ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

ALBERT BENASSI

Régularité des processus gaussiens elliptiques et le modèle hiérarchique

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 1 (1996), p. 33-49
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_33_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.33-49

RÉGULARITE DES PROCESSUS GAUSSIENS ELLIPTIQUES ET LE MODÈLE HIÉRARCHIQUE

Albert BENASSI

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand II) et C.N.R.S. (URA 1501)
63177 AUBIÈRE CEDEX France

I) Introduction. Soit $\{X(x); x \in \mathbb{R}^d\}$ un processus gaussien centré défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une fonction non décroissante $\psi_l(v), \psi_l(0) = 0$, est appelée module local de continuité pour X en x si

$$C_0 \leq \overline{\lim_{|h|\to 0}} \frac{|X(x+h) - X(x)|}{\psi_l(|h|)} \leq C_1 \qquad \mathbb{P}p.s. \,. \tag{1.1}$$

$$0 < C_0 \leq C_1 < \infty.$$

Une fonction non décroissante $\psi_u(v), \psi_u(0) = 0$, est appelée module uniforme de continuité sur $E = (0,1)^d$ si

$$C_0 \leq \overline{\lim_{|x-y|\to 0\ ;\ x,y\in E}} \frac{|X(x) - X(y)|}{\psi_l(|x-y|)} \leq C_1 \qquad \mathbb{P}p.s. \,. \tag{1.2}$$

$$0 < C_0 \leq C_1 < \infty.$$

Remarquons que la loi $0-1$ implique que la *limsup* dans (1.1) et (1.2) est dans chaque cas avec probabilité un, une constante notée C, telle que $C_0 \leq C \leq C_1$.

Résoudre le problème du module local (resp. du module uniforme) de continuité pour X c'est déterminer la fonction ψ_l (resp. ψ_u) ainsi que la constante $C = C_l$ (resp. $C = C_u$).

Pour déterminer ψ_l ou ψ_u on introduit (cf. Marcus [Ma]), les fonctions ρ et ω,

$$\rho^2(h) = \sup_{|x-y|=h\ ;\ x,y\in E} \mathbb{E}\left[(X(x) - X(y))^2\right], \tag{1.3}$$

$$\omega^2(h) = \inf_{|x-y|=h\ ;\ x,y\in E} \mathbb{E}\left[(X(x) - X(y))^2\right]. \tag{1.4}$$

Sous certaines conditions portant sur le comportement de ρ au voisinage de zéro ainsi que lorsque $\omega \simeq \rho$, toujours au voisinage de 0, la détermination de la fonction ψ_l est possible ([Ma]). mais pour déterminer la constante C_l, la connaissance de ψ_l ne suffit pas.

Pour la fonction ψ_u, sa détermination nécessite comme pour ψ_l, de faire les hypothèses déjà évoquées sur ρ mais aussi la connaissance des accroissements de X. L'hypothèse que ceux-ci sont stationnaires ajoutée à la connaissance du comportement de ρ et de ω au voisinage de zéro permet de déterminer la fonction ψ_u, mais toujours pas la constante C_u.

Dans la référence $[BJR]$ nous faisons l'hypothèse que l'espace des noyaux reproduisants de X est l'espace de l'énergie d'un opérateur pseudo-différentiel uniformément elliptique, à coefficients höldériens. Dans ce cas, lorsque l'opérateur est d'ordre $d+2\alpha$,

$$\rho(h) \simeq \omega(h) \simeq h^{\alpha} \qquad 0<\alpha<1, \tag{1.5}$$

mais quand l'ordre est égal à $d+2$, nous avons:

$$\rho(h) \simeq \omega(h) \simeq h\sqrt{log\frac{1}{h}} \tag{1.6}$$

ce qui nous donne

$$\psi_l(h) = h^{\alpha}\sqrt{2loglog\frac{1}{h}} \quad , \quad \psi_u(h) = h^{\alpha}\sqrt{2log\frac{1}{h}} \qquad 0<\alpha<1\ ,$$
$$\psi_l(h) = h\sqrt{2log\frac{1}{h}}\sqrt{loglog\frac{1}{h}} \quad , \quad \psi_u(h) = h\sqrt{2log\frac{1}{h}}\sqrt{logloglog\frac{1}{h}}\ , si\ \alpha=1,$$

la constante C est déterminée en posant

$$C^2(x) = \overline{\lim_{|h|\to 0}} \ \mathbb{E}\left[\left(\frac{X(x)-X(x+h)}{|h|^{\alpha}}\right)^2\right] \tag{1.7}$$

alors nous avons

$$C_l = C(x), \qquad C_u = \max_{x\in E} C(x) \tag{1.8}$$

naturellement de (1.1) et (1.2), nous déduisons que

$$C_0 \le C(x) \le C_1 \quad et \quad C_0 \le C_u \le C_1 \tag{1.9}$$

dans ce papier nous voulons résoudre le problème du module local et du module uniforme de continuité pour des Processus Gaussiens Elliptiques (P.G.E) en relaxant les hypothèses de [BJR] dans deux directions:

a) les coefficients de l'opérateur elliptique pseudodifférentiel définissant X pourront être seulement mesurables.

b) L'opérateur pseudodifférentiel elliptique définissant X ne sera plus supposé uiformément elliptique. c'est à dire que dans (1.9) nous pourrons avoir $C_0 = 0$ ou $C_1 = +\infty$ en certains points points isolés dits critiques. Nous généralisons alors les résultats de Roux $[Ro]$, à la dimension quelconque et au cas non markovien.

Afin de résoudre ces questions nous introduisons le "Modèle Hiérarchique" qui apparaît comme résumant l'essence de la méthode d'Ondelettes introduite dans $[BJR]$; c'est ce qui reste quand on ne suppose plus être dans une situation elliptique. Notre modèle hiérarchique est voisin de celui des séries de Fourier aléatoires lacunaires introduites par Marcus $[Ma]$; il joue un rôle analogue à celles-ci. Dans le cas général il est très difficile de résoudre le problème du module local de continuité. Dans les actes de ce colloque Fernique résout cette question par la seule connaissance de l'espérance du *sup* de certains accroissements de X ($[Fe]$)

Ce travail doit à Y. Meyer, l'incitation à étudier le cas des processus gaussiens elliptiques dont le symbole associé est à coefficients mesurables.

Résultats.

Avant d'énoncer nos résultats, nous rappelons succintement comment associer un Espace de Noyaux Reproduisants (E.N.R) à un symbole elliptique.

2.1 Espace de Noyaux Reproduisants.

Soit $l : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable $l(x,\xi)$, à laquelle nous associons formellement pour le moment, l'opérateur Q par:

$$Qf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} l(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix.\xi}\frac{d\xi}{(2\pi)^d} \tag{2.1}$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

Posons $A = Q^*Q$ et $< f,g >_A= (Qf,\overline{Qg})_{L^2} =< Af,g >=< f,Ag >$ Si $<,>$ désigne le crochet de dualité entre l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (de Schwartz) et son dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, l'espace des distributions tempérées.

Quand $l(x,\xi) = |\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}$ $0 < \alpha < 1$ l'espace de l'énergie de A est l'espace de Sobolev Homogène $\overset{\circ}{H}{}^{\frac{d}{2}+\alpha}$mais cet espace n'est pas de Hilbert et ne peut donc pas être un E.N.R.. Dans $[BJR]$ et dans $[B]$, nous avons utilisé l'E.N.R. $H_{(\alpha)}$ suivant

$$H_{(\alpha)} = \left\{ U_f = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(e^{ix.\xi}-1)}{|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}}\bar{\hat{f}}(\xi)d\xi \quad ; \quad < U_f, U_g >_A= (f,g)_{L^2} \right\} \tag{2.2}$$

Notons J_α l'application $u \in \overset{\circ}{H}{}^{\frac{d}{2}+\alpha} \mapsto U_f \in H_{(\alpha)}$ c'est une représentation homogène de $\overset{\circ}{H}{}^{\frac{d}{2}+\alpha}$ définie par Bourdeau $[Bo]$.

Dans le cas où $l(x,\xi) \simeq a(x)|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}$ pour ξ grand et quelque soit x pouvu que $a(x) > 0$, nous procéderons de la façon suivante: soit $\tilde{H}_A$ l'espace de l'énergie

de A ; commençons par le cas où $\tilde{H}_A \supset \overset{\circ}{H}{}^{\frac{d}{2}+\alpha}$ avec injection, notée i_α, continue.

Nous rendons commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\overset{\circ}{H}{}^{\frac{d}{2}+\alpha} \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d, "J_\alpha"'] & \tilde{H}_A \arrow[d, "\tilde{J}_\alpha"] \\
H_{(\alpha)} \arrow[r, "\tilde{i}_\alpha"] & H_A
\end{tikzcd}$$

quand H_A est la fermeture de $H_{(\alpha)}$ pour la norme $\|.\|_A$ définie par: $\|f\|_A^2 =< f, f >_A$. On vérifie que H_A est un E.N.R.

Dans le cas contraire où $\tilde{H}_A \subset \overset{\circ}{H}{}^{\frac{d}{2}+\alpha}$, nous rendons commutatif le diagramme,

$$\begin{tikzcd}
\overset{\circ}{H}{}^{\frac{d}{2}+\alpha} \arrow[d, "J_\alpha"'] & \tilde{H}_A \arrow[l, "i_\alpha"'] \arrow[d, "\tilde{J}_\alpha"] \\
H_{(\alpha)} & H_A \arrow[l, "\tilde{i}_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

ce qui nous fournira une E.N.R. H_A comme nous l'avons fait ci-dessus. Le second cas est celui où la fonction a devient infinie en des points isolés.

A l'espace H_A nous pouvons donc associer un processus gaussien centré X (noté X_A si besoin est) de covariance, le noyau de H_A.

2.2 Enoncé des résultats

Comme annoncé nous envisageons les deux situations suivantes.

Situation 1. Cas où l'opérateur est à coefficients mesurables. La fonction $l(x,\xi)$ est donnée par

L1

$$l(x,\xi) = a(x)|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha} + \tilde{l}(x,\xi)$$

L2 $\exists \beta > 0$, $0 \le \beta < \frac{d}{2} + \alpha$ et $C_1, C_2 > 0$ telles que si $\tilde{l} \neq 0$ alors :

$$- \quad C_1 \le \tilde{l}(x,\xi) \le C_2 \left[|\xi|^\beta + 1\right]$$

$$- \quad \xi \mapsto \tilde{l}(x,\xi) \; est \; C^\infty \; \forall x \in \mathbb{R}^d$$

L3 Il existe des constantes m_a et M_a telles que :

$$0 < m_a \leq a(x) \leq M_a < \infty \quad pour\ p.\forall x \in \mathbb{R}^d$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Théorème 1

Soit $l(x,\xi)$ un symbole de degré $\frac{d}{2}+\alpha$, $0<\alpha<1$, vérifiant les hypothèses **L1** à **L3**. Soit X le P.G.E associé à l'espace de noyaux reproduisants donné par l, nous avons:

- Loi du module uniforme

$$\overline{\lim_{|x-y|\downarrow 0}} \frac{|X(x)-X(y)|}{|x-y|^{\alpha}\sqrt{2log\frac{1}{|x-y|}}} = \frac{\sqrt{d}}{\underline{a}(E)} \quad \mathbb{P}p.s.\ , \tag{2.3}$$

avec $\underline{a}(E) = ess\ inf\{a(x), x \in E\}$.

- Loi du module local

Si y est un point de Lebesgue de la fonction $1/a$

$$\overline{\lim_{x\to y}} \frac{|X(x)-X(y)|}{|x-y|^{\alpha}\sqrt{2loglog\frac{1}{|x-y|}}} = \frac{1}{a(y)} \quad \mathbb{P}p.s.\ . \tag{2.4}$$

Situation 2. Cas où l'opérateur n'est plus uniformément elliptique. Sur la fonction $l(x,\xi)$ nous formulons les hypothèses suivantes

LC1

$$l(x,\xi) = a(x)|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}\ .$$

LC2 $a \in C^{\mu}(\mathbb{R}^d - \{0\})$ pour un $\mu>0$ de plus $\forall\varepsilon>0$ $\exists \underline{C}_\varepsilon$ *et* $\overline{C}_\varepsilon$ telles que:

$$0 < \underline{C}_\varepsilon \leq a(x) \leq \overline{C}_\varepsilon < \infty \quad \forall\ |x| > \varepsilon\ .$$

LC3 $\exists\beta \in \mathbb{R}$ et $q>0$ tels que

$$a(x) \simeq q|x|^{\beta} \quad au\ voisinage\ de\ 0\ . \tag{2.5}$$

Théorème 2. Soit $l(x,\xi)$ un symbole de degré $\frac{d}{2}+\alpha$,
$0<\alpha<1$ vérifiant les hypothèses **LC1**, **LC2** et **LC3**. Soit X le P.G.E associé à l'espace des noyaux reproduisants donné par l nous avons :

- Si $\alpha \neq \beta$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{(x,y)\in F_n} \frac{|X(x)-X(y)|}{|x-y|^{\alpha-\beta}\sqrt{2loglog\frac{1}{|x-y|}}} = \frac{1}{q} \quad \mathbb{P}p.s. . \tag{2.6}$$

- Si $\alpha = \beta$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{(x,y)\in F_n} \frac{|X(x)-X(y)|}{\sqrt{log\frac{1}{|x-y|}}\sqrt{2logloglog\frac{1}{|x-y|}}} = \frac{1}{q} \quad \mathbb{P}p.s.. , \tag{2.7}$$

$$avec \quad F_n = \left\{(x,y) \mid 2^{-n} \leq |x-y| \leq 2^{-n+1} \ , \ 2^{-n} \leq |x|,|y| \leq 2^{-n+1}\right\} .$$

Remarque: $\beta = 0$ est le cas traité dans $[BJR]$.

Le reste du papier est organisé de la façon suivante:

Dans la troisième partie nous établissons le modèle hiérarchique. Dans les deux suivantes nous établissons un modèle hiérarchique approché dans chacune des situations précédentes pour démontrer successivement les théorèmes 1 et 2.

III) Le modèle hiérarchique.

Nous commençons par motiver l'introduction du modèle hiérarchique en analysant succintement la méthode d'ondelettes mise au point dans $[BJR]$ pour l'étude des P.G.E. Ensuite nous présenterons le modèle hiérarchique en lui-même. Nous aurons donc ramené à la fin de cette section, la démonstration des théorèmes 1 et 2, à la construction d'un modèle hiérarchique approché dans chacune de ces deux situations.

3.1 le modèle hiérarchique approché pour les processus gaussiens uniformément elliptiques.

Soit $l(x,\xi)$ un symbole de degré $\frac{d}{2}+\alpha, 0<\alpha<1$ à coeficients höldériens vérifiant les hypothèses de <u>L1</u>, <u>L2</u> et <u>L3</u>. Soit H_A l'espace des noyaux reproduisant qui lui est associé. Désignons par X un PGE d'E.N.R. H_A. Rappelons que :$\exists\mu > 0$ et

$$l(x,\xi) = a(x)|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha} + \tilde{l}(x,\xi) \ ; \ a \in C^{\mu}(\mathbb{R}^d).$$

Notons L l'o.p.d de symbole $l(x,\xi)$ et A l'opérateur L^*L de H_A sur son dual H'_A. L'opérateur $A^{-1/2} : L^2(\mathbb{R}^d) \to H_A$ est alors bien défini et nous avons: $L \circ A^{-1/2} = I_d +$ *Régularisant*.

Maintenant donnons nous une b.o.n d'ondelettes de Lemarié-Meyer $(\psi_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ (cf. $[Me]$) de $L^2(\mathbb{R}^d)$ puis introduisons les fonctions $(g_\lambda; \lambda \in \Lambda)$,

$$g_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{ix.\xi}-1}{|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}} \bar{\hat{\psi}}_\lambda(\xi)d\xi, \tag{3.1}$$

et la constante C_α

$$C_\alpha^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1 - cos(u.\xi)}{|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}} \right) d\xi \qquad u \in S_{d-1} . \tag{3.2}$$

Introduisons aussi les ondelettes $(\phi_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ de H_A par

$$\phi_\lambda = A^{-1/2}(\psi_\lambda) \qquad \lambda \in \Lambda , \tag{3.3}$$

ainsi que le système de vaguelettes $(G_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ de H_A (cf $[BJR]$) par,

$$G_\lambda = \frac{g_\lambda}{a(\lambda)} \quad \lambda \in \Lambda ,$$

Dans $[BJR]$ nous avons prouvé le résultat.

lemme 3.1

Si $l(x, \xi)$ est un symbole comme ci-dessus alors:

(i) $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une base de Riesz de H_A

(ii) $\forall \varepsilon \ \exists K_\varepsilon < \infty$ telle que :

$$|\phi_{i,j}(x)| < \varepsilon \quad si \quad |2^j x - k| > K_\varepsilon$$

de plus

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\left(log \frac{1}{\varepsilon} \right)^p K_\varepsilon \right] = 0 \quad \forall p > 1$$

(iii) Soit $C^\varepsilon(x)$ la fonction définie par, N_ε étant donnée:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \max_{2^{-n} \leq |x-y| \leq 2^{-n+1}} \sum_{n-N_\varepsilon \leq j \leq n+N_\varepsilon} \sum_{k \in Z^d} \left(\frac{G_{jk}^\varepsilon(x) - G_{jk}^\varepsilon(y)}{|x-y|^\alpha} \right)^2 = (C^\varepsilon(x))^2,$$

la fonction $G_{jk}^\varepsilon(x)$ est définie par:

$$\begin{cases} G_{jk}^\varepsilon(x) = G_{jk}(x) \rho_{jk}^\varepsilon(x) & ; \quad \rho \equiv 1 \ sur \ |x| \leq 1 \quad \rho = 0 \ \ sur \ |x| > 2 \\ \rho_{jk}^\varepsilon(x) = \rho(2^j \frac{x}{K_\varepsilon} - k) & \qquad \rho \geq 0 \ et \ \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors si $C(x)$est la fonction définie par (1.7), on peut choisir N_ε de telle sorte que :

$$(C^\varepsilon(x))^2 \geq C^2(x) - \delta$$

avec $\delta \downarrow 0$ si $\varepsilon \downarrow 0$. □

Nous pouvons maintenant introduire le processus $(Y_n^\varepsilon(x); x \in \mathbb{R}^d)$ par

$$Y_n^\varepsilon(x) = \sum_{n-N_\varepsilon \le j \le n+N_\varepsilon} \sum_{k \in Z^d} G_{jk}^\varepsilon(x)\xi_{j,k} \tag{3.7}$$

avec $(\xi_{i,n}; j \in Z, k \in Z^d)$ une famille *iid.* de gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$.

l'intérêt du processus $Y_n^\varepsilon(x)$ est que si $|x-y| \simeq 2^{-n}$ alors:

$$\begin{cases} (i) & \left(\left(\frac{Y_n^\varepsilon(x)-Y_n^\varepsilon(y)}{|x-y|^\alpha}\right); x \in 2^{-j}K_\varepsilon Z^d\right) \textit{ sont indépendants} \\ (ii) & \textit{leur variance est à } \delta \textit{ près celle de } \cdot \left(\frac{X(x)-X(y)}{|x-y|^\alpha}\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

Ce qui permet de démontrer les lois du module uniforme et du module local de continuité pour X en se ramenant au cas *iid* bien connu.

Nous dirons alors que le processus Y^ε suivant:

$$Y_n^\varepsilon(x) = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z^d} G_{jk}^\varepsilon(x)\xi_{j,k} \tag{3.9}$$

est un modèle hiéarchique approché de X.

Nous allons maintenant étudier des processus tels que Y^ε.

3.2 Le modèle hiérarchique.

Si $\lambda = 2^{-j}k, j \in Z, k \in Z^d$, désignons par q_λ la cellule dyadique de centre $2^{-j}(k+1/2)$ $(k+1/2 = (k_i+1/2, i=1,d))$ de côtés parallèles aux axes et de longueur 2^{-j}, et par $|\lambda|$ l'entier j.

Soit $(Z(x); x \in \mathbb{R}^d)$, un processus gaussien centré d'espace reproduisant H_Z. Nous dirons que Z est un processus gaussien hiérarchique si son espace de noyaux reproduisants satisfait les conditions suivantes:

<u>**D1**</u> $\quad H_Z = \bigoplus_{j=1}^{\infty} H_{j,Z}$ $\quad$ pour une suite $H_{j,Z}$ de sous espaces fermés de H_Z.

D2 $\quad \exists \phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement croissante telle que $\phi(j) \ge j\ \forall j \ge 0$ et $\forall u \in H_{j,Z}$, la transformée de Fourier $\hat{u}$ de u vérifie:

$$supp\ \hat{u} \subset \{2^{\phi(j)} \le |\xi| \le 2^{\phi(j+1)}\} := C_j^\phi.$$

<u>**D3**</u> $\quad \exists g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement croissante telle que :

$$g(j) \to \infty \quad si \quad j \to \infty \quad , \quad \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{log(g(j))}{j} < \infty.$$

De plus $\forall \lambda \in \frac{1}{g(j)} Z^d$, $\exists \psi_\lambda \in H_{j,Z} \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec :

- $supp\ \psi_\lambda \subset q_\lambda$,
- $\{\psi_\lambda; \lambda \in \frac{1}{g(j)} Z^d\}$ *forme une b.o.n de* $H_{j,Z}$.

D4 $\exists \alpha \quad 0 < \alpha < 1$ telle que la fonction C_Z

$$\overline{\lim_{y \to x}} \mathbb{E} \left(\frac{Z(x) - Z(y)}{|x - y|^{\alpha}} \right)^2 = C_Z^2(x), \tag{3.10}$$

est bien définie. De plus si $B(y,r)$ est une boule

$$C_{n+}^2(y,r) = \max_{x \in B(y,r)} \sum_{\lambda \in \frac{1}{g(n)} Z^d} \left[\psi_\lambda \left(x + \frac{1}{g(n)}) \right) - \psi_\lambda(x) \right]^2 2^{2\alpha\phi(n+1)},$$

$$C_{n-}^2(y,r) = \min_{x \in B(y,r)} \sum_{\lambda \in \frac{1}{g(n)} Z^d} \left[\psi_\lambda \left(x + \frac{1}{g(n)}) \right) - \psi_\lambda(x) \right]^2 2^{2\alpha\phi(n+1)},$$

alors $\forall y \in \mathbb{R}^d$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \inf_{r > 0} C_{n+}(y,r) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \inf_{r > 0} C_{n-}(y,r) := \tilde{C}(y),$$

de plus $\tilde{C}(y) = C_Z(y)$ pp $\forall y \in \mathbb{R}^d$;

nous appellerons les points où cette égalité à lieu, "points de Lebesgue" de C_Z.

Voici le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 3.1

Soit $(Z(x); x \in \mathbb{R}^d)$ un processus gaussien centré. Supposons qu'il existe des fonctions g et ϕ tels que l'espace autoreproduisant H_Z de Z vérifie les hypothèses **D1** à **D4**. Alors si E est une boule:

- Loi du module uniforme

$$\overline{\lim_{|x-y| \downarrow 0 \,;\, x,y \in E}} \frac{|Z(x) - Z(y)|}{|x - y|^{\alpha} \sqrt{2 log \left[g \left[\phi^{-1} \left(log \frac{1}{|x - y|} \right) \right] \right]}} = \overline{C}_Z(E) \sqrt{d} \quad \mathbb{P}p.s. \tag{3.11}$$

avec

$$\overline{C}_Z(E) = ess.sup\{C_Z(x); x \in E\} .$$

- Loi du module local

Si y est un "point de Lebesgue" de la fonction C_Z, alors

$$\overline{\lim_{x \to y}} \frac{|Z(x) - Z(y)|}{|x - y|^{\alpha} \sqrt{2 log \left[\phi^{-1} \left(log \frac{1}{|x - y|} \right) \right]}} = \overline{C}_Z(y) \quad \mathbb{P}p.s . \tag{3.12}$$

Remarque 3.2. Si $g(j) = 2^j$ et $\phi(j) = j$, quand C_Z est une fonction de Hölder, le modèle hiérarchique est celui des processus gaussiens uniformément elliptiques traité dans $[BJR]$.

3.2. Démonstration du théorème 2.1

Soit $(Z(x); x \in \mathbb{R}^d)$ un processus gaussien hiérarchique. Soit alors $(\psi_\lambda, \lambda \in g(j)^{-1}Z^d, j \geq -1)$ la famille des fonctions fournie par D4 telle que:

$$Z(x) = \sum_{j \geq -1} \psi_\lambda(x)\xi_\lambda. \tag{3.13}$$

Commençons par établir la loi du module uniforme

3.2.1. Loi du module uniforme

Soient x et $y \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$2^{-\phi(j+1)} \leq |x-y| \leq 2^{-\phi(j)} \qquad j > 0. \tag{3.14}$$

Notons que (3.14) est équivalente à

$$j \leq \phi^{-1}\left(log\frac{1}{|x-y|}\right) \leq j+1, \tag{3.15}$$

si ϕ^{-1} désigne la fonction réciproque de ϕ.

Posons

$$Z_j(x) = \sum_{\lambda_k} \psi_{\lambda_k}(x)\xi_{\lambda_k} 1_{\left(\lambda_k \in \frac{1}{g(j)}Z^d\right)}. \tag{3.16}$$

Soit $E = (0,1)^d$ et soit

$$\Delta_{j,\phi} = \{(x,y) \in E^2 \quad | \quad 2^{-\phi(j+1)} \leq |x-y| \leq 2^{-\phi(j)}\}.$$

Lemme 3.2

$$\overline{\lim_{j \to \infty}} \max_{x,y \in \Delta_{j,\phi}} \frac{|Z_j(x) - Z_j(y)|}{|x-y|^\alpha \sqrt{2log\left[g\left[\phi^{-1}\left(log\frac{1}{|x-y|}\right)\right]\right]}} = \overline{C}_Z(E)\sqrt{d} \quad \mathbb{P}p.s. \tag{3.17}$$

Preuve

Notons que $(x,y) \in \Delta_{j,\phi}$ implique (3.15). Mais alors:

a) Nous avons $[g(j+1)]^d$ cellules dyadiques de génération j

b) si (x,y) *et* $(x',y') \in \Delta j, \phi$ et sont dans des cellules dyadiques de génération j disctinctes alors :

$$(Z_j(x) - Z_j(y)) \quad et \quad (Z_j(x') - Z_j(y'))$$

sont indépendants,

c) dans ce cas

$$\left(\frac{Z_j(\lambda+h)-Z_j(\lambda)}{|h|^\alpha}\right) \quad , \quad h\ vérifiant \quad (3.15),$$

forme une famille indépendante de $\mathcal{N}(0,\sigma(\lambda,h))$ dont les variances, d'après D4, satisfont

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{\lambda\in E}\left[\max_h \sigma(\lambda,h)\right] = \overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{\lambda\in E}\left[\min_h \sigma(\lambda,h)\right] = \overline{C}_Z.$$

d) d'après le point (C) et (3.18) il vient

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{\lambda\in E\cap\Lambda_j\ ;\ |h|\simeq 2^{-j}} \frac{|Z_j(\lambda+h)-Z_j(\lambda)|}{|h|^\alpha\sqrt{2log(g(j))}} = \sqrt(d)\overline{C}_Z \qquad \mathbb{P}p.s.\ .$$

car d'après le point a) il y a $(g(j)^d)$ variables indépendantes au niveau j □

Maintenant posons $\tilde{Z}_j(x) = Z(x) - Z_j(x)$

Lemme 3.3

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{x,y\in\Delta_{j,\phi}} \frac{|\tilde{Z}_j(x)-\tilde{Z}_j(y)|}{|x-y|^\alpha\sqrt{2log\left[g\left[\phi^{-1}\left[log\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right]\right]\right]}} = 0 \qquad \mathbb{P}p.s\ .$$

Preuve

Définissons $\eta^j(\lambda)$ par

$$\eta^j = \left(\frac{\tilde{Z}_j(\lambda+h)-\tilde{Z}_j(\lambda)}{\cdot\,|h|^\alpha}\right) \qquad \lambda\in\Lambda_j,$$

h vérifiant (3.15). Soit $(\tilde{\eta}^j(\lambda); \lambda\in\Lambda_j)$ une famille de gaussiennes indépendantes telle que

$$\tilde{\eta}^j(\lambda) \overset{(d)}{=} \eta^j(\lambda) \quad \forall\lambda\in\Lambda_j.$$

Grâce au lemme de Slépian nous avons:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{\lambda\in E\cap\Lambda_j} \frac{|\eta^j(x)|}{\sqrt{log\,(g(j))}} \leq \overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{\lambda\in E\cap\Lambda_j} \frac{|\tilde{\eta}^j(x)|}{\sqrt{log\,(g(j))}} = C \qquad \mathbb{P}p.s\ .$$

mais l'hypothèse D4 implique que $C = 0$ □

Les lemmes 3.2. et 3.3 permettent alors aisément de terminer la démonstration de la loi du module uniforme du théorème 3.1.

3.2.2 Loi du module local de continuité

Nous allons reprendre le schéma de démonstration précédent;

lemme 3.4

Soit $y \in \mathbb{R}^d$ un "point de Lebesgue" de la fonction $C_Z(y)$, nous avons:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{x,y\in\Delta_{j,\phi}} \frac{|Z_j(x)-Z_j(y)|}{|x-y|^\alpha\sqrt{2log(j)}} = C_Z(y) \qquad \mathbb{P}p.s.\,.$$

Preuve

Nous savons par **D1** que les variables aléatoires

$$\left(\frac{Z_j(y+2^{-\phi(j)})-Z_j(y)}{2^{-\alpha\phi(j)}} \quad ; \quad j\geq 0\right)$$

sont indépendantes.

Notons les $\eta^j(y)$ et leur variance $\sigma^j(y)$. Si y est "point de Lebesgue" de la fonction C_Z, l'hypothèse **D4** implique que:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, \sigma^j(y) = C_Z(y).$$

Nous avons alors

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{|\eta^j(y)|}{\sqrt{2log(j)}} = C_Z(y) \qquad \mathbb{P}p.s.\,,$$

car le nombre de v.a.r. indépendantes est j au niveau j.

lemme 3.5

$$\forall y\in\mathbb{R}^d, \quad \overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{(x,y)\in\Delta_{j,\phi}} \frac{|\tilde{Z}_j(x)-\tilde{Z}_j(y)|}{|x-y|^\alpha\sqrt{log(j)}} = 0 \qquad \mathbb{P}p.s..$$

Preuve

Elle est identique dans son principe à celle du lemme 3.4 □

Si y est un "point de Lebesgue " de la fonction C_Z, la démonstration de la loi du module local de continuité découle immédiatement des lemmes 3.4 et 3.5.

Nous pouvons maintenant envisager d'aborder l'objet principal de ce travail à savoir la démonstration des théorèmes 1 et 2.

IV Analyse des Processus Gaussiens Elliptiques de symboles à coefficients mesurables

Soit $(X(x); x\in\mathbb{R}^d)$ le P.G.E. de symbole $l(x,\xi) = a(x)|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha} + \tilde{l}(x,\xi)$ Nous supposons que $l(x,\xi)$ satisfait les hypothèses **L1**, **L2**, **L3** ci-dessus. Soit H_A l'E.N.R. de X déjà défini.

La démonstration du théorème 1 consistera à construire un modèle hiérarchique approché de X puisqu'alors le théorème 3.1 nous permettra de conclure. Pour cela nous allons analyser avec soin l'espace de noyaux H_A.

4.1 Etude de l'espace de Noyaux reproduisants.

Nous allons construire une base d' "Ondelettes" de H_A analogue de la base des $(g_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ de l'espace $H(\alpha)$ donnée en (3.1).

Rappelons que $0 < a_1 \leq a(x) \leq a_2 < \infty$ *p.p.* $x \in \mathbb{R}^d$. Il est alors facile de prouver le lemme suivant.

lemme 4.1.

Il existe un difféomorphisme H de $\mathbb{R}^d$ vérifiant

(i) $a_1^{\frac{2}{d}}|x| \leq |H(x)| \leq a_1^{\frac{1}{d}}|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$

(ii) si $J_H(x)$ est le jacobien de H:

$$J_H(x) = a^2(x) \quad p.p. \forall x \in \mathbb{R}^d \qquad \square$$

Soit alors H un tel difféomorphisme. définissons la famille $(G_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ par : si $\tilde{\psi}_\lambda(x) = (\psi_\lambda \circ H)(x)$; $\lambda \in \Lambda$ alors

$$G_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{ix.\xi} - 1}{|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}} \overline{\hat{\tilde{\psi}}}_\lambda(\xi) d\xi \quad , \quad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{4.1}$$

Lemme 4.2.

(i) Si $l(x,\xi) = a(x)|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}$ la famille $(G_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ est une base orthonormée de l'espace H_A

(ii) si $\tilde{l} \not\equiv 0$, la famille $(G_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ est une base de Riesz de l'espace H_A

Preuve

(i) si $\tilde{l} \equiv 0$ par changement de variable ($y = H(x)$), nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\lambda(y)\psi_\mu(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} a^2(x)\psi_\lambda(H(x))\psi_\mu(H(x))dx =< G_\lambda, G_\lambda >_{H_A} = \delta_{\lambda,\mu} \ \forall \lambda, \mu \in \Lambda$$

(ii) si $\tilde{l} \not\equiv 0$ il vient:

$$\begin{aligned}(LG_\lambda, LG_\lambda)_{L^2} = & \int a^2(x)\tilde{\psi}_\lambda(x)\tilde{\psi}_\mu(x) + \int a(x)\tilde{\psi}_\lambda(x)\tilde{L}(G_\mu) + \\ & \int a(x)\tilde{\psi}_\mu(x)\tilde{L}(G_\lambda) + \int \tilde{L}(G_\lambda)\tilde{L}(G_\mu) \\ = & \delta_{\lambda,\mu} + R_{\lambda,\mu}\end{aligned}$$

Comme nous avons posé

$$\tilde{L}(G_\lambda) = \int \frac{e^{ix.\xi} - 1}{\tilde{l}(x,\xi)} \overline{\hat{\tilde{\psi}}}_\lambda(\xi) d\xi,$$

la matrice R appartenant à l'algèbre $\mathcal{M}(\gamma, \frac{d}{2}+\beta)$ grâce à l'hypothèse L2 (cf $[BJR]$), mais alors le fait que $(G_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ soit une base de Riesz devient évident. □

Etudions maintenant la variance de X.

lemme 4.3. : Si y est un point de lebesgue de la fonction $1/a^2$, il vient

$$\overline{\lim_{x\to y}}\, \mathbb{E}\left[\left(\frac{X(x)-X(y)}{|x-y|^\alpha}\right)^2\right] = \frac{1}{a^2(y)}. \tag{4.2.}$$

Preuve

Grâce au lemme 4.2. point (ii), nous pouvons supposer que $\tilde{l} \equiv 0$, car ce terme n'intervient pas dans la limite de (4.2.). Dans ce cas , grâce au lemme (4.2.2) point (i) nous avons après avoir utilisé le théorème de Mercer pour écrire X sur la base des (G_λ)

$$\mathbb{E}\left(\frac{|X(x)-X(y)|}{|x-y|^\alpha}\right)^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\frac{G_\lambda(x)-G_\lambda(y)}{|x-y|^\alpha}\right)^2. \tag{4.3.}$$

Si C_α est donné par (3.2.), comme

$$\xi \mapsto \frac{(e^{ix.\xi}-e^{iy\xi})}{|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}}$$

a pour transformée de Fourier inverse (au sens des distributions)

$$\frac{1}{C_\alpha}\left[\frac{1}{|x-z|^{\frac{d}{2}-\alpha}} - \frac{1}{|y-z|^{\frac{d}{2}-\alpha}}\right],$$

L'expression (4.1) peut s'écrire

$$\frac{1}{C_\alpha^2|x-y|^{2\alpha}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{a^2(z)}\left[\frac{1}{|x-z|^{\frac{d}{2}-\alpha}} - \frac{1}{|y-z|^{\frac{d}{2}-\alpha}}\right]^2 dz$$

puisque $(a(x)\tilde{\psi}(x)_{\lambda;\lambda\in\Lambda})$ est une b.o.n. de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Puis en effectuant les changements de variables successifs $\eta' = (z-y)$, $\eta" = |x-y|z$, il vient

$$\mathbb{E}\left(\frac{|X(x)-X(y)|}{|x-y|^\alpha}\right)^2 = \frac{1}{C_\alpha^2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{a^2(y+z)}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\frac{z}{h}|^{\frac{d}{2}-\alpha}} - \frac{1}{|\frac{z}{h}|^{\frac{d}{2}-\alpha}}\right]^2\frac{dz}{h^{2\alpha+d}}$$

avec $\vec{x} = \frac{(x-y)}{h}$, $h = |x-y|$. En faisant tendre h vers zéro nous obtenons le résultat annoncé □

Reprenons maintenant les notations du lemme 3.1. Définissons alors $G^e_{j,k}$ comme en (3.5).

Posons

$$Y^e(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} G^e_{j,k}(x)\xi_{jk}$$

avec $(\xi_{jk}; j \geq -1, k \in Z^d)$ une famille *i.i.d* de gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$

Proposition 4.4.

le processus Y^e défini en (4.4.) est un processus hiérarchique approché de X pour lequel $\phi(u) = u$, $g(v) = 2^v$, u *et* $v \geq 0$

Preuve

C'est une conséquence directe des lemmes 4.2, 4.3 et 3.1. □

La démonstration du théorème 4.1. découle directement de la proposition 4.4. et en remarquant que les "points de Lebesgue" de la fonction C_X sont les points de Lebesgue de la fonction $\frac{1}{a^2}$.

V Cas où le symbole présente des singularités.

5.1 Soit $(X(x), x \in \mathbb{R}^d)$ un processus gaussien uniformément elliptique dont le symbole qui lui est associé $l(x,\xi) = a(x)|\xi|^{\frac{d}{2}+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ vérifie les conditions <u>**LC1**</u>, <u>**LC2**</u> et <u>**LC3**</u>. Soit H_A l'E.N.R de X défini au paragraphe 2.

Rappelons que $a(x) \simeq q|x|^\beta$, $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, au voisinage de zéro. Il est facile de prouver le résultat suivant.

Lemme 5.1

Il existe un difféomorphisme H de $\mathbb{R}^d - \{0\}$ dans $\mathbb{R}^d - \{0\}$ tel que

$\exists\ C_1, C_2,\quad 0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ telles que

(i) $\quad C_1 2^{j2\beta/d}|x| \leq |H(x)| \leq C_2 2^{j2\beta/d}|x|$ si $2^{-j-1} \leq |x| \leq 2^j$

(ii) $\quad JH(x) = a^2(x)$. □

Comme dans le paragraphe 4, posons

$$\theta_\lambda = \psi_\lambda \circ H \qquad \lambda \in \Lambda\ , \tag{5.1}$$

puis $C_\alpha$étant donnée par (3.2)

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{C_\alpha}\int \frac{e^{ix.\xi} - 1}{|\xi|^{\frac{d}{2}+\beta}}\bar{\hat{\theta}}_\lambda(\xi)d\xi \tag{5.2}$$

Lemme 5.2.

La famille $(G_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ de (5.2.) est un b.o.n. de H_A.

Preuve

Identique à celle du point (i) du lemme (4.2.). □

Maintenant nous devons étudier la variance des accroissements de X.

Lemme 5.3

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-2\beta n} \max_{2^{-n}\leq x\leq 2^{-n+1}} \mathbb{E}\left[\frac{|X(x)-X(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\right]^2 = \frac{1}{q^2} \tag{5.3.}$$

Preuve

Par la preuve du lemme 4.3., comme a est continue, nous savons déjà que :

$$\max_{2^{-n}\leq x\leq 2^{-n+1}} \mathbb{E}\left[\frac{|X(x)-X(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\right]^2 \simeq \frac{1}{a^2(y)} \qquad si\ y\in\left[2^{-n},2^{-n+1}\right]$$

D'après l'hypothèse LC3 $a(y)^2 \simeq q^2 2^{-2\beta n}$ si $y\in\left[2^{-n},2^{-n+1}\right]$, il en découle (5.3). □

Définissons encore $G^{\epsilon}_{j,k}$ comme en 3.5. posons alors,

$$Y^{\epsilon}(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} G^{\epsilon}_{j,k}(x)\xi_{j,k} \quad avec \quad (\xi_{j,k}) \quad iid \quad \mathcal{N}(0,1) \tag{5.4}$$

Proposition 5.5.

Supposons $\beta \neq \alpha$. Alors nous avons l'égalité (2.4.) du Théorème 2.

Preuve

Elle découle immédiatement de la proposition 5.4. et du théorème 3.1. □

Proposition 5.6.

Supposons $\alpha = \beta$. Alors nous avons l'égalité (2.7.) du théorème 2.

Preuve

Ici il faut adapter le modèle hiérarchique . Nous allons pour cela établir quelques faits.

Fait 1

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\mathbb{E}\left(X(x)^2\right)}{log(1/x)} = \frac{1}{q^2}$$

L'argument utilisé lors de la démonstration du lemme 4.3,s'adapte et donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X(x)|^2 &= \sum_{\lambda}\left(\int \frac{e^{ix.\xi}-1}{|\xi|^{\frac{d}{2}+\beta}}\bar{\hat{\theta}}_{\lambda}\right)^2 = \sum_{\lambda}\left[\frac{1}{C_\alpha}\int\left(\frac{1}{|x-y|^{\frac{d}{2}-\alpha}}-\frac{1}{|\eta|^{\frac{d}{2}-\alpha}}\right)\theta_\lambda\right]^2 \\ &\simeq \int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{q^2|\eta|^{2\beta}}\left[\frac{1}{|x-\eta|^{\frac{d}{2}-\alpha}}-\frac{1}{|\eta|^{\frac{d}{2}-\alpha}}\right]^2 d\eta \qquad si\ |x|\simeq 2^{-n} \\ &\simeq \frac{1}{q^2}|log(x)|\end{aligned}$$