

B. BRUNET

**Une approche non-standard de la dimension
d'un espace topologique**

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, n° 1 (1997), p. 15-18

[<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_15_0>](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_15_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Une approche non-standard de la dimension d'un espace topologique

par B. BRUNET.

Dans cet exposé, reprenant une idée de J.P. REVEILLES (6), nous proposons une définition non-standard de la dimension d'un espace topologique et nous montrons que ce nouvel invariant topologique coïncide dans le cas des espaces métriques séparables avec les définitions classiques – petite dimension inductive (*ind*), grande dimension inductive (*Ind*) et dimension de LEBESGUE (*dim*).

1 - Épaisseur d'un espace topologique.

Dans ce qui suit, on désigne par X un espace topologique et par $\mathcal{E}$ un élargissement (voir par exemple (4)) de cet espace et on appelle base de X toute base d'ouverts de X supposée stable par intersections finies.

1.1 : Etant donné un élément a de $*X$, on appelle *halo en base $\mathcal{B}$ de a* l'ensemble, noté $h_{\mathcal{B}}(a)$ défini par $h_{\mathcal{B}}(a) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_a} *B$ où $\mathcal{B}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in *B\}$.

1.2 : A toute base $\mathcal{B}$ de X , on peut associer une relation de préordre $\leq$ sur $*X$ par : $a \leq b$ si et seulement si $a \in h_{\mathcal{B}}(b)$.

(Dans la suite on écrira $a < b$ si et seulement si $a \leq b$ mais pas $b \leq a$).

1.3 : Etant donné un point x de X , on dit que l'épaisseur en x d'une base $\mathcal{B}$ de X est inférieure à n , ce que l'on note $ep(x, \mathcal{B}) \leq n$, si et seulement si toute chaîne de type $a_p < \dots < a_1 < *x$ est de longueur $p \leq n$.

Notons que cette définition est équivalente à celle donnée dans (6) à condition de corriger la notion de « halos consécutifs » page 707.

1.4 : On appelle *épaisseur d'une base $\mathcal{B}$ de X* , l'élément de $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, noté $ep \mathcal{B}$, défini par $ep \mathcal{B} = \sup\{ep(x, \mathcal{B}) : x \in X\}$.

1.5 : On appelle *épaisseur de X* , l'élément de $\overline{\mathbb{N}}$, noté $ep X$, défini par $ep X = \inf\{ep \mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathcal{B}(X)\}$, $\mathcal{B}(X)$ désignant l'ensemble des bases de X .

On déduit alors de ces définitions les propriétés suivantes :

- 1.6 : a) $ep X = 0$ si et seulement si X possède une base d'ouverts - fermés.
 b) Pour tout espace totalement ordonné X , $ep X \leq 1$ (en effet, si $\mathcal{B}_0$ désigne la base formée des intervalles ouverts de X , on a $ep \mathcal{B}_0 \leq 1$). En particulier, puisque $\mathbb{R}$ est connexe, $ep \mathbb{R} = 1$.
 c) Pour tout espace topologique X et toute partie A de X , $ep A \leq ep X$.
 d) Pour tout couple (X, Y) d'espaces topologiques, $ep(X \times Y) \leq ep X + ep Y$.
 e) Pour tout entier $n \geq 1$, $ep \mathbb{R}^n \leq n$.

Il convient de noter qu'à la différence des définitions classiques de la dimension les propriétés c) et d) sont valables sans aucune hypothèse particulière sur les espaces considérés.

2 - Comparaison avec les définitions classiques de la dimension.

Théorème 2.1 : *Pour tout espace topologique X , on a :*

a) $ep X = 0$ si et seulement si $ind X = 0$,

b) $ind X \leq ep X$.

a) est immédiat puisque les deux assertions équivalent à dire que X possède une base d'ouverts-fermés.

b) Ecartons le cas trivial où $ep X = +\infty$ et prouvons le résultat par récurrence sur $n = ep X$. Le résultat est vrai pour $n = 0$ d'après a). Supposons le montré pour tout espace d'épaisseur $n - 1$. Comme par hypothèse $ep X = n$, il existe une base $\mathcal{B}$ de X telle que $ep \mathcal{B} = n$. Soit B un élément de $\mathcal{B}$ et soit $F = Fr B$ ($Fr B$ désignant la frontière de B). Désignons par C la trace sur F de $\mathcal{B}$. Soit x un élément de F et soit $\{a_p, \dots, a_1\}$ une chaîne de $h_C(*x)$. Comme $a_p \in {}^*F$, a_p n'est pas minimal pour le préordre associé à $\mathcal{B}$. Il existe donc un élément a_{p+1} de *X tel que $\{a_{p+1}, a_p, \dots, a_1\}$ soit une chaîne de $h_B(*x)$. Comme $ep \mathcal{B} = n$, on en déduit que $p \leq n - 1$ et donc que $ep C \leq n - 1$. Il résulte alors de la définition de $ep F$ et de l'hypothèse de récurrence que $ind F \leq n - 1$ ce qui entraîne que $ind X \leq n$.

Corollaire 2.2 : *Pour tout entier $n \geq 1$, $ep \mathbb{R}^n = n$.*

On sait en effet que $ind \mathbb{R}^n = n$. Le résultat découle alors de 1.6 e).

Il convient de noter que, contrairement à ce qui est dit dans (6), il n'est pas possible de montrer ce dernier résultat sans utiliser le théorème du point fixe de BROUWER, la démonstration proposée reposant sur le résultat non établi suivant : pour toutes parties Y et Z d'un espace topologique X , on a $ep(Y \cup Z) \leq ep Y + ep Z + 1$.

De plus, et toujours contrairement à ce qui est dit dans (6), il n'est pas possible de déduire de 2.2 et des théorèmes classiques de plongement que, pour tout espace métrique séparable X , on a $ep X = ind X (= Ind X = dim X)$, sauf à établir que, pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$, $ep A = ind A$.

2.3 Un exemple d'espace X pour lequel $ind X < ep X$ et $Ind X < ep X$.

Dans (3), V.V. FILIPPOV a montré qu'il existait deux espaces topologiques compacts non métriques X_1 et X_2 tels que $ind X_1 = Ind X_1 = 1$, $ind X_2 = Ind X_2 = 2$ et $ind(X_1 \times X_2) \geq 4$. Il résulte alors de cet exemple et de la propriété 1.6. d), que l'un de ces deux espaces X_i (et on peut montrer que c'est X_1) est tel que $ind X_i = Ind X_i < ep X_i$.

2.4 : Un exemple d'espace X pour lequel $ep X = ind X < Ind X = dim X$.

Dans (7), P. ROY a montré qu'il existait un espace métrique X tel que $ind X = 0$ et $Ind X = dim X = 1$. Cet espace X est donc tel que $ep X = ind X < Ind X = dim X$.

2.5 : *Un exemple d'espace X pour lequel $\dim X < ep X$.*

Dans (5), O.V. LOKUCIEVSKII a prouvé qu'il existe un espace compact (non métrique) tel que $\dim X = 1 < 2 = ind X = Ind X$. Cet espace X est donc tel que $\dim X < ep X$.

3 - Cas des espaces métriques.

Théorème 3.1 : *Pour tout espace métrique X , on a $ind X \leq ep X \leq \dim X = Ind X$.*

Puisque, pour tout espace métrique Y , on a $\dim Y = Ind Y$ (voir par exemple (2)), il suffit, d'après 2.1 b), d'établir que, pour tout espace métrique X , on a $ep X \leq \dim X$.

Dans ce qui suit, on posera, pour toute famille indexée $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ de parties de X et tout point x de X , $ord(x, \mathcal{F}) = |\{i \in I : x \in F_i\}| - 1$ ($|\mathcal{A}|$ désignant le cardinal de $\mathcal{A}$) et $ord \mathcal{F} = \sup\{ord(x, \mathcal{F}) : x \in X\}$.

Lemme 3.1.1. : *Pour toute base $\mathcal{B}$ de X , si $\mathcal{F} = (Fr B)_{B \in \mathcal{B}}$, on a $ep B \leq ord \mathcal{F} + 1$.*

Soit x un élément de X et soit $\{a_p, \dots, a_1\}$ une chaîne de $h_{\mathcal{B}}(*x)$. Il existe alors p éléments distincts de $\mathcal{B}$, $B_1, \dots, B_p$, tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $a_j \in *B_i$ si et seulement si $j \geq i$ et tels que $x \in Fr B_i$. Par conséquent, par définition de $ord(x, \mathcal{F})$, on a $p \leq ord(x, \mathcal{F}) + 1$ ce qui entraîne que $ep(x, \mathcal{B}) \leq ord(x, \mathcal{F}) + 1$. Il résulte alors des définitions de $ep B$ et de $ord \mathcal{F}$ que $ep B \leq ord \mathcal{F} + 1$.

3.1.2 : démonstration de 3.1.

L'assertion est triviale si $\dim X = +\infty$. Supposons donc que $\dim X = n$. Il existe alors (voir par exemple (2), 4.2.2) une base σ -localement finie $\mathcal{B}$ de X telle que, si on pose $\mathcal{F} = (Fr B)_{B \in \mathcal{B}}$, on a $ord \mathcal{F} \leq n - 1$. Cette base $\mathcal{B}$ est donc, d'après 3.1.1, telle que $ep B \leq n$, ce qui entraîne que $ep X \leq n$.

3.2 : Notons que l'espace de P. ROY déjà cité est un exemple d'espace métrique tel que $ind X = ep X = 0 < \dim X = Ind X = 1$.

3.3 : Théorème de coïncidence pour les espaces métriques séparables.

Pour tout espace métrique séparable X , on a $ep X = ind X = Ind X = \dim X$.

Ce résultat est alors une conséquence immédiate de 3.1 et du théorème classique suivant : « Pour tout espace métrique séparable X , on a $ind X = Ind X = \dim X$ ».

3.4 : *Un exemple d'espace métrique non séparable X pour lequel on a $ep X = ind X = Ind X = \dim X$.*

Dans (8), E.K. VAN DOUWEN a montré l'existence d'un espace métrique non séparable X tel que $ind X = Ind X = \dim X = 1$.

Cet espace X est donc tel que $ep X = ind X = Ind X = \dim X$.

3.5 : Question : Existe-t-il un espace métrique non séparable X tel que $ind X < ep X$?

4 - Un autre cas de coïncidence.

On peut également prouver que l'épaisseur coïncide avec les dimensions classiques dans le cas des espaces totalement ordonnés et plus généralement des lignes (espaces homéomorphes à un sous-espace d'un espace totalement ordonné). De façon précise, on peut montrer (1) que, pour toute ligne non vide X , on a :

- i) $ep\ X = ind\ X = Ind\ X = dim\ X = 0$ si et seulement si X est totalement discontinue,
- ii) $ep\ X = ind\ X = Ind\ X = dim\ X = 1$ sinon.

R E F E R E N C E S

- (1) B. BRUNET : *On the dimension of ordered spaces*, à paraître dans *Collectanea Mathematica*.
- (2) R. ENGELKING : *Dimension theory*, North-Holland, 1978.
- (3) V.V. FILIPPOV : *On the inductive dimension of the product of bicompecta*, Soviet. Math. Dokl, 13 (1972), N°1, 250-254.
- (4) L. HADDAD : *Introduction à l'analyse non-standard*, Ecole d'Eté, Beyrouth, 1973.
- (5) O.V. LOKUCIESVKII : *On the dimension of bicompecta*, (en russe), Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. 67 (1949), 217-219.
- (6) J.P. REVEILLES : *Une définition externe de la dimension topologique*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 299, Serie I, N° 14, 1984, 707-710.
- (7) P. ROY : *Nonequality of dimension for metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 134 (1968), 117-132.
- (8) E.K. VAN DOUWEN : *The small inductive dimension can be raised by the adjunction of a single point*, Indagationes Mathematicae, 35 (1973), Fasc. 5, 434-442.

Bernard BRUNET

Laboratoire de Mathématiques Pures

Université Blaise Pascal (*Clermont-Ferrand*)

63177 AUBIERE CEDEX - FRANCE

Tél. : (33) 04-73-40-70-75

Fax : (33) 04-73-40-70-64

e.mail : brunet@ucfma.univ-bpclermont.fr