^X, \circ) de toutes les applications de X dans X : en effet pour tout $h \in St_G(u)$, pour tout couple (σ, τ) d'éléments de Σ_u et pour tout $x \in X$ on a:

$$\sigma \circ \tau(hx) = \sigma(\tau(hx)) = \sigma(h\tau(x)) = h\sigma(\tau(x)) = h\sigma \circ \tau(x),$$

donc $\sigma \circ \tau \in \Sigma_u$.

Proposition 2.2: Si (u, σ) et (v, τ) sont deux couples d'éléments, respectivement, de $X \times \Sigma_u$ et de $X \times \Sigma_v$, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) Les deux opérations \star et \ast correspondantes, respectivement, aux deux couples (u, σ) et (v, τ) coïncident.
- 2) Pour tout élément $g \in G$ tel que $gv = u$ on a $\sigma = \varphi(g) \circ \tau \circ \varphi(g^{-1})$.

Démonstration

1) \Rightarrow 2) Pour tout $y \in X$ on a $u \star y = u \ast y = gv \ast y$ et donc $\sigma(y) = g\tau(g^{-1}y) = \varphi(g) \circ \tau \circ \varphi(g^{-1})(y)$.

2) \Rightarrow 1) Pour tout $x = hu \in X$ et pour tout $g \in G$ tels que $gv = u$, on a $x = (hg)v$ et par conséquent
 $x \star y = hu \star y = h\sigma(h^{-1}y) = h\varphi(g) \circ \tau \circ \varphi(g^{-1})(h^{-1}y) = hg\tau(g^{-1}h^{-1}y) = hg\tau((hg)^{-1}y) = (hg)v \ast y = x \ast y.$

On observe qu'en considérant l'action de G sur l'ensemble X^X des applications de X dans X définie par $g.\lambda = \varphi(g) \circ \lambda \circ \varphi(g^{-1})$ avec $\lambda \in X^X$, la proposition 2.2 affirme que les deux opérations coïncident si et seulement si σ et τ sont dans la même orbite.

Corollaire 2.3: *Si les opérations \star et $*$ correspondent, respectivement, aux deux couples (u, σ) et (u, τ) de $X \times \Sigma_u$, alors \star coïncide avec $*$ si et seulement si $\sigma = \tau$.*

Démonstration

L'implication \Rightarrow découle de la proposition 2.2 en considérant $g = 1_G$ et $v = u$.
L'autre implication est évidente.

Un élément $u \in X$ étant fixé, soit $O_p(u)$ l'ensemble des opérations correspondantes aux couples (u, σ) avec $\sigma \in \Sigma_u$. Par le corollaire 2.3, les opérations correspondantes aux couples (u, σ) sont toutes distinctes, lorsque σ parcourt Σ_u , de sorte que la cardinalité de $O_p(u)$ est celle de Σ_u .

Si en particulier G opère librement sur X , le stabilisateur $St_G(u)$ est constitué par la seule identité de G et chaque application $\sigma \in X^X$ vérifie la propriété (2.1), donc $\Sigma_u = X^X$ et la cardinalité de l'ensemble $O_p(u)$ est celle de X^X . En outre, si v est un élément de X différent de u on a $O_p(u) = O_p(v)$. En effet, si g est un élément de G tel que $gu = v$, l'opération \star correspondante au couple (v, τ) coïncide avec l'opération correspondante au couple (u, σ) avec $\sigma = \varphi(g) \circ \tau \circ \varphi(g^{-1})$, donc $\star \in O_p(u)$ et $O_p(v) \subset O_p(u)$.

D'une façon analogue on prouve $O_p(u) \subset O_p(v)$.

Il en résulte:

Corollaire 2.4: *Si G est un groupe qui opère transitivement et librement sur l'ensemble X , alors l'ensemble des opérations distinctes correspondantes aux couples $(u, \sigma) \in X \times X^X$ et l'ensemble X^X ont la même cardinalité.*

Maintenant on examine le cas où l'opération \star , déduite par u et par σ , soit telle que le groupoïde (X, \star) soit cyclique, mais avant on observe que pour tout couple (A, B) de sous-ensemble non vides de X et pour tout $x \in X$, si l'on pose:

$$A \star B = \{a \star b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = \{x\}; \\ \bar{x}^2 = \bar{x}^1 \star \bar{x}^1 = \{x \star x\}; \\ \text{et pour tout } n \geq 1, \\ \bar{x}^{n+1} = \bigcup_{k=1}^n \bar{x}^k \star \bar{x}^{n-k+1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}_s x^1 = x; \\ {}_s x^2 = x \star x; \\ \text{et pour tout } n \geq 1, \\ {}_s x^{n+1} = x \star {}_s x^n. \end{cases}$$

L'ensemble $[x] = \bigcup_{k \geq 1} \bar{x}^k$ est un sous-groupoïde de (X, \star) , et il est le plus petit sous-groupoïde qui contient x , c'est-à-dire $[x]$ est le *sous-groupoïde cyclique engendré par x* .

L'ensemble ${}_s[x] = \{{}_s x^k\}_{k \geq 1}$, en général, n'est pas un sous-groupoïde de (X, \star) , mais si ${}_s[x]$ est un sous-groupoïde de (X, \star) , alors ${}_s[x] = [x]$ et dans ce cas le sous-groupoïde $[x]$ s'appellera *fortement cyclique à gauche*.

Enfin, s'il existe un élément $x \in X$ tel que $X = [x]$ (resp. $X = {}_s[x]$), le groupoïde (X, \star) s'appellera *cyclique engendré par x* (resp. *fortement cyclique à gauche engendré par x*).

Proposition 2.5: *Si (X, \star) est cyclique, alors G opère librement sur X et de plus $X = [x]$, pour tout $x \in X$.*

Démonstration

Si $X = [y]$, et si $g \in G$ est tel que $x = gy$, on a $X = gX = g[y] = [gy] = [x]$, car par (2. 3) $\varphi(g)$ est un automorphisme de (X, \star) .

En outre, pour $h \in St_G(x)$, $n \in N - \{0\}$ et Γ tel que $y = \star_\Gamma x^n$, on a $hy = h(\star_\Gamma x^n) = \star_\Gamma (hx)^n = \star_\Gamma x^n = y$.

Donc $h \in St_G(x) \cap St_G(y)$, et puisque G opère fidèlement sur X , on a $h = 1_G$. Ainsi $St_G(x) = \{1_G\}$, pour tout $x \in X$, et l'action de G sur X est libre.

Lemme 2.6: *Soit G un groupe qui opère librement sur X et H un sous-ensemble de G tel que $1_G \in H$, alors:*

1) *Si H est un sous-groupe de G et $\sigma(Hu) \subset Hu$, alors Hu est un sous-groupoïde de (X, \star) ;*

2) *Si G est fini et Hu est le sous-groupoïde cyclique engendré par u , alors $\sigma(Hu) \subset Hu$ et H est un sous-groupe de G .*

Démonstration

1) Pour tout couple (g, h) d'éléments de H , on a:

$$gu \star hu = g\sigma(g^{-1}(hu)) = g\sigma((g^{-1}h)u) \subset g\sigma(Hu) \subset g(Hu) = (gH)u = Hu,$$

donc $Hu \star Hu \subset Hu$.

2) On a $\sigma(Hu) = u \star Hu = u \star [u] \subset [u] = Hu$. De plus, pour tout $k \in H$, il existe $n \in N - \{0\}$ et Γ tel que $ku = \star_\Gamma u^n$, et pour un quelconque autre élément h de H on a:

$$(hk)u = h(ku) = h(\star_\Gamma u^n) = \star_\Gamma (hu)^n \in Hu,$$

car Hu est un sous-groupe de (X, \star) .

Enfin, $hk \in H$ puisque G opère librement sur X et $1_G \in H$. Donc H est un sous-groupe de G car G est fini.

Théorème 2.7: *Si G est un groupe fini qui opère librement sur X , alors (X, \star) est cyclique si et seulement si pour tout sous-groupe propre H de G , on a $\sigma(Hu) \not\subset Hu$.*

Démonstration

Par la proposition 2.5, on peut supposer $X = [u]$.

Soit H un sous groupe propre de G . L'action étant libre et transitive on a $Hu \neq Gu = X$, si $\sigma(Hu) \subset Hu$, par le lemme 2.6 (1), Hu est un sous-groupe propre de X qui contient u , donc $[u] \subset Hu \neq X$, et ceci est impossible.

Reciproquement, si pour tout sous-groupe propre H de G on a $\sigma(Hu) \not\subset Hu$, l'action étant libre et transitive, il existe un sous-ensemble K de G , qui contient l'identité de G , tel que $[u] = Ku$, et par le lemme 2.6 (2), on a $K = G$ et $[u] = Gu = X$.

3. Sur le problème de M. Gould.

Dans ce paragraphe on démontre que si G est un groupe qui opère transitivement et librement sur un ensemble X fini ou dénombrable, alors on peut définir sur X une opération convenable \star de telle sorte que le groupoïde (X, \star) soit simplifiable à gauche et le groupe G soit isomorphe au groupe des automorphismes de (X, \star) , et en particulier on obtient le théorème de M.Gould démontré dans [5]:

Si G est un groupe fini ou dénombrable, on peut définir sur G une opération \star telle que (G, \star) soit un groupoïde simplifiable à gauche et dont le groupe des automorphismes est isomorphe au groupe G .

On donne la définition suivante:

Définition: On appelle *Change sur X* , chaque application injective $f : X \rightarrow X$ telle qu'il existe un élément $x \in X$ vérifiant $X = \{f^n(x)\}_{n \geq 0}$.

L'élément x s'appelle *point initial* de f .

Évidemment, si l'ensemble X est fini, alors f est un change sur X si et seulement si f est une permutation cyclique de longueur maximale.

Proposition 3.1: *Si G est un groupe qui opère transitivement et fidèlement à gauche sur X , alors le groupoïde (X, \star) est simplifiable à gauche et fortement cyclique à gauche engendré par u si et seulement si σ est un change sur X de point initial u .*

Démonstration

De toute évidence on a $u = \sigma^0(u)$, et si on suppose ${}_s u^{n+1} = \sigma^n(u)$, alors ${}_s u^{n+2} = u \star ({}_s u^{n+1}) = u \star \sigma^n(u) = \sigma(\sigma^n(u)) = \sigma^{n+1}(u)$. Donc ${}_s u^{n+1} = \sigma^n(u)$, pour tout $n \geq 0$, et la propriété (2. 4) complète la démonstration.

Théorème 3.2: *Si G est un groupe qui opère transitivement et librement sur un ensemble dénombrable $X = \{x_k\}_{k \geq 1}$ (resp. sur un ensemble fini $X = \{x_k\}_{k=1}^n$), alors G est isomorphe au groupe des automorphismes du groupoïde (X, \star) , simplifiable à gauche, et dont l'opération \star est celle qui correspond à l'élément x_1 et à l'application $\sigma : X \rightarrow X$ telle que $\sigma(x_n) = x_{n+1}$, pour tout $n \geq 1$ (resp. correspondant à un quelconque élément x_k de X et au cycle de longueur maximale $\sigma = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$) .*

Démonstration

On commence par observer que l'on a la seule orbite $X = Gx_1$ et $St_G(x_1) = \{1_G\}$, donc l'application σ satisfait la condition (2. 1). En outre, par (2. 3), l'homomorphisme φ est tel que $Im \varphi \subset Aut(X, \star)$ et il est injectif car G opère librement sur X .

Par la proposition 3.1, le groupoïde (X, \star) est simplifiable à gauche et fortement cyclique à gauche, engendré par x_1 , car l'application σ est un change de point initial x_1 .

De plus, si $f \in Aut(X, \star)$, en posant $f(x_1) = gx_1$, les automorphismes f et $\varphi(g)$ coïncident sur x_1 , qui engendre (X, \star) , et donc ils sont égaux. Ainsi φ est aussi surjective et $G \cong Aut(X, \star)$.

Si la cardinalité de X est finie, la démonstration est analogue et le groupoïde (X, \star) est un quasi-groupe à gauche, car σ est bijective.

On observe maintenant que l'action d'un groupe G sur lui-même, déterminée par l'opération de G , est transitive et fidèle, et si G est fini ou dénombrable, par le théorème 3.2, on obtient le théorème de M. Gould démontré dans [5].

Remarque: Dans [5], on considère un groupe G où les éléments : $g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$ sont dans cet ordre. On définit sur G une opération \diamond par:

$$x \diamond y = g_{n+1}x \Leftrightarrow y = g_n x, \forall (x, y) \in G^2.$$

(Si G est fini on suppose que $g_m = g_n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod{|G|}$).

Lorsque $\sigma : G \rightarrow G$ est telle que $\sigma(g_n) = g_{n+1}$, pour tout $n \in N$, et \star est l'opération correspondante au couple $(1, \sigma)$, on a : $x \star y = x\sigma(x^{-1}y)$. Donc, si G est commutatif, les deux opérations coïncident car $x \diamond y = g_{n+1}x = \sigma(yx^{-1})x = x\sigma(x^{-1}y) = x \star y$.

Si le groupe G n'est pas commutatif les deux opérations \diamond, \star sont distinctes et, en général, les groupoïdes (G, \diamond) et (G, \star) ne sont pas isomorphes.

Pour le groupe S_3 si on considère $g_0 = 1, g_1 = (1)(2, 3), g_2 = (2)(1, 3), g_3 = (3)(1, 2), g_4 = (1, 2)(2, 3),$

$g_5 = (1, 2)(1, 3)$, alors les deux groupoïdes (S_3, \diamond) et (S_3, \star) ne sont pas isomorphes.

Proposition 3.3: Soient G un groupe et f un automorphisme de G . On considère l'action de G sur lui-même, déterminée par l'opération de G , et les opérations \star, \bullet qui correspondent, respectivement, aux deux couples (u, δ) et $(f(u), \tau)$. Alors $f : (G, \star) \rightarrow (G, \bullet)$ est un isomorphisme si et seulement si $\tau = f \circ \delta \circ f^{-1}$.

Démonstration

Si $f : (G, \star) \rightarrow (G, \bullet)$ est un isomorphisme, on a:

$$f \circ \delta(y) = f(\delta(y)) = f(u \star y) = f(u) \circ f(y) = \tau(f(y)) = \tau \circ f(y), \forall y \in G.$$

Donc $f \circ \delta = \tau \circ f$ et, par conséquent, $\tau = f \circ \delta \circ f^{-1}$.

Réciproquement, soient $\tau = f \circ \delta \circ f^{-1}$ et $\sigma = \delta \circ f^{-1}$. Comme f est un homomorphisme de G , on a $f(x) = f(g)f(u)$ pour tout $x = gu \in G$, et par conséquent:

$$\begin{aligned} f(x) \bullet f(y) &= f(g)\tau((f(g))^{-1}f(y)) = f(g)f \circ \sigma(f(g^{-1}y)) \\ &= f(g)f(\sigma \circ f(g^{-1}y)) = f(g\delta(g^{-1}y)) = f(x \star y). \end{aligned}$$

Donc $f(x) \bullet f(y) = f(x \star y)$, pour tout $(x, y) \in G^2$.

Exemple: Pour tout $n \in N^*$, soit $(k, \sigma(k), \sigma^2(k), \dots, \sigma^{2n}(k))$ un cycle σ de longueur $2n + 1$ sur l'ensemble $I = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$.

L'application $\tau : Z \rightarrow Z$ telle que

$$\begin{cases} \tau(m) = \sigma(m), \forall m \in I - \{\sigma^{2n}(k)\}; \\ \tau(\sigma^{2n}(k)) = n + 1; \\ \tau(m) = -m \text{ et } \tau(-m) = m + 1, \text{ pour tout } m \geq n + 1. \end{cases}$$

est un change de point initial k . En considérant l'action de Z sur Z déterminée par l'addition, relativement au couple (k, τ) on obtient l'opération \star telle que $a \star b = (a - k) + \tau(k - a + b)$, pour tout $(a, b) \in Z \times Z$, et par le théorème 3.2 on a $(Z, +) \cong \text{Aut}((Z, \star))$.

Par exemple, si $n = 1$ on a $I = \{0, \pm 1\}$, et par rapport au cycle $\sigma = (0, 1, -1)$ on détermine l'application τ :

$$\begin{cases} \tau(0) = 1; \\ \tau(n) = -n \text{ et } \tau(-n) = n + 1, \text{ pour tout } n \in N^*. \end{cases}$$

Enfin, en considérant le couple $(0, \tau)$, pour tout $(n, m) \in Z \times Z$ on obtient:

$$n \star m = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n = m; \\ 2n - m & \text{si } n < m; \\ 2n - m + 1 & \text{si } n > m. \end{cases}$$

Exemple: Soient G un groupe, H un sous-groupe normal de G et T un ensemble de représentants des classes de G modulo H . Par définition, pour tout $xH \in G/H$ et pour

tout $t \in T$ il existe un seul $t' \in T$ tel que $xtH = t'H$ et si en outre $yH = xH$, alors $ytH = xtH = t'H$.

Donc, en posant $xH.t = t'$ si et seulement si $xtH \cap T = \{t'\}$, l'application $j : G/H \times T \rightarrow T$ telle que $j(xH, t) = xH.t = t'$ est bien définie.

En outre, pour tout couple (xH, yH) d'éléments de G/H et pour tout $t \in T$, en posant $ytH \cap T = \{t'\}$ et $xt'H \cap T = \{t''\}$, on a $ytH = t'H$ et $xt'H = t''H$, par conséquent $xytH = xt'H = t''H$ avec $t'' \in T$. Donc on obtient $xyH.t = t''$, et on a $(xHyH).t = t'' = xH.t' = xH.(yH.t)$.

Évidemment, pour tout $t \in T$, on a $tH \cap T = \{t\}$, donc $H.t = t$ et l'application j détermine une action du groupe G/H sur l'ensemble T .

Enfin, pour tout couple $(t, t') \in T^2$ il existe un élément $x \in G$ tel que $xt = t'$, donc $xtH = t'H$ et $xH.t = t'$. De plus on a $xH.t = yH.t \Leftrightarrow xtH = ytH \Leftrightarrow xH = yH$, et G/H opère transitivement et librement sur T .

Par le théorème 3.2, on déduit que si H est un sous-groupe normal de G tel que le groupe quotient G/H soit fini ou dénombrable, alors on peut définir sur l'ensemble T des opérations \star telles que (T, \star) soit un groupoïde simplifiable à gauche dont le groupe des automorphismes est isomorphe au groupe G/H .

Exemple: Dans l'article [6], M. Koskas définit dans chaque demi-hypergroupe (H, \circ) la relation β suivante:

$$x\beta y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (z_1, z_2, \dots, z_n) \in H^n : \{x, y\} \subset \prod_{i=1}^n z_i,$$

et démontre que si β^* est la clôture transitive de β , alors le quotient H/β^* est un demi-groupe par rapport à l'opération:

$$\beta^*(x) \otimes \beta^*(y) = \beta^*(z), \quad \forall z \in x \circ y.$$

En particulier, si (H, \circ) est un hypergroupe, la relation β est transitive (cf. [4]) et le quotient $(H/\beta^*, \otimes)$ est un groupe.

Si $\varphi : H \rightarrow H/\beta$ est la surjection canonique, pour tout couple (x, y) d'éléments de H et pour tout $a \in x \circ y$, on a $\varphi^{-1}(\varphi(x \circ y)) = \beta(a)$ et si T est un ensemble de représentants des classes de β , alors l'application $j : H/\beta \times T \rightarrow T$, telle que

$$j(\beta(x), t) = t' \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(x \circ t)) \cap T = \{t'\}$$

détermine une action libre et transitive du groupe H/β sur l'ensemble T . Et, comme dans l'exemple précédent, par le théorème 3.2, on déduit que si le groupe H/β est fini ou dénombrable, alors il est isomorphe au groupe des automorphismes du groupoïde (T, \star) simplifiable à gauche.

Le problème du théorème de Gould reste ouvert dans le cas de cardinalité infinie et non dénombrable. A cette fin le théorème suivant pourra être utile, mais avant on notera:

Remarque: Soit λ un ordinal infini et non dénombrable et $G = \{g_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ un groupe de même cardinalité que λ . En considérant l'action du groupe G sur lui-même, déterminée par l'opération de G , on a l'opération \star correspondante à l'identité 1_G de G et à l'application $\sigma : G \rightarrow G$ telle que: $\sigma(g_\alpha) = g_{\alpha+1}$, pour tout $\alpha \in \lambda$.

Par définition on a $g \star x = g\sigma(g^{-1}x)$, pour tout couple $(g, x) \in G \times G$, de plus le groupoïde (G, \star) est simplifiable à gauche, car l'application σ est injective, et par (2. 3) on a aussi $Im\varphi \subset Aut(G, \star)$.

On démontre le:

Théorème 3.4: *Pour tout automorphisme f de (G, \star) les conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) $f \in Im\varphi$;
- 2) $f(g_\mu) = f(1_G)g_\mu$, pour tout ordinal limite $\mu \in \lambda$.

Démonstration

1) \Rightarrow 2) Si $f \in Im\varphi$, alors il existe $g \in G$ tel que $\varphi(g) = f$, par conséquent $g = g1_G = \varphi(g)(1_G) = f(1_G)$ et donc $f(g_\alpha) = \varphi(g)(g_\alpha) = gg_\alpha = f(1_G)g_\alpha$, pour tout $\alpha \in \lambda$

En particulier $f(g_\mu) = f(1_G)g_\mu$, pour chaque ordinal limite $\mu \in \lambda$.

2) \Rightarrow 1) Soit $f(1_G) = g$ et $\bar{f} = \varphi(g^{-1}) \circ f$. Évidemment on a $\bar{f}(1_G) = (\varphi(g^{-1}) \circ f)(1_G) = g^{-1}g = 1_G$, et en supposant qu'il existe un élément $x \in G$ tel que $\bar{f}(x) \neq x$, alors l'ensemble $S = \{\alpha \in \lambda \mid \bar{f}(g_\alpha) \neq g_\alpha\}$ est non vide.

Si $\mu = \min S$ et L est l'ensemble des ordinaux limites de λ , alors $\mu \in \lambda - L$. En effet, si $\mu \in L$, par (2), on a:

$$\bar{f}(g_\mu) = (\varphi(g^{-1}) \circ f)(g_\mu) = g^{-1}f(g_\mu) = g^{-1}f(1_G)g_\mu = g^{-1}gg_\mu = g_\mu,$$

ce qui est impossible. Donc on peut poser $\mu = \gamma + 1$, avec $\gamma \notin S$.

Alors on a $\bar{f}(g_\gamma) = g_\gamma$ et $1_G \star g_\gamma = \sigma(g_\gamma) = g_{\gamma+1} = g_\mu$, et

$$\bar{f}(g_\mu) = \bar{f}(1_G \star g_\gamma) = \bar{f}(1_G) \star \bar{f}(g_\gamma) = 1_G \star \bar{f}(g_\gamma) = 1_G \star g_\gamma = g_\mu,$$

donc $\bar{f}(g_\mu) = g_\mu$, ce qui est impossible. Par conséquent $S = \emptyset$ et $\bar{f}(x) = x$, pour tout $x \in G$.

Enfin, $\bar{f} = i_G$ implique $\varphi(g^{-1}) \circ f = i_G$, donc $f = \varphi(g)$ et $f \in Im\varphi$.

Bibliographie

- [1] G. Birkhoff, *Sobre los grupos de automorfismos*, Revista Union Math. Argentina, 11 (1946), 155-157.
- [2] Z. Hedrlin and J. Lambek, *How comprehensive is the category of semigroups?*, J. Algebra, 11 (1968), 195-212.
- [3] Z. Hedrlin and A. Pultr, *On full embeddings of categories of algebras*, Ill. J. Math., 10 (1966), 392-406.
- [4] D. Freni, *Une note sur le coeur d'un hypergroupe et sur la clôture β^* de β* , Riv. di Mat. Pura e Applicata, 8 (1991), 153 - 156.
- [5] M. Gould, *A note on automorphisms of groupoids*, Algebra Universalis, 2 (1972), 54-56.
- [6] M. Gutan, *On the transitivity of the relation β in semihypergroups*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo XLV (1996), 189 - 200.
- [7] M. Koskas, *Groupoïdes, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. Pures et Appl., 49 (1970), 155 - 192.
- [8] J. Sichler, *Category of groupoids is binding*, Comment. Math. Univ. Car., 8 (1967), 753-755.
- [9] J. Sichler, *$U(1, 1)$ can be strongly embedded into category of semigroups*, Comment. Math. Univ. Car., 9 (1968), 257-262.
- [10] Y. Sureau, *Une notion de conjugaison dans les hypergroupes et hypergroupes homomorphes à un groupe*, C.R. Acad. Sci., Pari, 284 (1977), 1101 - 1103.

Domenico Freni
 Dipartimento di Matematica e Informatica
 Università di Udine
 Via delle scienze, 206
 33100 Udine (Italia)
 email: freni@dimi.uniud.it

Nicola Rodinò
 Dipartimento di Algebra e Geometria
 Via Belzoni, 7
 33131 Padova (Italia)
 email: rodino@math.unipd.it