ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

ABDELHAK MAZOUZ

Analyse p-adique et congruences des coefficients de la série e^{xe^x}

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 2 (1996), p. 171-181
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_2_171_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 2, 1996, pp.171-181

Analyse p-adique et congruences des coefficients de la série e^{xe^x}

MAZOUZ Abdelhak
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences-Semlalia
Département de Mathématiques
BP S15 MARRAKECH
(Maroc)

1 Introduction

Nous avons étudié dans [M.A.] par des méthodes d'analyse p-adique des congruences satisfaites par les nombres de Bell genéralisés $P(n,\lambda)$ introduits par Carlitz. Ces nombres ont pour fonction génératrice: $\sum_{n\geq 0} P(n,\lambda)\frac{x^n}{n!} = \exp(\lambda\cdot x + (e^x - 1))$. Nous étudions ici des nombres B_n introduits par P. Barrucand [B.P.] assez proches des $P(n,\lambda)$ qui ont pour fonction génératrice exponentielle: $\sum_{n\geq 0} B_n\frac{x^n}{n!} = e^{xe^x}$. De la série génératrice exponentielle, on tire facilement la relation suivante :

$$B_0 = 1 \text{ et } B_n = \sum_{j=1}^{n} j^{(n-j)}\binom{n}{j} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*.$$

Le but de notre travail est de montrer les congruences suivantes

- si p premier impair, on a pour $h \geq 1$ et $n \geq p^{2h}(1+h+p^{-1})$: $B_{n+(p-1)p^{3h}} \equiv B_n \bmod (p^h)$
- si $p = 2$, on a pour $h \geq 1$ et $n \geq 2^{2h}(h+2^{-1})$: $B_{n+2^{3h+1}} \equiv B_n \bmod (2^h)$

Notre méthode consiste à montrer que la fonction génératrice des nombres B_n est un élément analytique p-adique sur un quasi-connexe de $\mathbb{C}_p$. Les théorèmes généraux de l'analyse p adique, théorème de Mittag-Leffler p adique [R.Ph.] et inégalités de Cauchy [A.Y.], pour les éléments analytiques p-adiques sur des quasi-connexes de $\mathbb{C}_p$, permettent alors de trouver des congruences entre les coefficients de leur série de Taylor à l'origine.

2 Notation

Soit p un nombre premiers, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,$\mathbb{Z}_p$,$\mathbb{Q}_p$,$\mathbb{C}_p$ ont leur signification habituelle, cf. [A]. On note $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$. La valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}_p$,$\mathbb{C}_p$, est normalisée par $| p |= p^{-1}$. On désigne par r un nombre réel strictement positif. Soit $a \in \mathbb{C}_p$, on note $B^+(a,r) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x-a| \leq r\}$ et $B^-(a,r) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x-a| < r\}$ les boules fermées et ouvertes de rayon r de $\mathbb{C}_p$. On note aussi: $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$. Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}_p$. On désigne par $\mathcal{H}_0(\mathcal{A})$ l'espace des éléments analytiques sur $\mathcal{A}$, qui tendent vers zéro à l'infini si $\mathcal{A}$ est non borné, muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{A}$, notée $\|F\|_{\mathcal{A}} = \sup_{x\in\mathcal{A}} |F(x)|$.

3 Transformation de Laplace formelle

Définition 3.1 Soit $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \in K[[x]]$ où K est un corps de caractéristique zéro. On pose: $\mathcal{L}(F(x)) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. L'application linéaire $\mathcal{L}$ de K[[x]] dans lui même ainsi définie est appelée la transformation de Laplace formelle, cf.[B.D.]

Lemme 3.2 *Soit $\mathcal{L}$ la transformation de Laplace formelle, alors:*

$$\mathcal{L}(\exp(xe^x)) = \mathcal{L}(\sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(1-nx)^{n+1}}.$$

Preuve: Par définition $e^{xe^x} = \sum_{n\geq 0} \frac{(xe^x)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$ et donc:

$$\mathcal{L}(e^{xe^x}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \mathcal{L}(x^n e^{nx}) = \sum_{n\geq 0} B_n x^n.$$

Il est facile de montrer, cf. [B.D.], que: $\mathcal{L}(x^n e^{nx}) = n! x^n \frac{1}{(1-nx)^{n+1}}$, on en déduit que

$$\sum_{n\geq 0} B_n x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(1-nx)^{n+1}}.$$ □

4 Étude de la fonction génératrice

Lemme 4.1 *La série* $F(x) = \sum_{n\geq 0} B_n x^n$ *est congrue modulo* $p^h\mathcal{O}_p[[x]]$ *à la fraction rationnelle* $F_{h,p}(x)$ *où:*

$$F_{h,p}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{p^h-1} x^j(1-jx)^{p^h-j-1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{p^h-1}[(1-kx)^{p^h}-x^{p^h}]}{\prod_{j=0}^{p^h-1}[(1-jx)^{p^h}-x^{p^h}]}$$

Preuve: Soit $F(x) = \sum_{n\geq 0} B_n x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(1-nx)^{n+1}}$.

Posons $n = k\,p^h + j$ où $0 \leq j \leq p^h - 1$, alors

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{j=0}^{p^h-1}\sum_{k\geq 0} \frac{x^{kp^h+j}}{[1-(kp^h+j)x]^{kp^h+j+1}} \\
F(x) &\equiv \sum_{j=0}^{p^h-1}\sum_{k\geq 0} \frac{x^{kp^h+j}}{(1-jx)^{kp^h+j+1}} \quad \operatorname{mod} p^h\,\mathcal{O}_p[[x]] \\
F(x) &\equiv \sum_{j=0}^{p^h-1} \frac{x^j}{(1-jx)^{j+1}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x^{p^h}}{(1-jx)^{p^h}}} \quad \operatorname{mod} p^h\,\mathcal{O}_p[[x]] \\
F(x) &\equiv \frac{\sum_{j=0}^{p^h-1} x^j(1-jx)^{p^h-j-1}\cdot\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{p^h-1}[(1-kx)^{p^h}-x^{p^h}]}{\prod_{j=0}^{p^h-1}[(1-jx)^{p^h}-x^{p^h}]} \quad \operatorname{mod} p^h\,\mathcal{O}_p[[x]]
\end{aligned}$$

Appelons $F_{h,p}$ le second membre de l'égalité. D'où la congruence énoncée dans le lemme
□

Lemme 4.2 *Soit* $Q_{h,p}(x) = \prod_{j=0}^{p^h-1}[(1-jx)^{p^h} - x^{p^h}]$ *le dénominateur de* $F_{h,p}$ *et soit* $R_{h,p}(x) = \prod_{j=0}^{p^h-1}[(x-j)^{p^h}-1]$ *le polynôme réciproque de* $Q_{h,p}(x)$. *Alors:*

$$R_{h,p}(x) \equiv [R_p(x)]^{p^{2h-1}} \operatorname{mod} p\,\mathbb{Z}_p[x]$$

où $R_p(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-p)$.

Preuve:

$$\begin{aligned} R_{h,p}(x) &= \prod_{j=0}^{p^h-1} [(x-j)^{p^h}-1] \\ R_{h,p}(x) &\equiv \prod_{j=0}^{p^h-1} (x-j-1)^{p^h} \bmod p\,\mathbb{Z}_p[x] \\ R_{h,p}(x) &\equiv [(x-1)\dots(x-p)]^{p^{2h-1}} \bmod p\,\mathbb{Z}_p[x]. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

Notons $\frac{1}{\beta_{i,j}}$ $(1 \le i \le p; 1 \le j \le p^{2h-1})$ les racines de $R_{h,p}(x)$. Le lemme de Hensel [A.Y.] et le lemme 4.1 montrent que ces racines se groupent en p classes contenant chacune p^{2h-1} racines. Soient θ_i, $1 \le i \le p-1$ le représentant de Teichmüller de la classe résiduelle de i.

La racine $\beta_{i,j}^{-1}$ appartient à la classe résiduelle de i pour $(1 \le i \le p-1)$. Elle vérifie donc : $\left|\frac{1}{\beta_{i,j}} - \theta_i\right| < 1$.

Lemme 4.3 *Soient $\beta_{i,j}$ $(1 \le j \le p^{2h-1})$ les racines de $Q_{h,p}(x)$ qui se groupent dans la classe résiduelle de i^{-1} pour $(1 \le i \le p-1)$, alors:*

$$|\theta_i^{-1} - \beta_{i,j}| \le p^{-1/p^{2h}}$$

Preuve: Le degré sur $\mathbb{Q}_p$ de l'extension $Q_p(\beta_{i,j})$ est inférieur ou égal à p^{2h} car le polynôme $Q_{h,p}(x)$ est de degré p^{2h}. Donc d'après la formule $ef = n$, reliant la ramification, le degré résiduel et le degré d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on a dans le corps $Q_p(\beta_{i,j})$:

$$|\theta_i^{-1} - \beta_{i,j}| \le p^{-1/p^{2h}}.$$

□

Lemme 4.4 *Soient $\frac{1}{\beta_{p,j}}$ $(1 \le j \le p^{2h-1})$ les racines de $R_{h,p}(x)$ qui appartiennent à la classe résiduelle de p, on a :*

$$|\beta_{p,j}| \ge p^{1/p^{2h}}.$$

Preuve: On se place dans le corps $Q_p(\beta_{p,j})$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus on a dans ce corps, $\left|p - \frac{1}{\beta_{p,j}}\right| < 1$ Or $|p| < 1$, d'où $\left|\frac{1}{\beta_{p,j}}\right| < 1$. En appliquant un argument analoque à celui exposé dans le lemme précedent on en déduit que $\left|\frac{1}{\beta_{p,j}}\right| \leq p^{-1/p^{2h}}$. Donc $|\beta_{p,j}| \geq p^{1/p^{2h}}$. □

Proposition 4.5 *$F_{h,p}(x)$ est une fraction rationnelle nulle à l'infini sans pôle sur le quasi-connexe*

$$D_{h,p} = \left(\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} B^+\left(\theta_i^{-1}, p^{-1/p^{2h}}\right)\right) \bigcap B^-\left(0, p^{1/p^{2h}}\right)$$

Preuve: La proposition est évidente puisque $F_{h,p}(x)$ est une fraction rationnelle sans pôle dans $D_{h,p}$, et le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. □

5 Congruences

Proposition 5.1 *Sur la quasi-connexe*

$$D_{h,p} = \left(\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} B^+\left(\theta_i^{-1}, p^{-1/p^{2h}}\right)\right) \bigcap B^-\left(0, p^{1/p^{2h}}\right)$$

la fraction rationnelle $F_{h,p}$ vérifie l'estimation suivante:

$$\|F_{h,p}\|_{D_{h,p}} \leq p^{2-p^{-1}-p^{-2h}}.$$

Preuve: Soit $N_{h,p}(x) = \sum_{j=0}^{p^h-1} x^j(1-jx)^{p^h-j-1} \cdot \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{p^h-1} [(1-kx)^{p^h} - x^{p^h}]$, alors on a $F_{h,p(x)} = \frac{N_{h,p}(x)}{Q_{h,p}(x)}$. Soit $\frac{1}{\beta_{i,j}}$ $(1 \leq j \leq p^{2h-1})$ les racines de $R_{h,p}(x)$ de la classe résiduelle de i, pour $1 \leq i \leq p$.

Donc $Q_{h,p}(x) = a_{h,p}\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{p^{2h-1}}(x-\beta_{i,j})$ où $a_{h,p}$ est le coefficient dominant de $Q_{h,p}(x)$. Ainsi $|F_{h,p}(x)| = \dfrac{|N_{h,p}(x)|}{|a_{h,p}|\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{p^{2h-1}}|x-\beta_{ij}|}$.

Cherchons maintenant à minorer $Q_{h,p}(x)$ dans $D_{h,p}$.

- Si $1 \leq i \leq p-1$

Soit $x \in D_{h,p}$: $|x-\beta_{i,j}| = |x-\theta_i{}^{-1}+\theta_i{}^{-1}-\beta_{i,j}|$ or $|x-\theta_i{}^{-1}| > p^{-1/p^{2h}}$ et $|\theta_i{}^{-1}-\beta_{i,j}| \leq p^{-1/p^{2h}}$. D'où $|x-\beta_{i,j}| = |x-\theta_i{}^{-1}|$ pour $1 \leq j \leq p^{2h-1}$.

- Si $i = p$

Soit $x \in D_{h,p}$: $|x-\beta_{p,j}| = |\beta_{p,j}|$, car $|x| < p^{1/p^{2h}}$ et $|\beta_{p,j}| \geq p^{1/p^{2h}}$.

Donc pour $x \in D_{h,p}$, on a :

$$|Q_{h,p}(x)| = |a_{h,p}|\prod_{i=1}^{p-1}|x-\theta_i{}^{-1}|^{p^{2h-1}}\cdot\prod_{j=1}^{p^{2h-1}}|\beta_{p,j}|$$

Or $|a_{h,p}|\cdot\prod_{j=1}^{p^{2h-1}}|\beta_{p,j}| = 1$ ce qui entraîne que:

$$|Q_{h,p}(x)| \geq \left(p^{-1/p^{2h}}\right)^{(p-1)p^{2h-1}} = p^{-1+p^{-1}} \tag{1}$$

Cherchons maintenant une majoration de $N_{h,p}$ dans $D_{h,p}$, par définition on a :

$$N_{h,p}(x) = \sum_{j=0}^{p^h-1} x^j(1-jx)^{p^h-j-1}\cdot\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{p^h-1}[(1-kx)^{p^h}-x^{p^h}].$$

Comme $x \in D_{h,p}$, on a $|x| < p^{1/p^{2h}}$, et donc :

$$|N_{h,p}(x)| \leq (p^{1/p^{2h}})^{p^{2h}-1} = p^{1-p^{-2h}}. \tag{2}$$

D'après (1) et (2) on obtient, $||F_{h,p}||_{D_{h,p}} \leq p^{2-p^{-1}-p^{-2h}}$. □

Lemme 5.2 *Soit k un entier et soit $\ell(k)$ l'entier naturel défini par $p^{\ell(k)} \leq k < p^{\ell(k)+1}$. On pose :*

$$\begin{aligned} E_p(k) &= -2+p^{-1}+(k+1)\,p^{-2h} \\ S_p(k) &= -2+p^{-1}+(k+1)\,p^{-2h}+j+2h-\ell(k-1). \end{aligned}$$

On a pour $j \geq 1$ et $h \geq 1$ les inégalités suivantes :

1. si $k-1 \geq p^{j+2h}$, $E_p(k) > j-1$,

2. si $p > 2$, $S_p(k) > j-1$,

3. si $p = 2$, $S_2(k) > j-2$,

Preuve: $E_p(k) = -2 + p^{-1} + (k+1)\,p^{-2h}$

Si $k-1 \geq p^{j+2h}$ alors: $E_p(k) \geq -2 + p^{-1} + 2p^{-2h} + p^j$

Comme $p^j \geq j+1$ on a $E_p(k) > j-1$.
D'autre part, on a: $S_p(k) = -2 - p^{-1} + (k+1)\,p^{-2h} + j + 2h - \ell(k-1)$

Comme $\ell(k-1) \leq \dfrac{\log(k-1)}{\log p}$, on en déduit:

$$S_p(k) \geq -2 - p^{-1} + (k+1)\,p^{-2h} + j + 2h - \frac{\log(k-1)}{\log p}$$

Posons: $g(x) = -2 - p^{-1} + (x+1)\,p^{-2h} + j + 2h - \dfrac{\log(x-1)}{\log p}$ où x est un réel ≥ 1. On montre facilement que le minimum de $g(x)$ est atteint pour $x - 1 = \dfrac{p^{2h}}{\log p}$.

Comme $\ell(k-1)$ garde la même valeur pour $p^m \leq k-1 < p^{m+1}$ on en déduit que le minimum de $S_p(k)$ est atteint pour $k - 1 = p^{2h-1}$ si $p > 2$ (resp. pour $k - 1 = 2^{2h}$ si $p = 2$). D'où les inégalités suivantes:

1. Si $p > 2$ on a: $S_p(k) \geq S_p(1 + p^{2h-1})$ et
$$\begin{aligned} S_p(1+p^{2h-1}) &= -2 - p^{-1} + (2 + p^{2h-1})\,p^{-2h} + j + 2h - (2h-1) \\ &= -1 + j + 2p^{-2h} \end{aligned}$$
D'où $S_p(k) > j - 1$ si $p > 2$.

2. Si $p = 2$ et $h \geq 1$ on a: $S_2(k) \geq S_2(1 + 2^{2h-1})$ et
$$\begin{aligned} S_2(1+2^{2h}) &= -2 - 2^{-1} + (2 + 2^{2h})\,2^{-2h} + j + 2h - 2h \\ S_2(1+2^{2h}) &= j - 1 - 2^{-1} + 2^{-2h+1} > j - 2. \end{aligned}$$
D'où $S_2(k) > j - 2$ si $h \geq 1$.

$\square$

Lemme 5.3 *Soit $F_{h,p}(x) = \sum_{n\geq 0} B(n,h)\,x^n$, le développement en série de Taylor de la fonction rationnelle $F_{h,p}$. Soient $j \geq 1$ et $h \geq 1$*

- *si $p > 2$ et $n \geq p^{2h}(1+j-p^{-1})$ on a: $B(n+(p-1)\,p^{j+2h}, h) \equiv B(n,h) \mod (p^j)$*
- *si $p = 2$ et $n \geq 2^h(j+2^{-1})$ on a: $B(n+2^{j+2h+1}, h) \equiv B(n,h) \mod (2^j)$*

Preuve: $F_{h,p}$ est un élément analytique borné sur $D_{h,p}$. D'après le théorème de Mittag Leffler p-adique [R.Ph.] on a:
$F_{h,p} = \sum_{i=1}^{p} F_{i,h}$ où $F_{i,h} \in \mathcal{H}_0\Big(\mathbb{C}_p - B^+(\theta_i{}^{-1}, (p^{-1/p^{2h}}))\Big)$ pour $1 \leq i \leq p-1$,
et $F_{p,h} \in \mathcal{H}_0\Big(B^-(0, (p^{\frac{1}{p^{2h}}}))\Big)$ si $i = p$. Pour $1 \leq i \leq p-1$ on a:
$F_{i,h}(x) = \sum_{k\geq 1} b_{i,h,k}(1-x\,\theta_i)^{-k}$ avec $||F_{i,h}||_{\mathbb{C}_p - B^+(\theta_i{}^{-1}, (p^{-1/p^{2h}}))} = \sup_k |b_{i,h,k}|\, p^{k/p^{2h}}$.
Pour $|x| < 1$, on a:

$$(1-x\,\theta_i)^{-k} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} \theta_i{}^n\, x^n$$

Si l'on pose $F_{i,h}(x) = \sum_{n\geq 0} f_{i,h,n}\, x^n$ on a: $f_{i,h,n} = \sum_{k\geq 1} b_{i,h,k}\, \theta_i{}^n \binom{n+k-1}{k-1}$.

Le théorème de Mittag-Leffler fournit l'inégalité de norme suivante:

$$\sup_{1\leq i\leq p-1} ||F_{i,h}||_{\mathbb{C}_p - B^+(\theta_i{}^{-1}, p^{-1/p^{2h}})} \leq ||F_{h,p}||_{D_{h,p}}$$

De la proposition 5.1 on déduit que: $\sup_i ||F_{i,h}||_{\mathbb{C}_p - B^+(\theta_i^{-1}, (p^{-1/p^{2h}}))} \leq p^{2-p^{-1}-p^{-2h}}$ ce qui entraîne que:

$$|b_{i,h,k}| \leq p^{2-p^{-1}-(k+1)p^{-2h}} \tag{1}$$

et on a donc, d'après l'inégalité ultramétrique:

$$\begin{aligned} &|f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| \\ &\leq \sup_k |b_{i,h,k}| \left| \theta_i{}^{n+(p-1)p^{j+2h}} \binom{n+(p-1)p^{j+2h}+k-1}{k-1} - \theta_i{}^n \binom{n+k-1}{k-1} \right| \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq p-1$ on a $\theta_i{}^{p-1} = 1$. D'autre part on a d'après [S.W.]:

$$\left| \binom{n+(p-1)p^{j+2h}+k-1}{k-1} - \binom{n+k-1}{k-1} \right| \leq \inf(1, p^{-j-2h+\ell(k-1)})$$

Rappelons que:

$E_p(k) = -2 + p^{-1} + (k+1)\,p^{-2h}$ et $S_p(k) = -2 + p^{-1} + k + 1)\,p^{-2h} + j + 2h - \ell(k-1)$.

D'après (1) on déduit que : $|f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| \leq p^{-E_2(k)} \inf(1, p^{-j-2h+\ell(k-1)})$.

Deux cas sont à envisager : $k - 1 < p^{j+2h}$ et $k - 1 \geq p^{j+2h}$.

Si $k - 1 \geq p^{j+2h}$ alors $\inf(1, p^{-j-2h+\ell(k-1)}) = 1$ et $E_2(k) > j - 1$. Ainsi:

$$|f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| \leq p^{1-j}$$

Si $k - 1 < p^{j+2h}$ alors $\inf(1, p^{-j-2h+\ell(k-1)}) = p^{-j-2h+\ell(k-1)}$. On en déduit que $|f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| \leq p^{-S_p(k)}$. Du lemme 5.2 on déduit que, pour $1 \leq i \leq p-1$, on a:

$$|f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| < p^{1-j} \quad \text{si} \quad p > 2 \qquad (2),$$

respectivement

$$|f_{i,h,n+2^{j+2h}} - f_{i,h,n}| < 2^{-j+2} \quad \text{si} \quad p = 2 \qquad (3)$$

• si $i = p$, $F_{p,h} \in \mathcal{H}_o\left(B^-(0, \left(p^{1/p^{2h}}\right)\right)$

Comme $F_{p,h}(x) = \sum_{n \geq 0} f_{p,h,n} x^n$, de l'estimation de la proposition 5.1

on déduit : $||F_{p,h}||_{B^+(0,p^{1/p^{2h}})} \leq p^{2-p^{-1}-p^{-2h}}$

Ceci entraîne que:

$$||f_{p,h,n}|| \leq p^{-(n+1)p^{-2h}+2-p^{-1}} \qquad (4)$$

Enfin pour établir des congruences entre les $B(n,h)$, deux cas sont à envisager : $p > 2$ et $p = 2$.

• Si $p > 2$

Déterminons à quelle condition sur n on a $|f_{p,h,n}| \leq p^{1-j}$. Pour cela d'après (4), il suffit que $p^{-(n+1)p^{-2h}+2-p^{-1}} \leq p^{1-j}$, ce qui entraîne $n \geq p^{2h}(j - 2^{-1})$.

Comme $B(n,h) = \sum_{i=1}^{p} f_{i,h,n}$. On a d'après (2), pour $p > 2$ et $n \geq p^{2h}(1 + j + p^{-1})$

$$|B(n + (p-1)\,p^{j+2h}, h) - B(n,h)| < p^{1-j}.$$

Comme $B(n,h) \in \mathbb{Z}_p$ l'inégalité précédente entraîne :

$$|B(n + (p-1)\,p^{j+2h}, h) - B(n,h)| \leq p^{-j}.$$

Ainsi si $p > 2$ et $n \geq p^{2h}(1 + j + p^{-1})$, on a :

$$B(n + (p-1)\, p^{j+2h}, h) \equiv B(n, h) \bmod (p^j).$$

• Si $p = 2$ et $h \geq 1$

Déterminons à quelle condition sur n on a $|f_{2,h,n}| \leq 2^{-j+2}$. Pour cela d'après (4) il suffit que: $2^{-(n+1)\cdot 2^{-2h}} + 2 - 2^{-1} \leq 2^{-j+2}$. Ce qui entraîne $n \geq 2^{2h}(j - 2^{-1})$.

Comme $B(n, h) = f_{1,h,n} + f_{2,h,n}$, on a d'après (3) pour $p = 2$, $h \geq 1$ et $n \geq 2^h(j + 2^{-1})$: $|B(n + 2^{j+2h}; h) - B(n, h)| < 2^{-j+2}$. Or $B(n, h) \in \mathbb{Z}_2$, l'inégalité précédente entraîne alors que:

$$|B(n + 2^{j+2h+1}, h) - B(n, h)| \leq 2^{-j}.$$

Ainsi si $p = 2$; $h \geq 1$ et $n \geq 2^{2h}(j + 2^{-1})$ on a:

$$B(n + 2^{j+2h+1}, h) \equiv B(n, h) \bmod (2^j).$$

□

Théorème 5.4 *Les nombres B_n vérifient les congruences suivantes :*

- *si p est premier impair, alors pour tous, $h \geq 1$ et $n \geq p^{2h}(1 + h + p^{-1})$ on a:*

$$B_{n+(p-1)p^{3h}} \equiv B_n \bmod (p^h)$$

- *si $p = 2$, alors pour tous $h \geq 1$ et $n \geq 2^{2h}(h + 2^{-1})$ on a:*

$$B_{n+2^{3h+1}} \equiv B_n \bmod (2^h)$$

Preuve: D'après le lemme 4.1 on a:

$$F(x) \equiv F_{h,p}(x) \bmod p^h\, \mathcal{O}_p[[x]].$$

D'où

$$||F - F_{h,p}||_{B^-(0,1)} \leq p^{-h}.$$

Des inégalités de Cauchy, on déduit que :

$$B(n, h) \equiv B_n \bmod p^h.$$

En appliquant le lemme 5.3, on obtient des congruences énoncées par le théorème 5.4. □

Bibliographie

[A.Y.] AMICE, Y. : *Nombres p-adiques* , PUF collection Sup, Le Mathématicien, Paris, 1975.

[B.D.] BARSKY, D. : *Analyse p-adique et suites classiques de nombres*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 5ème session, 7-8 décembre 1981, Publication de l'IRMA de Strasbourg 182/S-04, 1982.

[M.A.] MAZOUZ, A : *Nombres de Bell Généralisés et Analyse p-adique*, Thèse Université Paris 13, 1994.

[B.P.] BARRUCAND,P.: *Communication personnelle.*

[R.Ph.] ROBBA, Ph. : *Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets*, Astérisque n° 10, pp.109-220, 1973.

[S.W.] SCHIKOFF, W.H. : *Ultrametric calculus, an introduction to p-adic analysis*, Cambridge University Press, 1984.