ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

LIMING WU

Quelques problèmes associés au processus de Donsker-Varadhan

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 1 (1996), p. 189-210

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_189_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.189-210

QUELQUES PROBLÈMES ASSOCIÉS AU PROCESSUS DE DONSKER-VARADHAN

WU Liming

à la mémoire d' Albert Badrikian

Resumé : *Pour un processus de Markov d'espace d'états E et une probabilité fixée* ν *sur E , on définit le processus de Donsker-Varadhan comme celui qui réalise le minimum de l'entropie du niveau-3 de Donsker-Varadhan ayant la marginale* ν. *On étudie l'ergodicité, la dependance en* ν *et la construction de ce processus. En particulier on étend les travaux de Meyer-Zheng et de Takeda sur la construction du processus de Nelson réversible au cas de sauts.*

Mots clés : entropie et processus de Donsker-Varadhan, τ-topologie, forme de Dirichlet
1991 AMS Subject Classification: 60F10, 60J60.

La motivation vient de mon ami Albert Badrikian, qui proposait d'étudier la mécanique de Nelson, les travaux récents de Zambrini [Z1, 1986; Z2, 1987] sur la mécanique quantique euclidienne, et ceux de Nagasawa [Na, 1993] sur le processus de Schrödinger. J'ai été amené ainsi dans ce domaine, en essayant de comprendre ces objets par des approches entropiques dans les grande déviations.

§0. Introduction

Le role de l'entropie dans la mécanique statistique est bien connu ([Ru]), mais peut-être moins pour la mécanique quantique. A l'origine des travaux de Föllmer [F, 1986] et de Dawson & Gärtner [DG, 1987], Cattiaux & Léonard [CL, 1994] démontrent l'existence de la diffusion de Nelson en résolvant un problème variationel d'entropie associé. Comparée avec la première démonstration de Carlen [C, 1984] et celle de Zheng [Zh. 1985], leur approche exhibe plus d'informations physiques et semble donc plus naturelle. Les travaux de Nagasawa développent aussi cette approche entropique.

D'autre part, à la suite des travaux de pionniers de Donsker & Varadhan [DV, I-IV, 1975, 1976, 1983] sur les grandes déviations de processus de Markov (voir [DS]), Takeda [T, 1990], Roelly et Zessin [RZ, 1991] et l'auteur [W3, 1993] trouvent naturellement par l'approche d'entropie le processus réversible de Nelson, construit pour la prémière fois par Meyer et Zheng [MZ, 1984] dans le cas du mouvement brownien. Ce papier suit surtout cette direction.

Expliquons brièvement les travaux de Meyer-Zheng [MZ]. Soit $0\le \phi\in H^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\langle\phi,\phi\rangle_{dx} = 1$. On considère l'é.d.s. dans $\mathbb{R}^d$,

$$(0.1)\qquad dX_t = dW_t + \nabla\phi/\phi\,(X_t)\,dt\,,$$

où (W_t) est le MB standard dans $\mathbb{R}^d$. C'est la diffusion symétrique de Nelson associée à la fonction d'onde ϕ. Fixons une version quasi-continue $\tilde\phi$ de ϕ (par rapport au MB). Une solution faible de loi initiale $\nu=\phi^2dx$ de (0.1) sera donnée par la formule de Girsanov, ($\mathbb{P}_\nu$ ci-dessous est la loi du MB de loi initiale ν)

$$(0.2)\qquad \mathbb{Q}^\nu|_{\mathcal{F}_t} = 1_{[t<\sigma]}\,exp\left(\int_0^t \frac{\nabla\phi}{\tilde\phi}(X_s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{|\nabla\phi|^2}{\tilde\phi^2}(X_s)\,ds\right)d\mathbb{P}_\nu$$

$$:= M_t\,d\mathbb{P}_\nu\,,$$

(où $\sigma = \inf\{t\ge 0 : \tilde\phi(X_t) = 0\}$ est le temps d'atteinte de $[\tilde\phi=0]$), à condition que l'on puisse vérifier que

(M_t) étant une martingale locale sur $[0,\sigma)$, est une vraie martingale.

Pour ceci, on est ramené à montrer

(i) l'intégrabilité uniforme de $(M_t)_{t\le 1}$; (ii) $\mathbb{Q}^\nu(\sigma=+\infty) = 1$.

Meyer et Zheng [MZ] résolvent ces deux points difficiles très ingénieusement, et leurs idées et techniques sont dévéloppées dans la théorie des formes de Dirichlet dans [T] et [FOT] etc. On va voir maintenant le lien avec la théorie de grande déviations de Donsker-Varadhan [DV]. Pour $\phi\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ et $\phi>0$, la formule d'Itô permet de réecrire (0.2) comme.

$$(0.3)\qquad \mathbb{Q}^\nu|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\phi(X_t)}{\phi(X_0)}\,exp\left(\int_0^t -\frac{\Delta\phi}{2\phi}(X_s)\,ds\right)\,d\mathbb{P}_\nu$$

qui est exactement d'après [DV], [DS] la solution du problème variationel

$$(0.4)\qquad inf\{H(Q) \mid Q(X_0\in\bullet) = \nu\} = H(\mathbb{Q}^\nu) = J(\nu),$$

où J et H sont respectivement les entropies de niveau-2 et -3 de Donsker-Varadhan.

Comme les entropies de Donsker-Varadhan sont bien définies pour tous les processus de Markov et qu'elles ont des significations physiques importantes, ce point de vue nous ramène à étudier (0.4) dans le cadre général où le MB est remplacé par un processus de Markov quelconque.

Précisons l'organisation de cet article: Dans le §1, en résolvant (0.4), nous introduisons le processus de Donsker-Varadhan $\mathbb{Q}^{\nu}$ associé à une loi marginale ν et, présentons les problèmes étudiés dans cette note. On étudie la dependance de $\mathbb{Q}^{\nu}$ par rapport à ν au §2, et on lie l'ergodicité de $\mathbb{Q}^{\nu}$ avec la convexité stricte de l'entropie de Donsker-Varadhan J en ν au §3. Dans le cas du temps discret, nous présentons la construction de $\mathbb{Q}^{\nu}$ en suivant les travaux fondamentaux de Csiszär ([Cs, 1975]) et Donsker-Varadhan ([DV, 1976]), et nous en déduisons un critère d'ergodicité de $\mathbb{Q}^{\nu}$, qui est le résultat principal du §4. Dans le §5, la partie centrale de ce papier, on traite le cas où le processus de base indexé par $\mathbb{R}^+$ est réversible. On donne la construction de $\mathbb{Q}^{\nu}$ dans le Théorème 5.1. en généralisant le résultat de Meyer et Zheng [MZ] et celui de Takeda [T] (l'hypothèse de la compacité locale d'espace d'états et la continuité du processus dans [T] est enlevée). Comme conséquence, on arrive à donner un critère de l'ergodicité de $\mathbb{Q}^{\nu}$.

§1. Processus de Donsker-Varadhan et problèmes

§1.1. Notations. Considère un processus de Markov canonique à valeurs dans un espace polonais E avec sa tribu borélienne $\mathcal{B}$: $\mathcal{X} = \big(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathcal{F}, (X_t(\omega):=\omega(t))_{t\in\mathbb{T}}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}\big)$. Ici $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ *si* $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ (temps discret) et $\Omega = \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,E)$ (l'espace des applications *càdlàg* de $\mathbb{R}^+$ dans E) si $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ (temps continu); $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle borélienne de Ω; $\mathcal{F} = \bigvee_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_t$ est la tribu borélienne de Ω; et $\mathbb{P}_x$ est la loi du processus issu de $x\in E$.

Ses mesures empiriques de niveau-2 (ou marginales) sont

$$\textbf{(1.1a)}\qquad L_t(\omega) := \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1}\delta_{\omega(k)} \quad si\ \mathbb{T}=\mathbb{N}\ et\ 0<t\in\mathbb{N}\quad ou := \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\omega(s)}ds \quad si\ 0<t\in\mathbb{R}^+,$$

et celles de niveau-3 sont

$$\textbf{(1.1b)}\qquad R_t(\omega) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\theta_k\omega} \quad si\ \mathbb{T}=\mathbb{N}\ et\ 0<t\in\mathbb{N}\ ou := \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\theta_s\omega}ds \quad si\ 0<t\in\mathbb{T}=\mathbb{R}^+,$$

où $(\theta_t\omega)(s) = \omega(s+t)$ pour tous $s,t\in\mathbb{T}$. Elles sont respectivement des éléments aléatoires dans $M_1(E)$ et $M_1(\Omega)$ (l'espace des probabilités sur E ou sur Ω). $M_1(E)$ *(resp.* $M_1(\Omega)$*)* est muni de deux topologies: la topologie de convergence étroite $\sigma(M_1(E), C_b(E))$ *(resp.* $\sigma(M_1(\Omega), C_b(\Omega))$*)* désignée par $\xrightarrow{w}$, et la τ-topologie $\sigma\big(M_1(E), b\mathcal{B}\big)$ désignée par τ *(resp.* la τ-topologie de limite projective $\sigma\big(M_1(\Omega), \bigcup_{t\in\mathbb{T}} b\mathcal{F}_t\big)$, désignée par τ_p). Ici $C_b(\bullet)$ (resp. $b\mathcal{G}$) désigne l'espace des fonctions réelles bornées et continues (resp. $\mathcal{G}$-mesurable).

L'entropie J*:* $M_1(E)\to[0,+\infty]$ *de Donsker-Varadhan de niveau-2 est*

$$(1.2a)\qquad J(\nu) = \sup_{u\in\mathcal{U}} \int \log \frac{\phi}{P\phi}\, d\nu\ ,\quad \forall\ \nu\in M_1(E),\quad si\ \mathbb{T}=\mathbb{N}.$$

$$= \sup_{u\in\mathcal{U}^c} \int -\frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}\, d\beta\ ,\quad \forall\ \beta\in M_1(E),\quad si\ \mathbb{T}=\mathbb{R}^+,$$

où $\mathcal{U}:=\{\phi\in b\mathcal{B};\ \exists\varepsilon>0\ t.q.\ \phi\geq\varepsilon\}$, $P=P_1$, $\mathcal{L}$ est le générateur de $(P_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, et $\mathcal{U}^c$ est l'intersection de $\mathcal{U}$ avec le domaine de $\mathcal{L}$ dans $b\mathcal{B}$.

L'entropie $H: M_1(\Omega)\to[0,+\infty]$ de Donsker-Varadhan de niveau-3 est

$$(1.2b)\qquad H(Q) = \begin{cases} \mathbb{E}^{\overline{Q}} h_{\mathcal{F}_0}(\overline{Q}_{\omega-}\,|\,\mathbb{P}_{\omega(0)}) & si\ \ Q\in M_1^s(\Omega) \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

où $M_1^s(\Omega)=\{Q\in M_1(\Omega);\ Q\ est\ stationaire\}$; $\overline{Q}$ est l'unique extension stationaire de $Q\in M_1^s(\Omega)$ à $\overline{\Omega}$ qui est $E^{\mathbb{Z}}$ *ou* $\mathbb{D}(\mathbb{R},E)$ suivant $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^+$; $\mathcal{F}_t^s=\sigma\{\omega(u);\ s\leq u\leq t\}$ et $\{\overline{Q}_{\omega-}\}$ est la famille des lois conditionnelles régulières de $\overline{Q}$ sachant $\omega-\ =\omega(-\infty,0]$ (i.e., $\mathcal{F}_0^{-\infty}$); $h_{\mathcal{G}}(.,.)$ est l'entropie de Kullback usuelle sur la σ-tribu $\mathcal{G}$.

Il est bien connu ([DV]) que *pour tout* $\nu\in M_1(E)$,

$$(1.3)\qquad J(\nu) = \inf\{H(Q)\,|\ Q\in\mathcal{S}^{\nu}\}\ .$$

où $\mathcal{S}^{\nu}=\{Q;\ Q\in M_1^s(\Omega)\ et\ Q_0:=Q(\omega\ :\ \omega(0)\in\bullet) = \nu\}$.

Si α est une mesure nonnegative σ-finie sur $(E,\mathcal{B})$, invariante et ergodique (i.e., si $f\in b\mathcal{B}$ vérifie $P_tf=f$, α-p.p. pour tout $t\in\mathbb{T}$, alors f = constante α-p.p.), on pose

$$(1.2c)\qquad J_\alpha(\nu) = J(\nu)\ \ si\ \nu\ll\alpha\ et\ +\infty\ sinon\ ;$$

$$(1.2d)\qquad H_\alpha(\nu) = H(Q)\ \ si\ Q_0:=Q(\omega(0)\in\bullet)\ll\alpha\ et\ +\infty\ sinon\ :$$

§1.2. Nous commençons par le

Théorème 1.1. *Supposons que $J(\nu)<+\infty$. Il existe une et une seule mesure $\mathbb{Q}^{\nu}\in\mathcal{S}^{\nu}$ qui résoud le problème variationnelle (1.3), i.e., $H(\mathbb{Q}^{\nu}) = J(\nu)$. De plus $\mathbb{Q}^{\nu}$ est markovienne.*

Sa preuve est donnée dans le §1.3. Ce résultat nous permet d'introduire la

Définition 1.2. *Pour $\nu\in M_1(E)$ vérifiant $J(\nu)<+\infty$, on appelle le processus de Markov $\mathbb{Q}^{\nu}$ donné dans le Théorème 1.1.,* **processus de Donsker-Varadhan.**

Remarque 1.3. Pour voir la signification du processus de Donsker-Varadhan, rappelons la conséquence suivante du principe de grandes déviations,

Théorème A. *Soient* $\nu\in M_1(E)$ *vérifiant* $J(\nu)<+\infty$ *et* $\beta\in M_1(E)$ *une mesure initiale. Supposons*

(H1) $x\longrightarrow\mathbb{P}_x$ *est continu de E dans* $\left(M_1(\Omega),\ \xrightarrow{w}\right)$. *(Propriété de Feller)*

Si $\mathbb{P}_\beta\left(R_t\in\bullet\right)$ *satisfait le principe de grande déviation sur* $\left(M_1(\Omega),\ \xrightarrow{w}\right)$ *avec la fonction de vitesse H, alors lorsque* $t\longrightarrow+\infty$ *d'abord et le voisinage N de* ν *dans* $\left(M_1(E),\ \xrightarrow{w}\right)$ *tend vers* $\{\nu\}$ *ensuite,* $\mathbb{P}_\beta\left(R_t\in\bullet\,|\,L_t\in N\right)$ *satisfait le principe de grande déviation sur* $\left(M_1(\Omega),\ \xrightarrow{w}\right)$ *avec la fonction de vitesse donnée par*

$$(1.4)\qquad H^\nu(Q)=\begin{cases} H(Q)-J(\nu) & si\ Q\in\mathcal{S}^\nu \\ +\infty & sinon \end{cases}.$$

Autrement dit,

(i) H^ν *est inf-compacte sur* $\left(M_1(\Omega),\ \xrightarrow{w}\right)$, *i.e.,* $\forall L\geq 0$, $\left[H^\nu\leq L\right]$ *est compact.*

(ii) Pour tout ouvert G dans $\left(M_1(\Omega),\ \xrightarrow{w}\right)$,

$$\liminf_{N\longrightarrow\{\nu\}}\ \liminf_{t\longrightarrow+\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_\beta\left(R_t\in G\,|\,L_t\in G\right)\geq-\inf_G H^\nu .$$

(iii) Pour tout fermé F dans $\left(M_1(\Omega),\ \xrightarrow{w}\right)$,

$$\limsup_{N\longrightarrow\{\nu\}}\ \limsup_{t\longrightarrow+\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_\beta\left(R_t\in G\,|\,L_t\in F\right)\leq-\inf_F H^\nu .$$

E*n particulier, pour tout voisinage G de* $\mathbb{Q}^\nu$,

$$(1.5)\qquad \limsup_{N\longrightarrow\{\nu\}}\ \limsup_{t\longrightarrow+\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_\beta\left(R_t\notin G\,|\,L_t\in N\right)<0 .$$

Nous ne donnons pas la preuve, qui est fondée sur une variante du principe de Laplace donnée par Ellis [E, II.7.2] en suivant l'approche canonique, voir e.g. Roelly et Zessin [RZ]. La formule (1.5) nous dit que : en temps grand, si l'observation de la loi marginale par L_t *est proche de* ν, alors la loi du processus observé par R_t *approchera* $\mathbb{Q}^\nu$ *avec une vitesse exponentielle.*

Nous allons étudier les trois problèmes suivants dans ce papier,

Problème I. Comment construire $\mathbb{Q}^\nu$ pour ν donnée ?

Problème II. Est-ce que $\mathbb{Q}^\nu$ est ergodique (i.e. un état équilibre pûr) ?

Problème III. Quelle est la dependence de $\mathbb{Q}^\nu$ en ν, lorsque ν varie ?

§1.3. Démonstration du Théorème 1.1.

Dans le cas du temps discret, ce théorème a été établi dans [DV] en utilisant la projection de Csiszär [Cs]. Nous allons donc travailler seulement dans le cas du temps continu. L'idée est de discuter un autre problème variationel du type Csiszär.

(1.6) $$a = \inf\{h_{\mathcal{F}_1^0}(Q;\ \mathbb{P}_\nu)\ \mid\ Q\in \mathcal{M}^\nu\}$$

où $\mathcal{M}^\nu = \{Q\in M_1(\Omega_1=\mathbb{D}([0,1],E))\ \mid\ Q_t:=Q(\omega(t)\in\bullet) = \nu \textit{ pour tout } t\in[0,1]\}$ et de montrer qu'elle admet la même solution que (1.3).

Etape 1. Pour tout $Q\in\mathcal{S}^\nu\subseteq\mathcal{M}^\nu$, on a d'après (1.2b),

(1.7a) $$H(Q) = h_{\mathcal{F}_1^{-\infty}}(\overline{Q} : \overline{Q}\otimes_0\mathbb{P}_\bullet) \geq h_{\mathcal{F}_1^0}(\overline{Q} ; \overline{Q}\otimes_0\mathbb{P}_\bullet) = h_{\mathcal{F}_1^0}(Q : \mathbb{P}_\nu)\ .$$

et l'égalité a lieu si et seulement si

(1.7b) $$\overline{Q}_{\omega-} := \overline{Q}(\bullet\,|\,\mathcal{F}_0^{-\infty}) = \overline{Q}(\bullet\,|\,\mathcal{F}_0^0) := Q_{\omega(0)}\ ,\ \overline{Q}\text{-p.s.},$$

où $\overline{Q}\otimes_0\mathbb{P}_\bullet(d\omega-,\ d\omega+) := \overline{Q}(d\omega-)\ \mathbb{P}_{\omega(0)}(d\omega+)\in M_1(\Omega)$ (pour $\omega\in\Omega$, $\omega+=\omega_{[0,+\infty)}$).

Par suite on obtient : $a \leq J(\nu) < +\infty$.

Etape 2. Par Csiszär [Cs], il existe une et une seule mesure $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^\nu$ telle que

$$h_{\mathcal{F}_1^0}(\mathbb{Q};\ \mathbb{P}_\nu) = a\ .$$

Nagazawa [N, Th.5.4., p132] montre que $\mathbb{Q}$ est Markovien, et sa preuve donne aussi la stationarité de $\mathbb{Q}$ dans notre cas particulier (laissée au lecteur). La mesure markovienne et stationaire $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_1^0$ admet donc une extension stationaire et markovienne unique $\mathbb{Q}^\nu$ sur Ω. On obtient par (1.7a,b)

(1.8) $$a \leq J(\nu) \leq H(\mathbb{Q}^\nu) = h_{\mathcal{F}_1^0}(\mathbb{Q};\ \mathbb{P}_\nu) = a\ .$$

Autrement dit $\mathbb{Q}^\nu$ est une solution du problème variationnel (1.3).

Etape 3. Soit $Q\in\mathcal{S}^\nu$ une solution quelconque de (1.3), i.e., $H(Q) = J(\nu)$. On a

$$a \overset{(1.8)}{=\!=\!=} J(\nu) = H(Q) \geq h_{\mathcal{F}_1^0}(Q;\ \mathbb{P}_\nu) \geq a\ ,$$

qui devient donc une égalité. Donc $Q_{[0,1]}$ est une solution de (1.6), et d'après (1.7a,b), Q est Markovien. Donc $Q_{[0,1]} = \mathbb{Q}$ par Etape 2. Par suite $Q=\mathbb{Q}^\nu$, le résultat désiré. ▌

§2. La dependance de $\mathbb{Q}^{\nu}$ en ν

Le résultat suivant répond au Problème III. La partie (a) suivante a été obtenue par Takeda [T, 1990] dans le cas où $\mathbb{T}=\mathbb{R}^{+}$ et le processus de base est réversible et continu.

Proposition 2.1. *Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur E satisfaisant*

$$(2.1) \qquad J(\nu_n) \longrightarrow J(\nu) < +\infty .$$

(a) Sous (H1), si $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$, alors $\mathbb{Q}^{\nu_n} \xrightarrow{w} \mathbb{Q}^{\nu}$.

(b) Si $\nu_n \xrightarrow{\tau} \nu$, alors $\mathbb{Q}^{\nu_n} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\nu}$ pour la topologie τ_p.

Nous commençons par le

Lemme 2.2. *Soit $\mathbb{A}\subseteq M_1^s(\Omega)$ vérifiant*

$$(2.2) \qquad sup\{H(Q) \mid Q\in\mathbb{A}\} < +\infty .$$

(a) Si $\mathbb{A}_0:=\{Q_0 \mid Q\in\mathbb{A}\}$ est relativement compact dans $(M_1(E), \xrightarrow{w})$, alors $\mathbb{A}$ est relativement compact dans $(M_1(\Omega), \xrightarrow{w})$ sous (H1).

(b) Si $\mathbb{A}_0$ est relativement compact dans $(M_1(E), \tau)$ et s'il existe $\alpha\in M_1(E)$ tel que $\nu \ll \alpha$ pour tout $\nu\in A_0$, $\mathbb{A}$ est relativement compact dans $(M_1(\Omega), \tau_p)$.

Preuve: On a pour tout $0<T\in\mathbb{T}$,

$$H(Q) = (1/T)\, h_{\mathcal{F}_T^{-\infty}}(\overline{Q};\, \mathbb{P}_\nu) \geq (1/T)\, h_{\mathcal{F}_T^{0}}(Q;\, \mathbb{P}_\nu);$$

où $\nu=Q_0$. On obtient pour tous $Q\in\mathbb{A}$, $D\in\mathcal{F}_T^0$ et M>1, en notant $f_Q = \frac{dQ}{d\mathbb{P}_\nu}|\mathcal{F}_T^0$.

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} Q(D) &= \int_D f_Q \, d\mathbb{P}_\nu \\ &\leq M\, \mathbb{P}_\nu(D) + (1/logM) \int_\Omega f_Q \, log^+ f_Q \, d\mathbb{P}_\nu \\ &\leq M\, \mathbb{P}_\nu(D) + (1/logM)[1/e + h_{\mathcal{F}_T^0}(Q;\, \mathbb{P}_\nu)] \qquad (\, xlogx \geq -1/e) \end{aligned}$$

$$\leq M\ \mathbb{P}_\nu(D) + (1/\log M)\ [1/e + T\ \sup_{\mathbb{A}} H]\ .$$

(a): Comme $\mathbb{A}_0$ est relativement compact et l'application $\nu \longrightarrow \mathbb{P}_\nu|\Omega_1$ *(où* $\Omega_T = E^{T+1}$ *ou* $\mathbb{D}([0,T],E)$ *muni de la topologie de Skorokhod suivant que* $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{R}^+$) est continue de $(M_1(E), \xrightarrow{w})$ dans $(M_1(\Omega_1), \xrightarrow{w})$, d'après (H1) (**Note:** *en temps continu,* $Q \rightarrow Q|\Omega_T$ *n'est pas continue, mais continue au point* Q *vérifiant:* $Q(\omega$ *est continu en* $t=T)=1$*, qui est le cas de* $\mathbb{P}_\nu$ *sous (H1)*), l'ensemble $\{\mathbb{P}_\nu|\Omega_1\ :\ \nu\in\mathbb{A}_0\}$ est aussi relativement compact. Pour $\varepsilon>0$ quelconque, on choisit $M\geq 2$ tel que le dernier terme dans (2.3) soit inférieur à $\varepsilon/2$. D'après le théorème de Prohorov, il existe un compact $\mathbf{K}$ dans Ω_1 tel que

$$\sup\{\ \mathbb{P}_\nu(\omega_{[0,1]}\notin \mathbf{K})\ :\ \nu\in\mathbb{A}_0\} < \varepsilon/2M\ .$$

Par conséquent (2.3) implique $\sup\{\ Q(\omega_{[0,1]}\notin\mathbf{K})\ :\ Q\in\mathbb{A}\} < \varepsilon$. ce qui signifie que la restriction de $\mathbb{A}$ à $[0,1]$ est tendu. Puisque les éléments de $\mathbb{A}$ sont stationaires, il en résulte que $\mathbb{A}$ est tendu aussi sur tout $\mathbb{T}$, donc relativement compact dans $(M_1(\Omega), \xrightarrow{w})$.

(b) Par la définition de la τ_p-topologie, il suffit de montrer que $\{Q|_{\Omega_T}\ :\ Q\in A\}$ est relativement compact par rapport à la topologie $\tau=\sigma(M_1(\Omega_T), b\mathcal{F}_T^0)$, pour chaque $T>0$ fixé.

En associant $\nu\in\mathbb{A}_0$ à $h_\nu := \frac{d\nu}{d\alpha}$, on voit que $\mathbb{A}_0^\alpha := \{h_\nu\ ;\ \nu\in\mathbb{A}_0\}$ est relativement compact dans $\sigma(L^1(\alpha), L^\infty(\alpha))$. D'après le théorème de Dunford-Pettis ([D.M. I]), cette dernière propriété est équivalente à l'intégrabilité uniforme de $\mathbb{A}_0^\alpha$ dans $L^1(\alpha)$, donc à celle de

$$\left\{ \frac{d\mathbb{P}_\nu}{d\mathbb{P}_\alpha}\Big|_{\mathcal{F}_T^0} = h_\nu(\omega(0))\ ;\ \nu\in\mathbb{A}_0 \right\} \quad \text{dans} \quad L^1(\mathcal{F}_T^0\ ,\ \mathbb{P}_\alpha)\ .$$

Donc pour tout $\varepsilon>0$, on choisit d'abord $M\geq 2$ tel que le dernier terme dans (2.3) soit inférieur à $\varepsilon/2$, et ensuite $\delta>0$ tel que

$$si\ D\in\mathcal{F}_T^0\ et\ \mathbb{P}_\alpha(D) < \delta\ ,\ \sup_{\nu\in\mathbb{A}_0} \mathbb{P}_\nu(D) < \varepsilon/2M.$$

Il en résulte d'après (2.3),

$$\sup\{\ Q(D) = \int_D f_Q\ d\mathbb{P}_\nu = \int_D f_Q\ h(\omega(0))\ d\mathbb{P}_\alpha\ :\ Q\in\mathbb{A}\} < \varepsilon.$$

où $f_Q := \frac{dQ}{d\mathbb{P}_\nu}|_{\mathcal{F}_T^0}$. Autrement dit $\{f_Q h(\omega(0))\ ;\ Q\in\mathbb{A}\}$ est uniformément intégrable dans $L^1(\mathcal{F}_T^0\ ,\ \mathbb{P}_\alpha)$, donc relativement compact par rapport à $\sigma(L^1,L^\infty)$ d'après le théorème de Dunford-Pettis. Il en résulte la compacité relative de $\{Q|_{\Omega_T}\ ;\ Q\in\mathbb{A}\}$ par rapport à la τ-topologie. ▌

Démonstration de Proposition 2.1.

(a) On écrit simplement $\mathbb{Q}^n=\mathbb{Q}^{\nu_n}$. En appliquant le lemme 2.2 à $\mathbb{A}=\{\mathbb{Q}^n;\ n\in\mathbb{N}\}$, on obtient que $\mathbb{A}$ est relativement compact. Soit $\mathbb{Q}$ un point limite de $(\mathbb{Q}^n)$, donc la limite d'une sous-suite $(\mathbb{Q}^{n_k},\ k\longrightarrow+\infty)$. D'après la semi-continuité inférieure de H sur $\left(M_1(\Omega),\ \xrightarrow{w}\right)$ *sous (H1)* ([DV]), on a

$$J(\nu) \le H(\mathbb{Q}) \le \liminf_{k\longrightarrow+\infty} H\left(\mathbb{Q}^{n_k}\right) = J(\nu)\ (d'après\ (2.1)).$$

Par conséquent le théorème 1.1. implique $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^\nu$.

(b) La preuve est la même en notant que H est toujours *s.c.i. sur* $\left(M_1(\Omega),\ \tau_p\right)$ ([W1]). ∎

§3. L'ergodicité et la convexité stricte de J

On dit que J est **strictement convexe** en ν, si pour tous ν_i, $i=1,2$ différents **vérifiant** $(\nu_1+\nu_2)/2 = \nu$, alors

$$J(\nu) < \left(J(\nu_1) + J(\nu_2)\right)/2 .$$

Bolthausen et Schmock [BS] établissent la convexité stricte de J dans le cas où $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ et P est uniformément ergodique, i.e., $\exists$ $(\alpha\in M_1(E)$ et $C>0)$ tels que

(3.1) $\quad \alpha P=\alpha$ *et* $\alpha(dy)/C \le P(x,dy) \le C\alpha(dy)$ *pour tout* $x\in E$.

Voici une note générale sur cette question:

Proposition 3.1. *J est strictement convexe en ν, si et seulement si le processus de Donsker Varadhan $\mathbb{Q}^\nu$ est ergodique.*

Preuve: Necessité. Nous désignons par $\left(P_t^\nu\right)_{t\in\mathbb{T}}$ le semigroupe de transition du processus $\mathbb{Q}^\nu$. Supposons que $\mathbb{Q}^\nu$ soit au contraire non-ergodique. D'après la decomposition ergodique de Dynkin, il existe deux mesures différentes ν_1 et ν_2 telles que

$$\nu = (1/2)\left(\nu_1+\nu_2\right)\ et\ \nu_1,\ \nu_2\ sont\ invariantes\ par\ rapport\ à\ (P_t^\nu).$$

Soit $\mathbb{Q}^i$ la loi du processus de Markov sur Ω avec le même semigroupe de transition (P_t^ν), mais avec la loi marginale ν^i $(i=1,2)$. Donc $\mathbb{Q}^\nu= (1/2)(\mathbb{Q}^1+\mathbb{Q}^2)$. Il en résulte d'après la propriété affine de H,

$$J(\nu) = H(\mathbb{Q}^\nu) = (1/2)\left(H(\mathbb{Q}^1)+H(\mathbb{Q}^2)\right) \ge (1/2)\left(J(\nu_1)+J(\nu_1)\right) .$$

qui devient égalité d'après la convexité de J, d'où la contradiction.

Suffisance: S'il y a au contraire deux mesures différentes ν_1 , ν_2 telles que

$$\nu = (1/2)(\nu_1+\nu_2) \text{ et } J(\nu) = (1/2)(J(\nu_1) + J(\nu_2)).$$

Soient $\mathbb{Q}^i = \mathbb{Q}^{\nu_i}$ (i=1.2). Nous avons

$$J(\nu) = (1/2)(H(\mathbb{Q}^1)+H(\mathbb{Q}^2)) = H((1/2)(\mathbb{Q}^1+\mathbb{Q}^2)) .$$

D'après le Théorème 1.1, nous obtenons

$$\mathbb{Q}^\nu = (1/2)(\mathbb{Q}^1+\mathbb{Q}^2) .$$

$\mathbb{Q}^\nu$ est donc non-ergodique, d'où la contradiction. ∎

§4. Le cas du temps discret

4.1. On suppose dans cette section $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ et $J(\nu)<+\infty$. Notons $P = P_1$. Nous désignons par $Q_{0,1}$ la loi marginale $Q((\omega(0), \omega(1))\in \bullet)$ de $Q\in M_1(\Omega)$. D'après le théorème de Csiszär [Cs], *une loi markovienne stationaire Q sur Ω avec $Q_0=\nu$ est le processus de Donsker-Varadhan $\mathbb{Q}^\nu$ si et seulement si*

(4.1a) $$Q_{0,1}(dx, dy) = \psi(x)\phi(y)\, \nu(dx)P(x,dy),$$

où ϕ, $\psi \geq 0$ sont $\mathcal{B}$-mesurables. On voit facilement que (4.1a) implique

(4.1b) $$\psi\, P\phi = 1,\ \nu\text{-}p.s.$$

(4.1c) $$\nu(dy) = \phi(y) \int_E \psi(x)\nu(dx)P(x,dy).$$

Le résultat suivant répond au Problème II dans le cas où $\mathbb{T}=\mathbb{N}$,

Proposition 4.1. *Soit $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ et supposons que $J(\nu)<+\infty$. Alors $\mathbb{Q}^\nu$ est ergodique si et seulement si pour tous A, B et $F\in\mathcal{B}$ avec $\nu(A)>0$, $\nu(B)>0$, $\nu(F)=1$,*

(4.2) $$\exists n\in\mathbb{N} : \mathbb{P}_\nu(X_0\in A,\ X_n\in B, \text{ et } X_k\in F \text{ pour tout } k\leq n) > 0 .$$

Corollaire 4.2. *S'il existe $\beta\in M_1(E)$ telle que*

(4.3) $$P(x,dy) = f(x,y)\, \beta(dy) \text{ pour tout } x\in E \text{ avec } \beta\otimes\beta(f=0)=0,$$

alors pour tout $\nu \in [J<+\infty]$, $\mathbb{Q}^{\nu}$ *est ergodique et* J *est strictement convexe sur* $[J<+\infty]$.

En effet sous (4.3), si $J(\nu)<+\infty$, alors $h(\nu;\nu P) \leq J(\nu) <+\infty$. On obtient $\nu \ll \nu P \ll \beta$. D'après (4.3), $\mathbb{P}_{\nu}$ vérifie (4.2). Ce corollaire résulte donc des propositions 4.1 et 3.1. Et il est facile de construire un contre-exemple pour lequel (4.3) n'est pas satisfaite, et $\mathbb{Q}^{\nu}$ est non-ergodique. Remarquons que ce résultat généralise le résultat de Bolthausen & Schmock mentionné au début de §3.

Démonstration de la Proposition 4.1.:
Necessité: Il est élémentaire que $\mathbb{Q}^{\nu}$ est ergodique si et seulement si

$$\text{(4.4)} \qquad \exists n\in\mathbb{N} : \mathbb{Q}^{\nu}(X_0\in A,\ X_n\in B) = \mathbb{Q}^{\nu}(X_0\in A,\ X_n\in B,\ et\ X_k\in F\ \forall\ k\leq n) > 0 ,$$

pour tous A,B,F comme dans (4.2) (voir [Re]). Comme $\mathbb{Q}^{\nu} \ll \mathbb{P}_{\nu}$ sur chaque $\mathcal{F}_n^0$, $n\in\mathbb{N}$, (4.2) résulte de (4.4).

Suffisance: Il s'agit de montrer que $\mathbb{Q}^{\nu}$ vérifie (4.4). On fixe les versions boréliennes réelles ϕ, $\psi \geq 0$ dans (4.1) et on pose

- $F = [\phi>0] \cap [\psi>0] \cap [\psi \bullet P\phi=1]$; • $\sigma_F = \inf\{n\in\mathbb{N} ;\ X_n \notin F\}$ *(temps de sortie).*

- $L_0=1$ *et* $L_n = \prod_{k=0}^{n-1} \psi(X_k)\ \phi(X_{k+1})$, $n\geq 1$;

- $M_0=1$ *et* $M_n := L_n\ 1_{[\sigma_F>n]} = \prod_{k=0}^{n-1} \psi(X_k)\ \phi(X_{k+1})\ 1_{[\sigma_F>n]}$, $n\geq 1$.

D'après (4.1a,b,c), $\nu(F)=1$. Nous affirmons que

$$\text{(4.5)} \qquad \frac{d\mathbb{Q}^{\nu}}{d\mathbb{P}_{\nu}}\Big|_{\mathcal{F}_n^0} = M_n \qquad \textit{pour tout } n\geq 1.$$

En effet, posons

$$N(x,dy) = \psi(x)\ \phi(y)\ P(x,\ dy), \quad si\ x\in F,$$

$$= P(x,dy) \qquad\qquad sinon.$$

C'est un noyau markovien qui est une famille régulière de lois conditionnelles $\mathbb{Q}^{\nu}(X_1\in dy\,|\,X_0=x)$. Soit $\mathbb{Q}_x$ la loi du processus de Markov (X_n) avec probabilités de transition N et issu de x. Alors

$$\mathbf{1}_{[\sigma_F>n]}\, \mathbb{Q}_x\big|_{\mathcal{F}_n^0} = \mathbf{1}_{[\sigma_F>n]}\, L_n\, \mathbb{P}_x\big|_{\mathcal{F}_n^0} \quad \textit{pour } x\in F \textit{ et tout } n\geq 1.$$

En intégrant cette égalité par rapport à $\nu(dx)$ et en remarquant que

$$\int_E \mathbb{Q}_x\, \nu(dx) = \mathbb{Q}^\nu \qquad \textit{et} \quad \mathbb{Q}^\nu(\sigma_F>n) = 1 \textit{ pour tout } n\geq 1,$$

nous obtenons

$$\mathbb{Q}^\nu\big|_{\mathcal{F}_n^0} = \mathbf{1}_{[\sigma_F>n]}\, \mathbb{Q}^\nu\big|_{\mathcal{F}_n^0} = \mathbf{1}_{[\sigma_F>n]}\, L_n\, \mathbb{P}_\nu\big|_{\mathcal{F}_n^0} = M_n\, \mathbb{P}_\nu\big|_{\mathcal{F}_n^0}.$$

d'où (4.5). L'expression (4.5) entraine l'équivalence de $\mathbb{Q}^\nu\big|_{\mathcal{F}_n^0}$ et $\mathbf{1}_{[\sigma_F>n]}\mathbb{P}_\nu\big|_{\mathcal{F}_n^0}$ (puisque $M_n>0$ sur $[\sigma_F>n]$) et donc le résultat désiré (4.4) d'après (4.2). ❙

Remarque 4.3. D'après (4.5), si $\mathbb{P}_\nu(\sigma_F = +\infty) = 1$, alors $\mathbb{Q}^\nu$ est équivalente à $\mathbb{P}_\nu$ sur chaque $\mathcal{F}_n^0$. En particulier si $J_\alpha(\nu)<+\infty$ *et* $\nu\sim\alpha$ (où α est une mesure σ-finie invariante et ergodique), alors $\mathbb{Q}^\nu$ est équivalente à $\mathbb{P}_\alpha$ sur chaque $\mathcal{F}_n^0$, et ergodique.

§5. Le cas du temps continu et reversible

L'objective principal de cette section est d'étendre le résultat de Meyer-Zheng [MZ] sur la construction de la diffusion réversible de Nelson, du cas du mouvement brownien au cas général. Nous soulignons que cette extension a été donnée par Takeda [T. 1990] dans le cas où E est de plus *localement compact et que le processus est continu* (voir aussi [FOT]). Notre méthode est inspirée de [MZ] (combiné avec certains résultats précédents). On suppose qu'il y a une mesure σ-finie nonnegative $\alpha\neq 0$ sur $(E,\mathcal{B})$ telle que

(H2) $(P_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est symétrique dans* $L^2(\alpha)$ *et ergodique.*

On va supposer que notre processus de base $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ est un processus de Hunt (voir [MR] dans le cadre (H2)). L'hypothèse (H2) nous donne le résultat clé suivant :

$$\text{(5.1)} \qquad J_\alpha(\nu) = \begin{cases} \mathcal{E}(\phi,\phi) & \textit{si } \phi=(d\nu/d\alpha)^{1/2}\in\mathbb{D}(\mathcal{E}) \\ +\infty & \textit{sinon.} \end{cases}$$

où $(\mathcal{E}, \mathbb{D}(\mathcal{E}))$ est la forme de Dirichlet associée à $((P_t), L^2(\alpha))$ (voir [W1. 2]).

5.1. Résultats

Soit $\phi\in\mathbb{D}(\mathcal{E})$, $\tilde{\phi}$ une version $\mathcal{E}$-quasi-continue. On écrit sa décomposition de Fukushima ([MR])

$$\tilde{\phi}(X_t) - \tilde{\phi}(X_0) = N_t^{\phi} + A_t^{\phi}, \ \forall t \in \mathbb{R}^+$$

où $N_\bullet^{\phi}$ est une $\mathbb{P}_x$-martingale locale pour $\mathcal{E}$-quasi tout $x \in E$, et A^{ϕ} est une fonctionnelle additive continue d'energie zéro. On définit pour tout $\varepsilon > 0$,

(5.2) $$\sigma_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 \ ; \ \tilde{\phi}(X_t) \leq \varepsilon\},$$

$$\sigma = \sup_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon = \inf\{t \geq 0; \ \tilde{\phi}(X_t) \ ou \ \tilde{\phi}(X_{t-}) = 0\}.$$

(5.3) $$L_t^\varepsilon = \int_0^{t \wedge \sigma_\varepsilon} (\tilde{\phi}(X_{s-}))^{-1} \, dN_s^{\phi} \quad \textit{(intégrale d'Itô)}$$

où $X_{\bullet-}$ désigne la limite à gauche. σ_ε est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_t^\alpha)$, la filtration completée de $(\mathcal{F}_t^0)$ *par* $\mathbb{P}_\alpha$, qui est continue à droite. L'intégrale stochastique (5.3) est bien définie puisque $\tilde{\phi}(X_-) \geq \varepsilon$ sur $[0, \sigma_\varepsilon]$ (or il est possible que $\tilde{\phi}(X_{\sigma_\varepsilon}) = 0$.).
On désigne par $e(L^\varepsilon)$ *la martingale locale de Doléans-Dade de* L^ε, qui est la solution unique de l'é.d.s. suivante

(5.4a) $$e(L^\varepsilon)_t = 1 + \int_0^t e(L^\varepsilon)_{s-} \, dL_s^\varepsilon, \ \forall \ t \in \mathbb{R}^+.$$

Elle est donnée par

(5.4b) $$e(L^\varepsilon)_t = \exp\left(L_t^\varepsilon - \frac{1}{2} \langle (L^\varepsilon)^c, (L^\varepsilon)^c \rangle_t\right) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta L_s^\varepsilon) e^{-\Delta L_s^\varepsilon}.$$

où $(L^\varepsilon)^c$ est la partie continue de L^ε (voir [DM, II] et [JS]).

D'après les propriétés d'intégrale stochastique, il est facile de justifier les définitions suivantes, *pour tout* $t < \sigma$,

(5.5) $$L_t := L_t^\varepsilon \qquad si \ t \leq \sigma_\varepsilon;$$

(5.6) $$e(L)_t := e(L_t^\varepsilon) \qquad si \ t \leq \sigma_\varepsilon.$$

(qui ne dépendent pas de $\varepsilon > 0$). Nous pouvons énoncer maintenant le

Théorème 5.1. *Supposons que le processus de base* $((X_t), (\mathbb{P}_x))$ *est de Hunt et vérifie (H2). Soit* $0 \leq \phi \in \mathbb{D}(\mathcal{E})$ *et* $\nu := \phi^2 d\alpha \in M_1(E)$. *Alors le processus de Donsker-Varadhan* $\mathbb{Q}^\nu$ *est donné par*

(5.7) $$\mathbb{Q}^\nu|_{\mathcal{F}_t^\alpha} = \mathbf{1}_{[t < \sigma]} \, e(L)_t \, d\mathbb{P}_\nu, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}^+.$$

De plus $\mathbb{Q}^\nu$ *est réversible et satisfait* $\mathbb{Q}^\nu(\sigma = +\infty) = 1$. *En particulier, si de plus*

(H3) $\mathbb{P}_x(\ t \to X_t$ *est continu sur* $\mathbb{R}^+) = 1$ *pour tout* $x \in E$.

(5.7) devient : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\text{(5.8)} \qquad \mathbb{Q}^\nu|_{\mathcal{F}_t^\alpha} = 1_{[t<\sigma]}\, exp\left(\int_0^t (\tilde{\phi}(X_{s-}))^{-1}\, dN_s^\phi - \frac{1}{2}\int_0^t (\tilde{\phi}(X_{s-}))^{-2}\, d\langle N^\phi, N^\phi\rangle_s\right) d\mathbb{P}_\nu .$$

Il répond au Problème I et étend [MZ] et [T]. Sa démonstration sera donnée au §5.2.. Nous donnons d'abord la réponse du Problème II par

Corollaire 5.2. *Dans le contexte du Théorème 5.1,*

(a) $\mathbb{Q}^\nu$ *est 'ergodique' si et seulement si* $\forall\ A,\ B \in \mathcal{E}$ *avec* $\nu(A)>0$, $\nu(B)>0$, *il existe* $t \geq 0$ *tel que*

$$\text{(5.9)} \qquad \mathbb{P}_\nu(X_0 \in A,\ X_t \in B,\ \tilde{\phi}(X_s) \wedge \tilde{\phi}(X_{s-}) > 0 \text{ pour tout } s \leq t) > 0 .$$

(b) $\mathbb{Q}^\nu$ *est équivalente à* $\mathbb{P}_\alpha$, *si et seulement si* $\tilde{\phi} > 0$, $\mathcal{E}$*-quasi partout. En particulier* $\mathbb{Q}^\nu$ *est ergodique dans ce cas.*

Preuve: D'après [JS. p59, Theorem 4.61.(c)],

$$e(L^\varepsilon)_\bullet > 0 \quad sur\ [0, \tau_\varepsilon),\ où\ \tau_\varepsilon = inf\{t \geq 0 : \Delta L_t^\varepsilon := L_t^\varepsilon - L_{t-}^\varepsilon = -1\} .$$

Or pour $t < \sigma_\varepsilon$,

$$\Delta L_t^\varepsilon = (\tilde{\phi}(X_{t-}))^{-1}\, \Delta N_t^\phi = (\tilde{\phi}(X_{t-}))^{-1}\, (\ \tilde{\phi}(X_t) - \tilde{\phi}(X_{t-})) > -1.$$

Par suite, $\tau_\varepsilon \geq \sigma_\varepsilon$ *et* $e(L^\varepsilon) > 0$ sur $[0, \sigma_\varepsilon)$. Il en résulte

$$\text{(5.10)} \qquad e(L)_\bullet > 0 \quad sur \quad [0, \sigma).$$

Ayant ceci, on peut finir la preuve très facilement:

(a) Rappelons le fait suivant : $\mathbb{Q}^\nu$ *est ergodique si et seulement si*

$$\forall\ A,\ B \in \mathcal{B}\ avec\ \nu(A) \wedge \nu(B) > 0,\ alors\ \exists\ t \geq 0\ t.q.\ \mathbb{Q}^\nu(X_0 \in A,\ X_t \in B) > 0.$$

Or d'après (5.10) et (5.7), $\mathbb{Q}^\nu \sim \mathbb{P}_\nu$ sur $\mathcal{F}_t^\alpha \cap [\sigma > t]$. Donc la propriété ci-dessus est équivalente à (5.9) de $\mathbb{P}_\nu$.

(b) Comme $\tilde{\phi} > 0$ $\mathcal{E}$-quasi partout si et seulement si $\mathbb{P}_\alpha(\sigma<+\infty) = 0$, (b) résulte de (5.10) . ∎

Remarque : La propriété (5.9) signifie que $((X_t), \mathbb{P}_\bullet)$ restreint à $[\tilde{\phi}>0]$ est transitive. Notons une différence avec le cas du temps discret : il est possible que $\nu\sim\alpha$, mais $\mathbb{Q}^\nu$ n'est ni équivalente à $\mathbb{P}_\alpha$ sur $\mathcal{F}_t^0$, ni ergodique (comparer avec la Remarque 4.3). Un exemple est : $\mathbb{P}_x$ est la mesure de Wiener issue de x dans $\mathbb{R}$,

$$\nu(dx) = x^2 \exp(-x^2/2)\, dx/\sqrt{2\pi} = (\nu_+ + \nu_-)/2, \text{ où } \nu_\pm = 1_{[sign(x)=\pm]}\, 2\nu \,.$$

Sous $\mathbb{Q}^\nu$, (X_t) n'atteint pas l'origine x=0, donc $\mathbb{Q}^\nu$ n'est pas équivalente à $\mathbb{P}_\nu$ sur $\mathcal{F}_t^0$ (t>0). Et $\mathbb{Q}^\nu = (\mathbb{Q}^{\nu_+}+\mathbb{Q}^{\nu_-})/2$ est non-ergodique.

5.2. Démonstrations du Théorème 5.1.

Elle est composée de trois étapes: 1) le bon cas où $\phi>0$ sur E et $\phi\in\mathbb{D}(\mathcal{L})$; 2) l'estimation *à priori* du type Meyer-Zheng "$\mathbb{Q}^\nu(\sigma=+\infty)=1$"; et 3) la Proposition 2.1 nous permet de passer au cas général par une procedure de passage à la limite.

Etape 1. une remarque générale

Lemma 5.3. *(sans (H2)) Soit* $\nu\in[J<+\infty]$. *Supposons qu'il existe* $\phi : E \to]0,+\infty[$ *telle que*

(i) ϕ *est* $\mathbb{P}_\nu$*-finement continue , i.e.,* $\mathbb{P}_\nu(\phi(X_\bullet)$ *est càdlàg et* $\phi(X)_- = \phi(X_-)) = 1$.

(ii) il existe une fonction réelle borélienne g telle que $\int_0^t |g(X_s)|\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}_\nu$*-p.s. et*

$$N_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t g(X_s)\, ds$$

est une $\mathbb{P}_\nu$*-martingale locale. Notons g par* $\mathcal{L}\phi$.

(iii) $\log\phi$ *et* $\mathcal{L}\phi/\phi \in L^1(\nu)$ *et* $J(\nu)=H(\mathbb{Q}^\nu) \le \int_E -\frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}\, d\nu$.

Alors

$$M_t = \frac{\phi(X_t)}{\phi(X_0)} \exp - \int_0^t \frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}(X_s)\, ds = e(L)_t \,. \tag{5.11}$$

est une $\mathbb{P}_\nu$*-martingale, où* $dL_t=\phi(X_{t-})^{-1}dN_t^\phi$ *et*

$$\mathbb{Q}^\nu|_{\mathcal{F}_t^0} = M_t\, \mathbb{P}_\nu|_{\mathcal{F}_t^0} \,. \tag{5.12}$$

Preuve : Notons que le processus suivant est $\mathbb{P}_\nu$-p.s. bien défini, absolument continu,

$$A_t = exp\left(-\int_0^t \frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}(X_s)ds\right), \quad dA_t = -\frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}(X_t)\, A_t\, dt$$

(d'après (i) et (ii)). Calculons la differentielle d'Itô de (M_t) définie par (5.11),

$$dM_t = \frac{1}{\phi(X_0)}\left[A_t\, d\phi(X_t) + \phi(X_{t-})\, dA_t\right] \qquad (comme\ [\phi(X).A] = 0)$$

$$= \frac{1}{\phi(X_0)}\left[A_t\left(dN_t^\phi + \mathcal{L}\phi(X_t)dt\right) - \phi(X_t) \bullet \frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}(X_t)\, A_t\, dt\right]$$

$$= \frac{\phi(X_{t-})}{\phi(X_0)} A_t \frac{dN_t^\phi}{\phi(X_{t-})}$$

$$= M_{t-}\, dL_t \quad (par\ la\ définition\ de\ L).$$

Par conséquent, (M_t) est l'exponentielle de Doléans-Dade de (L_t), qui est une $\mathbb{P}_\nu$-martingale locale nonnegative, donc une surmartingale.

Il reste à montrer que M est une vraie $\mathbb{P}_\nu$-martingale et que (5.12) a lieu. L'idée est de poser *pour chaque T>0 fixé,*

$$Q_T = M_T\, \mathbb{P}_\nu|_{\mathcal{F}_T^0}/C, \quad où\ C = \int M_T\, d\mathbb{P}_\nu \in (0.1].$$

On va montrer que $C=1$ *et* $Q_T = \mathbb{Q}^\nu|_{\mathcal{F}_T^0}$, ce qui nous donne le résultat désiré. Calculons l'entropie de Kullback,

$$0 \le h_{\mathcal{F}_T^0}(\mathbb{Q}^\nu;\, Q_T) = h_{\mathcal{F}_T^0}(\mathbb{Q}^\nu;\, \mathbb{P}_\nu) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\nu} log \frac{dQ_T}{d\mathbb{P}_\nu|_{\mathcal{F}_T^0}}$$

$$= TH(\mathbb{Q}^\nu) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\nu}\left[log\phi(X_T) - log\phi(X_0) - \int_0^t \frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}(X_s)ds - logC\right]$$

$$= T\, J(\nu) + T\int \frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}\, d\nu + logC \quad (d'après\ (iii))$$

$$\le logC \le 0 \qquad (d'après\ (iii)).$$

Par suite, C=1 et $\mathbb{Q}^\nu|_{\mathcal{F}_T^0} = Q_T$.

Etape 2: une inégalité du type Meyer-Zheng

Lemme 5.4. *Supposons (H2). Supposons que* $\phi \in \mathbb{D}(\mathcal{E})$ *est* $\mathcal{E}$*-quasi-continue et* $\nu = \phi^2 d\alpha \in M_1(E)$.

(a) Si de plus $h(\nu;\, \alpha) < +\infty$, $\phi \in \mathbb{D}(\mathcal{L})$ *(domaine de* $\mathcal{L}$ *dans* $L^2(\alpha)$*) et* $\phi > 0$ $\mathcal{E}$*-quasi partout.*

alors $\mathbb{Q}^{\nu}$ *est donné par (5.11) et (5.12), et il est réversible.*

(b) Dans le cas général, $\mathbb{Q}^{\nu}$ *est réversible et* $\forall\lambda>0$,

$$(5.13)\qquad \mathbb{Q}^{\nu}\left[sup_{0\le t\le T}\frac{\phi(X_t)}{\phi(X_0)}\vee\frac{\phi(X_0)}{\phi(X_t)}\ge 6e^{\lambda}\right]\le (3/\lambda)\left(\mathcal{E}(\phi,\phi)\bullet T+e^{-1}\right)+3e^{-\lambda}.$$

En particulier

$$(5.14)\qquad \mathbb{Q}^{\nu}(\sigma=+\infty)=\mathbb{Q}^{\nu}(\ \phi(X)\wedge\phi(X_-)>0\ sur\ \mathbb{R}^+)=1.$$

Preuve: *(a)* On voit facilement que (i), (ii) dans le Lemme 5.3 sont vérifiées. Comme

$$2\ \mathbb{E}^{\nu}|log\phi|\le 2/e+h(\nu;\alpha)<+\infty\ ,$$

et d'après l'inégalité de Schwarz et (5.1),

$$\int_E\left|\frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}\right|d\nu=\int_E|\mathcal{L}\phi|\ \phi\ d\alpha\le\left(\int_E(\mathcal{L}\phi)^2d\alpha\right)^{1/2}<+\infty\quad et\quad\int_E-\frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}\,d\nu=\mathcal{E}(\phi,\phi)=J(\nu).$$

la condition (iii) du Lemme 5.3 est aussi vérifiée. Donc d'après Lemme 5.3, $\mathbb{Q}^{\nu}$ est donné par (5.12). Pour montrer la réversibilité, on constate d'après (5.12),

$$\mathbb{Q}^{\nu}|_{\mathcal{F}_1^0}=\phi(X_0)\ \phi(X_1)\ exp-\int_0^1\frac{\mathcal{L}\phi}{\phi}(X_s)\ ds\ d\mathbb{P}_{\alpha}|_{\mathcal{F}_1^0}\ .$$

Comme $\mathbb{P}_{\alpha}$ est invariant par le retournement du temps r_1: $\mathbb{D}([0,1],E)\longrightarrow\mathbb{D}([0,1],E)$ défini par $r_1(\omega)_t=\omega((1-t)-)$ d'après (H2), $\mathbb{Q}^{\nu}$ l'est aussi par la formule ci-dessus. Donc $\mathbb{Q}^{\nu}$ est réversible.

(b) Cas 1 : sous les conditions de (a). Pour tout T>0 fixé, on considère le retournement du temps $r_T(\omega)(t):=\omega((T-t)-)$ pour $t\in[0,T]$, $\omega\in\Omega_T=\mathbb{D}([0,T],E)$. Soit (M_t) la martingale définie par (5.11). La découverte clé de Meyer-Zheng [MZ] se traduit ici par l'égalité :

$$(5.15)\qquad \left(\frac{\phi(X_t)}{\phi(X_0)}\right)^2=M_t\bullet M_{(T-t)-}(r_T)\,/M_{T-}(r_T)\ .$$

Par conséquent

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{\phi(X_t)}{\phi(X_0)}\vee\frac{\phi(X_0)}{\phi(X_t)}\right)^2\le\frac{\overline{M}_T\bullet\overline{M}_T(r_T)}{M_{T-}(r_T)}\vee\frac{M_{T-}(r_T)}{\underline{M}_T\bullet\underline{M}_T(r_T)}$$

où

$$\overline{M}_T=\sup_{0\le t\le T}M_t\ ,\quad \underline{M}_T=\inf_{0\le t\le T}M_t\ .$$

Soient

$$\xi = \inf\{\ t\geq 0;\ M_t \geq e^{\lambda}\}\quad et\ \eta = \inf\{\ t\geq 0;\ M_t \leq e^{-\lambda}\ \}.$$

nous avons

$$\mathbb{Q}^{\nu}\Big(\ \overline{M}_T \geq e^{\lambda}\ \Big) = \mathbb{Q}^{\nu}\Big(\ \xi\leq T,\ M_{\xi\wedge T} \geq e^{\lambda}\ \Big) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega_T} \log^+ M_{\xi\wedge T}\, d\mathbb{Q}^{\nu}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\ (\ h_{\mathcal{F}^0_{\xi\wedge T}}(\mathbb{Q}^{\nu};\ \mathbb{P}_{\nu}) + e^{-1})$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\ (\ h_{\mathcal{F}^0_T}(\mathbb{Q}^{\nu};\ \mathbb{P}_{\nu}) + e^{-1})$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\ (H(\mathbb{Q}^{\nu})\bullet T + e^{-1})$$

$$= \frac{1}{\lambda}\ (\mathcal{E}(\phi,\phi)\bullet T + e^{-1})\ .$$

Et

$$\mathbb{Q}^{\nu}\Big(\ \underline{M}_T \leq e^{-\lambda}\ \Big) = \mathbb{Q}^{\nu}(\eta\leq T) = \int_{[\eta\leq T]} M_{\eta\wedge T}\, d\mathbb{P}_{\nu} \leq e^{-\lambda}\ .$$

Comme $\mathbb{Q}^{\nu}$ est réversible, on a les même estimations pour $\underline{M}_T(r_T)$ et $\overline{M}_T(r_T)$.

Par conséquent, nous obtenons

$$\textit{le membre gauche de (5.13)} \leq \mathbb{Q}^{\nu}(\ \overline{M}_T \geq e^{\lambda}) + \mathbb{Q}^{\nu}(\ \overline{M}_T(r_T) \geq e^{\lambda}) + \mathbb{Q}^{\nu}(M_{T-}(r_T) \geq e^{\lambda})$$

$$+ \mathbb{Q}^{\nu}(M_{T-}(r_T) \leq e^{-\lambda}) + \mathbb{Q}^{\nu}(\underline{M}_T \leq e^{-\lambda}) + \mathbb{Q}^{\nu}(\underline{M}_T(r_T) \leq e^{-\lambda})$$

$$\leq 3 \bullet \frac{1}{\lambda}\ (\mathcal{E}(\phi,\phi)\bullet T + e^{-1}) + 3\ e^{-\lambda}\ ,$$

qui est exactement (5.13).

Cas 2: Cas général. Note que (5.14) est une conséquence immédiate de (5.13). On montre (5.13) pour ϕ général par une procedure de passage à la limite. Prenons

$$\psi_n = \textit{la version quasi continue de } nR_n(\phi\wedge n),\ \phi_n = \psi_n/\sqrt{<\psi_n,\ \psi_n>}\quad où\ R_{\lambda} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t\, dt.$$

Alors ([MR])

- $\phi_n \in \mathbb{D}(\mathcal{L}) \cap L^{\infty}(\alpha)$ *et* $\phi_n > 0$ *$\mathcal{E}$-quasi partout;*
- $\mathcal{E}_1(\phi_n-\phi\ ,\ \phi_n - \phi) := <\phi_n-\phi\ ,\ \phi_n - \phi>_{\alpha} + \mathcal{E}(\phi_n-\phi\ ,\ \phi_n - \phi) \rightarrow 0.$

Le premier point dessus assure que ϕ_n vérifie toutes les conditions dans la partie (a). D'après [MR], le deuxième point ci-dessus implique: pour tout $\delta>0$, $T\geq 0$,

$$\text{(5.16)} \qquad \mathbb{P}_x\big(\sup_{t\in[0,T]} |\phi_n(X_t) - \tilde{\phi}(X_t)| > \delta\big) \longrightarrow 0,$$

pour $\mathcal{E}$-quasi-tout $x\in E$. Fix T, $\lambda>0$. On désigne par A_n (resp. A) l'événement associé à ϕ_n (resp. $\tilde{\phi}$) dans le membre gauche de (5.13). Nous avons donc pour $\mu\sim\alpha$ *et* $\mu\in M_1(E)$ fixée,

$$\text{(5.17)} \qquad \mathbb{P}_\mu\big(A_n \,\Delta\, A := (A_n\backslash A)\cup(A\backslash A_n)\big) \longrightarrow 0\ .$$

Soit $\nu_n = \phi_n^2\, d\alpha$. Evidemment $\nu_n \longrightarrow \nu$ dans la τ-topologie et

$$J(\nu_n) = \mathcal{E}(\phi_n, \phi_n) \longrightarrow \mathcal{E}(\phi,\phi) = J(\nu).$$

Nous pouvons donc appliquer la Proposition 2.1. pour obtenir

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} |\mathbb{Q}^{\nu}(A) - \mathbb{Q}^{\nu_n}(A_n)| \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} |\mathbb{Q}^{\nu}(A) - \mathbb{Q}^{\nu_n}(A)| + \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{Q}^{\nu_n}(A_n\Delta A)$$
$$= \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{Q}^{\nu_n}(A_n\Delta A)\ .$$

Nous vérifions que ce dernier terme est nul aussi. D'après le théorème de Dunford-Pettis. $\{d\mathbb{Q}^{\nu_n}/d\mathbb{P}_\mu|\mathcal{F}_T^0 \ ;\ n\geq 1\}$ est uniformément intégrable dans $L^1(\mathbb{P}_\mu)$. Par conséquent.

$$\mathbb{Q}^{\nu_n}(A_n\Delta A) = \int_{A_n\Delta A} d\mathbb{Q}^{\nu_n}/d\mathbb{P}_\mu|\mathcal{F}_T^0\ d\mathbb{P}_\mu \longrightarrow 0,$$

d'où la convergence $\mathbb{Q}^{\nu_n}(A_n) \longrightarrow \mathbb{Q}^{\nu}(A)$. Donc l'inégalité (5.13) pour ϕ résulte de celle pour ϕ_n (établie dans *Cas* 1), lorsque $n\longrightarrow+\infty$.

Finalement la réversibilité de $\mathbb{Q}^{\nu}$ se déduit de celle de $\mathbb{Q}^{\nu_n}$ et de la τ-convergence. ∎

Etape 3 : le cas général.

Soit (ϕ_n) la suite approchant ϕ dans $\mathbb{D}(\mathcal{E}_1)$,- donnée dans la preuve du Lemme 5.4. Soient $\nu_n = \phi_n^2\, d\alpha$, $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q}^{\nu_n}$ et N^n la partie martingale de $\phi_n(X_\bullet) - \phi_n(X_0)$ dans la décomposition de Dynkin-Fukushima pour $n\geq 1$, et L^n la martingale locale donnée par : $dL^n = \big(1/\phi^n(X_-)\big)dN^n$.

On désigne par $N^{n,\varepsilon}$, $L^{n,\varepsilon}$, $\phi_n(X)^\varepsilon$ etc les processus arretés en σ_ε , qui est le temps d'arrêt défini dans (5.2)). On fixe une probabilité $\mu\sim\alpha$.

Notre idée est très simple : il s'agit de montrer *pour* $\varepsilon>0$ *fixé*.

(i) $L^{n,\varepsilon} \to L^{\varepsilon}$ *et* $[L^{n,\varepsilon} - L^{\varepsilon}]$ *(le crochet droit)* $\longrightarrow 0$ *en probabilité* $\mathbb{P}_\mu$ *. uniformément sur l'intervalle du temps* $[0,T]$*;*

(ii) *En conclure que* $e(L^{n,\varepsilon}) \to e(L^{\varepsilon})$ *dans le même sens.*

Pour voir que les deux impliquent (5.7), rappelons le fait général: sur un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ quelconque,

(5.18) *si* $\nu_n = f_n d\mu \to \nu$ *dans* $(M_1(E),\tau)$ *et* $f_n \to f$ *en mesure* μ*, alors* $f_n \to f$ *dans* $L^1(\mu)$.

Donc $f_n = d\nu_n/d\mu \to f = d\nu/d\mu$ *dans* $L^1(\mu)$ *et*

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}^\nu|_{\mathcal{F}^\alpha_{T\wedge\sigma_\varepsilon}} &= \text{la limite dans la } \tau\text{-topologie de } \mathbb{Q}^n|_{\mathcal{F}^\alpha_{T\wedge\sigma_\varepsilon}} \quad (\text{Prop.2.1})\\
&= \text{la limite dans la } \tau\text{-topologie de } f_n(X_0)\, e(L^{n,\varepsilon})_T\, d\mathbb{P}_\mu|_{\mathcal{F}^\alpha_{T\wedge\sigma_\varepsilon}}\\
&\qquad (\text{par le Lemme 5.4 et le théorème d'arrêt de Doob})\\
&= f(X_0)\, e(L^{\varepsilon})_T\, d\mathbb{P}_\mu|_{\mathcal{F}^\alpha_{T\wedge\sigma_\varepsilon}} \qquad (\text{par (5.18) et (ii) ci-dessus})\\
&= e(L^{\varepsilon})_T\, d\mathbb{P}_\nu|_{\mathcal{F}^\alpha_{T\wedge\sigma_\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Comme $\forall\ \varepsilon>0$,

$$h_{\mathcal{F}^\alpha_{T\wedge\sigma_\varepsilon}}(\mathbb{Q}^\nu; \mathbb{P}_\nu) \le h_{\mathcal{F}^\alpha_T}(\mathbb{Q}^\nu; \mathbb{P}_\nu) = T\, H(\mathbb{Q}^\nu) = T\mathcal{E}(\phi,\phi)\ .$$

$\left(e(L^{\varepsilon})_T\ ,\ \varepsilon>0\right)$ est uniformément intégrable. En laissant $\varepsilon\to 0$, on obtient (5.7) de (5.6), (5.18) et de l'estimation *à priori* (5.14).

Il reste à vérifier (i) et (ii). Commençons par

$$\textbf{(5.19)}\qquad \begin{aligned}
[L^{n,\varepsilon} - L^{\varepsilon}]_t &= [L^{n,\varepsilon}]_t + [L^{\varepsilon}]_t - 2\,[L^{n,\varepsilon}, L^{\varepsilon}]_t\\
&= \int_0^{t\wedge\sigma_\varepsilon} \frac{1}{\phi_n^2(X_{s-})}\, d[N^n]_s + \int_0^{t\wedge\sigma_\varepsilon} \frac{1}{\tilde\phi^2(X_{s-})}\, d[N^\phi]_s\\
&\qquad - 2\int_0^{t\wedge\sigma_\varepsilon} \frac{1}{\tilde\phi\, \phi_n(X_{s-})}\, d[N^\phi, N^n]_s\ .
\end{aligned}$$

Nous savons que

$$\textbf{(5.20)}\qquad \mathbb{E}^\alpha[N^n - N^\phi]_T = \mathbb{E}^\alpha \langle N^n - N^\phi\rangle_T = T\,\mathcal{E}(\phi_n-\phi,\ \phi_n-\phi) \to 0\ .$$

En passant par une sous-suite, on peut supposer $\mathbb{P}_\mu$-p.s. que,

- $\sup_{t\le T} | [N^n]_t - [N^\phi]_t| \to 0$ (par (5.20)) ;
- $\sup_{t\le T\wedge\sigma_\varepsilon} | \frac{1}{\phi_n(X_{t-})} - \frac{1}{\tilde{\phi}(X_{t-})}| \to 0$ (par (5.16)) ;

Par conséquent par l'expression (5.19),

$$\sup_{t\le T} [L^{n,\varepsilon} - L^{\varepsilon}]_t(\omega) = [L^{n,\varepsilon} - L^{\varepsilon}]_T(\omega) \to 0 \text{ , } \mathbb{P}_\mu\text{-p.s.} \tag{5.21}$$

Cette convergence donne aussi la convergence uniforme sur [0,T] en probabilité ($\mathbb{P}_\mu$) de $L^{n,\varepsilon}$ *vers* L^{ε} (voir [DM, II, p313]). Ainsi (i) est établie. Et la propriété (ii) est une conséquence de (i) (une estimation élémentaire à l'aide de (5.4b)). ∎

REFERENCES

[BS] **Bolthausen E. & Schmock U.:** Maximum entropy principle for uniformly ergodic Markov chains, *Stoch. Proc. & appl. 33(1), pp1-27, 1989.*

[Ca] **Carlen E.A.:** Conservative diffusions, *Comm. Math. Phys.* **94**, *p293-315, 1984.*

[CL] **Cattiaux P. & Léonard Ch. :** Minimization of Kullback information of diffusion processes, *Ann. Inst. H. Poincaré,* **30**, *N°1, p83-132, 1994.*

[Cs] **Csiszar I.:** I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems, *Ann. Probab. (1975) Vol.***3**, *N°1, 146-158.*

[DG] **Dawson D.W. & Gartner J.:** Long time fluctuation of weakly interacting diffusions, *Stochastics,* **20**, *p247-308, 1987.*

[DM] **Dellacherie and Meyer P.A.:** *Probabilités et Potentiels Vol.I, II.* Hermann 1976, 1980

[DS] **Deuschel J.D.& Stroock D.W.:** *Large deviations, Pure and Appl. Math. 137, 1989, Academic Press.*

[DV] **Donsker M.D. & Varadhan S.R.S.:** Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I-IV. *Comm. Pur. Appl. Math.* **28,** *p.1-47 and p.279-301 (1975);* **29,** *p.389-461 (1976);* **36,** *p.183-212 (1983).*

[E] **Ellis R.S.:** *Large Deviations and Statistical Mechanics, Springer, Berlin, 1985.*

[F] **Föllmer H.:** *Random fields and diffusions, Ecole d'Eté de Probabilités Saint-Flour 1985-1987, edited by P.L. Hennequin, Lect. Notes. in Math. N°1362, Springer, 1988.*

[Fu] **Fukushima M.:** *Dirichlet Forms and Markov Processes* North-Holland, 1980

[FOT] **Fukushima M., Oshima Y. & Takeda M.** : *Dirichlet Forms and Markov Processes* North-Holland, 1994

[JS] **Jacod J. & Shiryayev A.N.** : *Limit Theorems For Stochastic Processes. Springer 1987*

[MR] **Ma Z.M. & Röckner M.** : *An introduction to the (non-symmetric) Dirichlet forms, Univertexts, Springer 1992.*

[MZ] **Meyer P.A. & Zheng W.A.:** Construction du processus de Nelson reversible. *Sem. Probab. XIX. Lect. Notes Math. N°1123 (1984). pp12-26.*

[N] **Nagasawa M.:** *Schrodinger Equations and diffusion Theory , Birkauser, 1993.*

[RZ] **Roelly S. & Zessin H.** : Sur la mécanique statistique d'une particule Brownienne sur le tore, *Sém. Proba. XXV, Lect. Notes in Math.* **1485**, *p291-310, Springer-Verlag 1991.*

[Ru] **Ruelle D.:** *Statistical Mechanics: Rigorous Results* Benjamin, 1969

[T] **Takeda M.:** On Donsker-Varadhan's entropy and its applications *Forum Math.* 2 *(1990), pp481-488.*

[W1] **Wu L.M.:** Grandes deviations pour les processus de Markov essentiellement irréductibles, II. temps continu. C.R.A.S. t.314, Serie I, 941-946 (1992).

[W2] **Wu L.M.:** Perturbations of Dirichlet forms, ground state diffusions and large deviations. *J. Func. Anal.* **123**. *N°1, 1994.*

[W3] **Wu L.M.:** Thermodynatical limits for reversible Markov processes. Preprint 1993.

[Z1] **Zambrini J.C.:** Variational processes and stochastic versions of Mechanics *J. Math. Phys.* **27**, *p2307-2330, 1986*

[Z2] **Zambrini J.C.:** Euclidean Quantum Mechanics, *Phys. Rev.* A**35**, *3641-3649, 1987*

[Zh] **Zheng W.A.:** Tightness results for laws of diffusion processes, *Ann. Inst. H. Poincaré* **B21**, *p103-124, 1985.*

WU Liming: Laboratoire de Mathématiques Appliquées et URA-CNRS 1501, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière, France. Email : wuliming@ucfma.univ-bpclermont.fr