ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

LÉONARD GALLARDO

Dérive des marches aléatoires et théorèmes limites

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 1 (1996), p. 77-87

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_77_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.77-87

DERIVE DES MARCHES ALEATOIRES ET THEOREMES LIMITES

Léonard Gallardo

Résumé. Les marches aléatoires sur certains hypergroupes de dimension un sont des chaînes de Markov dont la dérive et la fonction moment d'ordre deux tendent vers une limite à l'infini. Ces faits sont utilisés pour obtenir des théorèmes limites.

Abstract. Random walks on a class of one dimensional hypergroups are Markov chains whose drift and second moment function have a limit at infinity. These facts are used to obtain limit theorems.

1) Introduction : Une marche aléatoire sur $E = \mathbb{R}^d(resp.\mathbb{Z}^d, resp.$ un groupe topologique $G)$ peut être vue comme un processus de sommes de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans E et de loi μ ou comme une chaîne de Markov sur E dont le noyau de transition P est un noyau de convolution par μ : $P(x, dy) = \delta_x * \mu(dy)$, où $*$ est la convolution des mesures sur $\mathbb{R}^d(resp.\mathbb{Z}^d, resp.G)$. Cette manière de voir, plus analytique que la première, conserve un sens chaque fois qu'on dispose sur $M(E)$ d'une opération $*$, associative, distributive par rapport à l'addition et vérifiant quelques conditions supplémentaires et ceci même si cette "convolution généralisée" ne provient pas d'une structure de groupe. On appelle alors marche aléatoire toute chaîne de Markov dont le noyau markovien est un noyau de convolution généralisée.

Dans cet exposé nous nous proposons, après avoir présenté quelques convolutions généralisées typiques, de mettre en évidence un phénomène fréquent : La dérive de la convolution. Il s'agit de la propriété suivante (cf. [G3]). Soit E un borélien non borné de $\mathbb{R}^d$ et $*$ une convolution généralisée sur $M(E)$ telle que $(E, *)$ soit un hypergroupe (cf. [B-H]). Sous certaines conditions, pour tout $x \in E$, les limites

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_E (u-t)\delta_x * \delta_t(du) = m_1(x)$$

et

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_E (u-t)^2\delta_x * \delta_t(du) = m_2(x)$$

existent (δ désigne une masse de Dirac). Cette particularité peut être mise à profit pour étudier le comportement asymptotique des marches aléatoires associées à ces structures : TLC et loi des grands nombres. En fait ces résultats probabilistes ne sont pas pour nous un but en eux mêmes. Nous souhaitons plutôt expliciter les propriétés qui lient le comportement limite des marches aléatoires à la structure asymptotique de la convolution décrite ci-dessus. Cette approche a l'avantage d'être directe et ne nécessite pas l'utilisation des propriétés spectrales habituelles (notion de dual, transformation de Fourier $\cdots$). Dans la suite nous utiliserons souvent les abréviations m.a. pour marche aléatoire et v.a. pour variable aléatoire.

Cet article est la rédaction d'un exposé donné au colloque dédié à la mémoire d'Albert Badrikian.

2) Exemples de convolutions et de marches aléatoires généralisées

A) Marches aléatoires radiales dans $\mathbb{R}^d$:Si (X_n) est une m.a. radiale dans $\mathbb{R}^d$ i.e. dont les pas ξ_k dont des v.a. i.i.d invariantes par rotation, alors la distance euclidienne de X_n à l'origine est une chaîne de Markov $|X_n|$ sur $\mathbb{R}_+$ dont le noyau de transition est de la forme $P(x, dy) = \delta_x *_\alpha \mu(dy)$, où μ est la loi de $|\xi_1|$ et $*_\alpha$ est la convolution "sphérique" sur $M(\mathbb{R}_+)$ donnée par

$$(2.1)\ \langle \delta_x *_\alpha \delta_y . f\rangle = \int_{-1}^{1} f(\sqrt{x^2+y^2+2xy\lambda})dF_\alpha(\lambda)$$

($\forall f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$) et plus généralement par

$$(2.2)\ \langle \mu *_\alpha \nu . f\rangle = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \langle \delta_x *_\alpha \delta_y, f\rangle \mu(dx)\nu(dy)$$

pour $\mu, \nu \in M(\mathbb{R}_+)$, où $\alpha = (d/2) - 1$ et

$$(2.3)\ dF_\alpha(\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}(1-\lambda^2)^{\alpha-1/2}d\lambda$$

est la loi du cosinus de l'angle que fait un vecteur aléatoire uniformément distribué sur S_{d-1} avec une direction fixe (cf. [Ha]). Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la convolution (2.2) garde un sens même si l'interprétation géométrique est perdue. Les m.a. associées ont été étudiées par Kingman (cf. [K]).

B) Marches isotropes sur la sphère : Soit (R_k) une suite de v.a. i.i.d à valeurs dans $SO(d+1)$ et e le pôle nord de la sphère $S_d = SO(d+1)/SO(d)$ de dimension d. Le processus $X_n = e.R_1.R_2.\cdots R_n$ des transformés successifs de e par $R_1, R_1R_2.\cdots$ est une m.a. sur S_d. Cette marche est isotrope (ou $SO(d)$ invariante) si la loi de X_1 ne dépend que de la distance géodésique $d(e, X_1)$ de e à X_1. A l'aide de la formule des triangles sphériques ($\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos\theta$), on peut voir que $|X_n| = d(e, X_n)$ est une chaîne de Markov sur $[0,\pi]$ de noyau $P(x, dy) = \delta_x * \mu(dy)$ où μ est la loi de $|X_1|$ et où $*$ est la convolution généralisée sur $M([0,\pi])$ définie par

(2.4) $\langle \delta_x * \delta_y, f\rangle = \int_{-1}^{1} f(\arccos(\cos x \cos y + \lambda \sin x \sin y))dF_\alpha(\lambda)$

$(\forall f \in C_b([0,\pi]))$ où dF_α avec $\alpha = (d/2)-1$ est donnée par (2.3) et plus généralement pour μ et $\nu \in M([0,\pi]), \mu * \nu$ est définie par bilinéarité comme en (2.2).

C) Marches isotropes sur l'espace hyperbolique : Soit $H_d = SO(1,d)/SO(d)$ l'espace hyperbolique de dimension d qui s'identifie à la nappe supérieure de l'hyperboloïde d'équation $x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_d^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^{d+1}$. Si e est le pôle (sud) de H_d et si (R_k) est une suite de v.a. i.i.d à valeurs dans $SO(1,d)$, la marche $X_n = e.R_1 \cdots R_n$ sur H_d est isotrope si la loi de X_1 ne dépend que de la distance géodésique $|X_1| = d(e, X_1)$ (i.e. si elle est $SO(d)$ invariante). Rappelons que si x et $y \in H_d$, on a $d(x,y) = argch(x_0y_0 - x_1y_1 - \cdots - x_ny_n)$ (cf. [He]). En utilisant la formule des triangles hyperboliques, on montre alors comme en B que $|X_n| = d(e, X_n)$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}_+$ de noyau $P(x,dy) = \delta_x * \mu(dy)$ où $\mu = \mu_{|X_1|}$ et $*$ est la convolution généralisée sur $M(\mathbb{R}_+)$ donnée par

(2.5) $\langle \delta_x * \delta_y, f\rangle = \int_{-1}^{1} f(argch(chx chy + \lambda shx shy))dF_\alpha(\lambda)$,

où dF_α avec $\alpha = (d/2) - 1$ est donnée en (2.2) et $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$.

3) Convolutions généralisées et hypergroupes

Définition 3.1 : Soit E un espace topologique L.C.D. et $*$ une opération bilinéaire et séparément continue pour la topologie faible sur l'espace $M(E)$ des mesures de Radon complexes bornées sur E, appelée convolution et qui préserve les probabilités (i.e. $M_1(E) * M_1(E) \subset M_1(E)$). On dit que $(E,*)$ est un hypergroupe si les propriétés suivantes sont satisfaites

1) $\delta_x * (\delta_y * \delta_z) = (\delta_x * \delta_y) * \delta_z \qquad (\forall x,y,z \in E)$.

2) il existe $e \in E$ tel que $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x \qquad (\forall x \in E)$

3) il existe une involution continue $x \longmapsto x^-$ de E telle que

a) $(\delta_x * \delta_y)^- = \delta_{y^-} * \delta_{x^-}$

b) $e \in supp(\delta_x * \delta_y) \Longleftrightarrow x = y^-$,

où pour $\mu \in M_1(E), \mu^-$ est l'image de μ par $x \longmapsto x^-$ et $supp\mu$ désigne le support de μ.

4) $supp(\delta_x * \delta_y)$ est compact et

a) l'application $(x, y) \longmapsto \delta_x * \delta_y$ de E^2 dans $M_1(E)$ est continue pour la topologie faible.

b) l'application $(x, y) \longmapsto supp(\delta_x * \delta_y)$ de E^2 dans l'ensemble des parties compactes de E est continue pour la topologie de Hausdorff.

Dans cet article nous ne considérons que des hypergroupes commutatifs i.e. $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x (\forall x, y \in E)$. Notons en particulier que si l'involution $x \longmapsto x^-$ est l'identité (i.e. $x = x^-. \forall x \in E$) l'hypergroupe est commutatif.

Les convolutions obtenues au paragraphe 1 donnent des structures d'hypergroupe sur $E = \mathbb{R}_+ (resp. E = [0, \pi])$ avec $e = 0$ et $x^- = x$. De nombreux exemples d'hypergroupes figurent dans [B-H]. Les deux classes suivantes (dont la première généralise les exemples A et C de 1) nous serviront d'exemple typique.

a) Hypergroupes de Chébli-Trimèche : Soit A une fonction strictement croissante non bornée sur $\mathbb{R}_+$ telle que $A(0) = 0$. On suppose A dérivable, A'/A décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $A'(x)/A(x) = \alpha/x + B(x)$ dans un voisinage de zéro, où $\alpha > 0$ et B est une fonction impaire de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Considérons l'opérateur

(3.1) $L = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{A'(x)}{A(x)} \dfrac{d}{dx}.$

La solution u sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ du problème de Cauchy hyperbolique $L_x u = L_y u$ de conditions initiales $u(x, 0) = f(x)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$, s'écrit sous la forme

(3.2) $u(x, y) = \displaystyle\int_0^\infty f(u) \mu_{xy}(du),$

où $\mu_{xy} \in M_1(\mathbb{R}_+)$ est en fait à support dans l'intervalle $[|x - y|, x + y] (cf. [C])$. En posant $\delta_x * \delta_y = \mu_{xy}$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ une structure d'hypergroupe. Comme cas particulier pour $A(x) = x^\alpha$, on obtient l'hypergroupe de Kingman et pour $A(x) = shx$ l'hypergroupe de l'exemple C.

b) Hypergroupes polynomiaux : Soient $(p_n), (q_n)$ et (r_n) trois suites de nombres réels telles que $p_n > 0, r_n \geq 0, q_{n+1} > 0, q_0 = 0$ et $p_n + q_n + r_n = 1 (\forall n \in \mathbb{N})$. Les polynômes définis par $P_0 \equiv 1, P_1(x) = x$ et

(3.3) $x P_n(x) = q_n P_{n-1}(x) + r_n P_n(x) + p_n P_{n+1}(x) \ (n \geq 1),$

forment une suite (P_n) de polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$ par rapport à une certaine mesure $d\Pi(x)$. S'ils sont à coefficients de linéarisation non négatifs (i.e. si $\forall m, n \ \ P_m(x) P_n(x) = \displaystyle\sum_{r=|m-n|}^{m+n} c(m, n, r) P_r(x)$ avec $c(m, n, r) \geq 0, \ \forall r$) on définit une structure d'hypergroupe $(\mathbb{N}, *)$ sur $\mathbb{N}$ en posant $e = 0, n^- = n (\forall n \in \mathbb{N})$ et

(3.4) $\delta_m * \delta_n = \sum_{r=|m-n|}^{m+n} c(m,n,r)\delta_r.$

C'est l'hypergroupe polynomial de paramètres $(p_n), (q_n)$ et (r_n). Il est dit à paramètres convergents si $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $\lim_{n\to\infty} q_n = q$ existent dans $]0,1[$.

Beaucoup de familles classiques de polynômes orthogonaux sont associées à des structures d'hypergroupes (cf. [L]). Par exemple les polynômes de Tchebychev donnent sur $M(\mathbb{N})$ la convolution

(3.5) $\delta_m * \delta_n = \frac{1}{2}(\delta_{|m-n|} + \delta_{m+n}).$

Définition 3.6 : Soit $(E,*)$ un hypergroupe. On appelle marche aléatoire de loi $\mu(\in M_1(E))$ toute chaîne de Markov homogène sur E dont le noyau markovien est de la forme $P(x,dy) = \delta_x * \mu(dy)$.

Remarque 3.7 : Le lecteur qui ne désire pas rentrer dans la problématique des hypergroupes peut continuer la lecture de cet article en considérant l'une des convolutions présentées dans le paragraphe 2 (exemples A et C).

4) Hypergroupes stables

Pour simplifier la présentation nous ne considérerons ici que des hypergroupes unidimensionnels. Soit $(E,*)$ un hypergroupe avec E un sous ensemble borélien non borné de $\mathbb{R}$ muni de la topologie induite ; si E est un lattice, il est simplement muni de la topologie discrète. On suppose que la convolution vérifie la propriété suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que : $\forall x, y \in E$ et $\forall u \in supp(\delta_x * \delta_y)$, on ait

(4.0) $|u-y| \leq C|x|.$

Par exemple dans le cas des hypergroupes de Chébli-Trimèche et des hypergroupes polynomiaux, on a $E = \mathbb{R}_+(resp. \mathbb{N})$ et $supp(\delta_x * \delta_y) \subset [|x-y|, x+y]$; la condition (4.0) est donc vérifiée avec $C = 1$.

Définition 4.1 : On dit que l'hypergroupe $(E,*)$ est stable d'ordre 1 (S1 en abrégé) si pour tout $y \in E$

(4.1.1) $\lim_{|x|\to\infty} \int_E (u-x)\delta_x * \delta_y(du) = m_1(y)(\in \mathbb{R})$ existe.

$(E,*)$ sera dit stable d'ordre 2 (S2 en abrégé) si de plus : $\forall y \in E$,

(4.1.2) $\lim_{|x|\to\infty} \int_E (u-x)^2\delta_x * \delta_y(du) = m_2(y)(\in \mathbb{R}_+)$ existe.

Dans le cas $E = \mathbb{R}$ avec la convolution usuelle, on a trivialement $m_1(y) = y$ et $m_2(y) = y^2$. Dans [G2] nous avons utilisé la terminologie stable pour stable d'ordre 1 et avons justifié l'utilisation de cette dénomination : c'est la convolution qui vérifie une propriété de stabilité. Dans [G3] nous avons effectué une étude analytique des fonctions m_1 et m_2 précédentes et nous avons en particulier obtenu les résultats suivants :

Proposition 4.2 Tout hypergroupe de Chébli-Trimèche est de type S2 avec les fonctions m_1, m_2 données explicitement par :

(4.2.1) $m_1(x) = 2\rho \int_0^x (A(u))^{-1} \int_0^u A(\xi) d\xi du$

et

(4.2.2) $m_2(x) = \int_0^x \int_u^x ((A(z))^{-1} dz)(2 + 4\rho m_1(u)) A(u) du.$

où $2\rho = \lim_{x \to +\infty} A'(x)/A(x) \geq 0.$

Proposition 4 Tout hypergroupe polynomial à paramètres convergents est de type S2 avec

(4.3.1) $m_1(n) = (p-q)P_n'(1)$

(4.3.2) $m_2(n) = (p+q)P_n'(1) + (p-q)^2 P_n''(1) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$

5) Dérive des marches aléatoires sur les hypergroupes stables

Définition 5.1 : Etant donné une chaîne de Markov (X_n) homogène sur un borélien non borné $E(\subset \mathbb{R})$, on appelle dérive de (X_n), la fonction d (lorsqu'elle existe) définie sur E par

(5.1.1) $d(x) = \mathbb{E}_x(X_1 - x) = \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} | X_{n-1} = x),$

et on appelle par abus de langage, moment d'ordre 2 la fonction (lorsqu'elle existe) définie sur E par

(5.1.2) $c_2(x) = \mathbb{E}_x((X_1 - x)^2) = \mathbb{E}((X_n - X_{n-1})^2 | X_{n-1} = x).$

Définition 5.2 : Une chaîne de Markov est dite de type S1 si elle a une dérive d bornée sur E et telle que

(5.2.1) $\lim_{|x| \to \infty} d(x) = m_1 (\in \mathbb{R})$ existe.

La chaîne est dite de type S2 si elle est de type S1 et si elle a une fonction moment d'ordre 2 telle que

(5.2.2) $\lim_{|x|\to\infty} c_2(x) = m_2(\in \mathbb{R}_+)$ existe.

Proposition 5.3 : Soit $(E,*)$ un hypergroupe stable de type 1 (resp. de type 2). Toute marche aléatoire sur $(E,*)$ dont la loi μ admet un moment d'ordre 1 (resp. un moment d'ordre 2) est de type S1 (resp. de type S2) et on a

(5.3.1) $m_1 = \int_E m_1(x)\mu(dx)$

(5.3.2) $(resp. m_2 = \int_E m_2(x)\mu(dx))$.

démonstration : On vérifie immédiatement grâce à la condition (4.0) que $d(x)$ existe et que $\| d \|_\infty \leq \int_E |y|\mu(dy) < +\infty$ par hypothèse.

De plus on a

$$d(x) = \int_E (u-x)\delta_x * \mu(du) = \int_E \left(\int_E (u-x)\delta_x * \delta_y(du)\right)\mu(dy)$$

et le théorème de convergence dominée donne aussitôt

$$\lim_{|x|\to\infty} d(x) = \int_E m_1(y)\mu(dy) = m_1.$$

Une démonstration analogue donne le résultat pour le cas de m_2□

6) Théorèmes limites pour les marches aléatoires

On va considérer ici des chaînes de Markov de type S1 et S2. Les résultats obtenus s'appliqueront immédiatement aux marches aléatoires sur les hypergroupes de type S1 (resp. S2).

A) Généralités. Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un borélien non borné $E(\subset \mathbb{R})$ dont la dérive existe.

Proposition 6.1 : Le processus $M_n = X_n - \sum_{k=1}^{n} d(X_{k-1})$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k; k \leq n)$. Si de plus (X_n) ã une fonction moment d'ordre 2 (voir (5.2)) et si $Z_k = M_k - M_{k-1}$ est l'accroissement de M_n, on a alors

(6.1.1) $\mathbb{E}(Z_k^2|\mathcal{F}_{k-1}) = c_2(X_{k-1}) - d^2(X_{k-1})$ p.s.

démonstration : Le fait que (M_n) est une martingale est facile à vérifier ; la formule (6.1.1) résulte d'un calcul sans difficulté □

6.2 Hypothèses sur la chaîne : Dans toute la suite du paragraphe 6 les considérations de récurrence et transience vont jouer un rôle déterminant. On supposera donc soit que l'espace des états E est discret (dans ce cas les notions de transience et récurrence sont usuelles) soit que E est un borélien quelconque de $\mathbb{R}$ et dans ce cas

i) lorsque nous dirons que (X_n) est récurrente, il faut entendre que (X_n) est Harris récurrente avec une mesure invariante (σ-finie) λ portée par E (çf. [R]). La chaîne (X_n) sera dite récurrente positive si λ est de masse finie et récurrente nulle sinon.

ii) Nous dirons que (X_n) est transiente si $|X_n| \to \infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour un $x \in E$.

A) Loi des grands nombres

Proposition 6.3 : Soit (X_n) une chaîne de Markov ayant une fonction moment d'ordre 2 bornée sur E, alors

$$(6.3.1) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(X_{k-1})\right) = 0 \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s.} \quad (\forall x \in E)$$

démonstration : si c_2 est bornée sur E, d aussi et d'après (6.1.1), la suite $\mathbb{E}(Z_k^2)$ est bornée donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\mathbb{E}(Z_n^2)$ converge. D'après un résultat classique de Chow, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{M_n}{n} = 0$ $\mathbb{P}_x$ p.s. □

Corollaire 6.4 : Si la chaîne (X_n) est transiente et de type S1, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} = m_1$ $\mathbb{P}_x$ p.s.

démonstration : $d(X_n)$ converge vers m_1 p.s. donc ses sommes de Cesaro aussi d'où le résultat d'après la proposition 6.3 □

Proposition 6.5 : Soit (X_n) une chaîne de Markov récurrente nulle ou transiente et f une fonction définie sur E et telle que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = 0 \ p.s.$$

démonstration : si la chaîne est transiente, le résultat est trivial. Dans le cas récurrent nul nous généralisons un argument utilisé dans [G2] (théorème 1.8) : Soit telle que $\lambda(E_m) < +\infty$ et $\cup_m E_m = E$. Posons $f_k = \mathbb{1}_{[-k,k]} f$. Pour tous m et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n |f_k(X_i)|}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{E_m}(X_i)} = \frac{\langle \lambda, |f_k| \rangle}{\lambda(E_m)} \text{ p.s.}$$

Du fait que $\lambda(E_m) \to +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n f_k(X_i) = 0$ p.s. Comme f_k converge uniformément vers f quand $k \to +\infty$, on en déduit le résultat annoncé □

<u>Théorème 6.6</u> : Soit (X_n) une chaîne de Markov de type S1 avec une fonction moment d'ordre 2 bornée sur E, alors

a) si (X_n) est récurrente positive , $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ p.s.

b) si (X_n) est récurrente nulle ou transiente, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = m_1$ p.s.

<u>démonstration</u> : c'est une généralisation du Théorème 1.8 de [G2] (voir aussi [G1]. Dans le cas récurrent positif, on utilise le théorème ergodique pour obtenir $n^{-1} \sum\limits_{k=1}^n d(X_{k-1}) \to \langle \lambda, d \rangle$ p.s. Or $\langle \lambda, d \rangle = 0$; il suffit d'appliquer la proposition 6.3. Dans le cas transient, c'est le corollaire 6.4. Dans le cas récurrent nul, on applique la proposition 6.5 avec $f = d - m_1$ puis la proposition 6.3 pour conclure □

<u>Remarque 6.7</u>: Le résultat du Théorème 6.6 s'applique immédiatement aux m.a. avec moment d'ordre 2 sur les hypergroupes de type S1. Par une méthode de troncature (cf. [G2] ou [G1]) on peut montrer que le résultat est encore valable pour les m.a. avec moment d'ordre 1.

B) <u>Théorème limite central</u> : Soit $\alpha > 0$; considérons les hypothèses suivantes :

$H_0(\alpha)$ = "la fonction $c_\alpha(x) = \mathbb{E}_x(|X_1 - x|^\alpha)$ existe et est borné sur E".

H_3 : "Il existe une suite (T_n) de v.a. i.i.d. ayant un moment d'ordre 2 telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |X_n - X_{n-1}| \leq T_n$ p.s."

Lorsque $H_0(2)$ est satisfaite, on a $c_2(t) - (d(t))^2 \geq 0$. On supposera que cette fonction n'est jamais nulle (i.e. (X_n) n'a pas d'état absorbant). La condition H_3 est automatiquement vérifiée pour une m.a. sur un hypergroupe vérifiant la condition (4.0) comme l'indique immédiatement la contrainte sur le support (voir [G2]).

Comme dans le cas de la loi des grands nombres, nous devons distinguer la nature de la chaîne de Markov (X_n) , d'où le résultat suivant en deux parties :

Théorème 6.8 : 1) Si (X_n) est récurrente positive de mesure invariante λ et satisfait $H_0(2)$, alors

$$n^{-1/2}(X_n - \sum_{k=1}^{n} d(X_{k-1})) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\sigma^2)(n \to +\infty),$$

où $\sigma^2 = \langle \lambda, c_2 - d^2 \rangle$.

2) Si (X_n) est récurrente nulle ou transiente, si elle est de type S2, si $\sigma^2 = m_2 - m_1^2 > 0$ et si elle vérifie de plus soit $H_0(2+\epsilon)$ (pour un $\epsilon > 0$) soit H_3, on a

$$n^{-1/2}(X_n - \sum_{k=1}^{n} d(X_{k-1})) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\sigma^2)(n \to +\infty)$$

démonstration (voir [G4] pour les détails) : En posant $g(t) = c_2(t) - d^2(t)$. dans le cas 1) on utilise le théorème ergodique pour montrer que si $V_n^2 = \sum_{k=1}^{n} g(X_k)$ et $s_n^2 = \mathbb{E}(V_n^2)$, on a $s_n^{-2}V_n^2 \to 1$ p.s. Dans le cas 2) on obtient le même résultat grâce à la proposition 6.5. Pour montrer que la martingale M_n de 6.1. satisfait la condition de Lindeberg, on applique le théorème ergodique dans le cas 1) à la fonction $h(x) = \mathbb{E}_x(Z_1^2 \mathbb{1}_{[|Z_1| \geq a]})$ et dans le cas 2) on montre par une technique de majoration que les moyennes de Cesaro de la suite de v.a.

$$W_j = \mathbb{E}\left(Z_j^2 \mathbb{1}_{[\epsilon\sigma\sqrt{j},+\infty[}(|Z_j|)|\mathcal{F}_{j-1}\right),$$

converge vers zéro en probabilité. Le théorème en résulte □

Corollaire 6.9 : Sous les hypothèses du théorème (partie 2), si $E = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{N}$, si $m_1 \neq 0$ et si $d(x) - m_1 = O(|x|^{-\alpha})$ avec $\alpha > 1/2$, on a

$$n^{-1/2}(X_n - nm_1) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\sigma^2)(n \to +\infty)$$

démonstration : On peut supposer $\alpha \leq 1$. Soit $\epsilon(x) = d(x) - m_1$. Comme d'après la loi des grands nombres $X_k \sim km_1$ p.s., on obtient que $n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} \epsilon(X_{k-1}) \to 0$ p.s. et le résultat découle alors du théorème 6.8 □

Remarque 6.10 : 1) Le corollaire s'applique au cas des hypergroupes de Chébli-Trimèche avec $\rho > 0$ et dans le cas des hypergroupes polynomiaux avec $p - q > 0$.

2) D'autres types de théorèmes limites peuvent être obtenus par des techniques spectrales ; le lecteur intéressé peut consulter [B.H.].

Bibliographie :

[B] BINGHAM, N.H. : Random walks on spheres. Zeit. Wahr. Verw. Geb. 22. p. 169-192 (1972)

[B.H] BLOOM, W. et HEYER, H. : Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups. De Gruyter Studies in Math. 20, (1995).

[C] CHEBLI, H. : Opérateurs de translation généralisée et semi groupes de convolution. Lecture notes in Math. $n°404$ p.35-59 (1974).

[G1] GALLARDO, L. : Une loi des grands nombres pour certaines chaînes de Markov à dérive asymptotiquement stable et applications. C.R. Acad. Sc. Paris t. 318, Série I, p. 567-572 (1994).

[G2] GALLARDO, L. : Chaînes de Markov à dérive stable et loi des grands nombres sur les hypergroupes. A paraître aux Annales de l'IHP.

[G3] GALLARDO, L. : Asymptotic drift of the convolution and moment functions on hypergroups. A paraître à Math. Zeit.

[G4] GALLARDO, L. : Un théorème limite central pour certaines chaînes de Markov unidimensionnelles et applications. Soumis pour publication.

[Ha] HALDANE, J.B.S. : The addition of random vectors. Indian J. Stat. 22. p. 213-220 (1960).

[He] HELGASON, S. : Differential geometry and symmetric spaces. Academic Press (1962).

[K] KINGMAN, J.F.C. : Random walks with spherical symmetry. Acta Math. 109. p. 11-53 (1963).

[L] LASSER, R.: Orthogonal polynomials and hypergroups. Rend. Math. 3 Serie VII, p. 185-209 (1983).

[R] REVUZ, D. : Markov chains, North Holland (1975).

Léonard Gallardo

Université de Bretagne Occidentale, Département de Mathématiques,

6 Avenue Victor Le Gorgeu, BP 809, 29285 Brest, France.