Annales mathématiques Blaise Pascal

Rolando Rebolledo

Sur les semigroupes dynamiques quantiques

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, n° 1 (1996), p. 125-142
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_125_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.125-142

SUR LES SEMIGROUPES DYNAMIQUES QUANTIQUES

ROLANDO REBOLLEDO

A la mémoire d'Albert Badrikian.

RÉSUMÉ. Les semigroupes dynamiques quantiques sont apparus dans la littérature physique au cours des années 70, de la plume de plusieurs auteurs, notamment Kraus, Gorini, Kossakowski, Sudarshan, Frigerio, Accardi, Lindblad, Davies; un résumé d'Evans, sur le cas de C^*-algèbres, étant l'une des plus récentes références dans la matière. Dans notre contexte, nous nous contentons de considérer comme *semigroupe dynamique quantique* une famille $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs, agissant sur l'algèbre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ des tous les opérateurs linéaires bornés définis sur un espace hilbertien $\mathcal{H}$, qui est un semigroupe complètement positif et faiblement continu.

Mon approche au sujet a été déterminé par l'étude des équations de l'optique quantique. En effet, il y a cinq ans, avec deux jeunes physiciens, Carlos Saavedra et Juan Carlos Retamal, nous avons caractérisé le champs electromagnétique du laser au moyen d'un processus de diffusion. Cela nous a amené à introduire une classe spéciale de problème de martingales, associé aux solutions faibles d'une équation de Fokker-Planck qui possèdent une entropie finie. Ce sont les *diffusions entropiques*. Dans un article ultérieur, j'ai utilisé les diffusions entropiques pour formuler la Mécanique Stochastique au sens de Nelson et Guerra. Albert Badrikian m'avait beaucoup encouragé dans cette voie.

Parallèlement, avec Franco Fagnola nous avons commencé une série de travaux sur les semigroupes dynamiques quantiques. Dans un article écrit conjointement avec lui et Carlos Saavedra, nous avons reformulé les équations de l'optique quantique au moyen d'équations différentielles stochastiques non commutatives. Plus récemment, nous avons exploré les théorèmes ergodiques et la convergence vers l'équilibre de ces semigroupes. L' exposé de ces résultats communs est au coeur de ma conférence.

Mais, par ailleurs, cette conférence continue une conversation inachevée avec Albert Badrikian. Les diffusions entropiques peuvent être considérées comme l'une des simulations possibles d'un semigroupe quantique. De ce point de vue, le cadre théorique de la Mécanique Stochastique peut être inclus tout naturellement dans celui des semigroupes quantiques. C'est la réponse que j'apporte à la question de Badrikian sur les liens entre ces différentes théories.

TABLE DE MATIÈRES

1. INTRODUCTION

Il est habituel de décrire l'évolution d'un système quantique fermé par un groupe unitaire d'opérateurs, à un paramètre, agissant sur un espace hilbertien. C'est-à-dire, étant donné un espace hilbertien $\mathcal{H}$, on y considère un groupe $(U_t; t \in \mathbf{R})$ d'endomorphismes, dont le générateur est appelé le *hamiltonien* du système. Ce formalisme, qui resta longtemps en vigueur en Physique, rend cependant difficile la description des processus irreversibles. Cette difficulté a motivé la considération séparée du "'système libre" et son interaction avec un "réservoir". Assez souvent cela s'est répresenté par une décomposition du hamiltonien H en une somme $H = H_0 + H_R + H_I$, où H_0 désigne le générateur de la dynamique libre; H_R, celui de la dynamique propre au réservoir et H_I c'est le hamiltonien décrivant l'interaction système–réservoir.

Au cours des années 70, une nouvelle voie de description de la dynamique quantique a vu le jour, celle des semigroupes dynamiques quantiques. Cette nouvelle catégorie de semigroupes permet de mieux analyser les phenomènes irréversibles en établissant une extension naturelle au cadre non-commutatif des résultats connus en Théorie de Processus de Markov classiques. Cette conférence a pour but de présenter certains résultats nouveaux sur le comportement asymptotique des semigroupes dynamiques quantiques et, d'autre part, de caractériser la Mécanique Stochastique de Nelson comme une *simulation* de ce type de semigroupe.

Commençons par fixer un espace de Hilbert h, et désignons par $\mathcal{B}(h)$ l'algèbre de tous ses endomorphismes.

Définition 1. *Sur $\mathcal{B}(h)$ on définit un* **semigroupe dynamique quantique** $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t; t \geq 0)$, *comme un semigroupe faiblement $*$-continu, complètement positif et qui préserve l'identité.*

L'hypothèse de complète positivité signifie que pour toute collection finie

$$X_1, \ldots, X_n, \qquad Y_1, \ldots, Y_n$$

d'éléments de $\mathcal{B}(h)$, l'opérateur

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^* \mathcal{T}_t(X_i^* X_i) Y_i,$$

est positif.

Illustrons la définition précedente par quelques exemples.

Exemple 1.

Soit H un opérateur autoadjoint défini sur un espace hilbertien h. Alors, un semigroupe quantique est défini en considérant

$$\mathcal{T}_t(X) = U_t^* X U_t, \tag{1.1}$$

où,

$$U_t = \exp(-itH), \ (t \geq 0). \tag{1.2}$$

Dans ce cas, un calcul explicite du générateur $\mathcal{L}(\cdot)$ par dérivation nous donne

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X], \tag{1.3}$$

pour tout $X \in \mathcal{B}(h)$, où $[\cdot, \cdot]$ désigne l'opérateur de commutation.

L'exemple suivant est emprunté à Parthasarathy [14].

Exemple 2.

Soit $(W_t;\ t \geq 0)$ un processus de Wiener classique défini sur un espace probabilisé filtré que nous ne précisons d'avantage. Soit $L \in \mathcal{B}(h)$ un opérateur auto–adjoint et définissons

$$\mathcal{T}_t(X) = \mathbf{E}(e^{iW_t L} X e^{-iW_t L}), \ (t \geq 0). \tag{1.4}$$

Un calcul basé sur la caractéristique gaussienne de W_t montre que l'espérance mathématique du membre droit vaut

$$\exp(-\frac{t}{2}[L, X]^2).$$

Par conséquent, le semigroupe possède un générateur donné par

$$\mathcal{L}(X) = -\frac{1}{2}(L^2 X + X L^2 - 2LXL). \tag{1.5}$$

Plusieurs auteurs ont contribué à la caractérisation du générateur d'un semigroupe quantique. Notamment, Gorini, Kossakowski, Sudershan (voir [8]) et Lindblad [9], qui a produit le résultat plus général dans le cas d'un générateur borné. Rappelons ci–dessous le Théorème de Lindblad pour une plus facile référence ultérieure dans le présent article.

Théorème 1. *Supposons que le semigroupe quantique défini sur l'espace hilbertien h possède en outre la propriété d'uniforme continuité*

$$\lim_{t\to 0}\sup_{\|X\|\leq 1}\|\mathcal{T}_t(X)-X\|=0. \tag{1.6}$$

Alors, un opérateur borné $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{B}(h)$ est le générateur du semigroupe si et seulement s'il existe un opérateur borné autoadjoint $H : h \to h$, et une suite$(L_j;\ j \in \mathbb{N})$ d'opérateurs bornés sur h tels que $\sum_j L_j^* L_j$ est fortement convergente et

$$\mathcal{L}(X)=i[H,X]-\frac{1}{2}\sum_j(L_j^*L_jX+XL_j^*L_j-2L_j^*XL_j), \tag{1.7}$$

pour tout $X \in \mathcal{B}(h)$. Dans ce cas, la suite $(L_j;\ j \in \mathbb{N})$ peut être choisie de façon à ce que l'ensemble $\{\bigoplus_j[L_j,X]u :\ X \in \mathcal{B}(h),\ u \in h\}$ soit total dans $\bigoplus_j h$.

Dans le théorème précédent, lorsque la suite $(L_j;\ j \in \mathrm{N})$ est triviale, l'espace $\bigoplus_j h$ est identifié à $\{0\}$.

Dans la section suivante nous présentons des résultats limites pour des semigroupes quantiques dont le générateur n'est pas nécéssairement borné et doit, par conséquent, être interprété faiblement.

2. Le comportement asymptotique de semigroupes quantiques

Les résultats de cette section ont été obtenus conjointement avec Franco Fagnola, je reprends essentiellement ici l'étude faite dans notre note [5]. Nous adoptons les notations habituelles de l'Analyse Stochastique Quantique. A savoir, on considère l'espace hilbertien tensoriel $\mathcal{H} = h \otimes \Gamma(L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^d))$ dont le premier facteur est l'espace initial et le second, correspond à l'espace de Fock associé à $L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^d)$. Nous notons $e(f)$ le vecteur exponentiel dans $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^d))$ associé à la fonction $f \in L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^d)$ et P désigne la projection canonique définie par $Pu\otimes e(f) = u\otimes e(0)$.

Pour simplifier les notations, on écrira toujours $u \otimes e(f)$ sous la forme $ue(f)$, et en outre on identifiera tout opérateur sur h avec son extension canonique à l'espace $\mathcal{H}$ tout entier. Par ailleurs, on notera $D(Z)$ le domaine d'un opérateur arbitraire Z.

Nous supposons que le semigroupe $\mathcal{T}$ satisfait à une équation

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}_t(X)=\mathcal{L}(\mathcal{T}_t(X)), \tag{2.1}$$

pour tout X appartenant à $\mathcal{B}(h)$, où $\mathcal{L}$ est une forme définie au moyen d'une collection finie G, $(L_k; k = 1,\dots,d)$ d'opérateurs, par l'expression

$$\langle v,\mathcal{L}(X)u\rangle=\langle Gv,Xu\rangle+\sum_{k=1}^{d}\langle L_kv,XL_ku\rangle+\langle v,XGu\rangle, \tag{2.2}$$

pour tous $u, v \in D$, où D est un ensemble dense contenu dans les domaines de tous les opérateurs G, L_k. De même une forme $\tilde{\mathcal{L}}$ est définie en remplaçant l' opérateur G par G^*. Cette forme est liée à un semigroupe minimal $\tilde{\mathcal{T}} = (\tilde{\mathcal{T}}_t; t \geq 0)$. En outre nous supposons satisfaites les hypothèses fondamentales suivantes:

- L'opérateur G est le générateur d'un semigroupe fortement continu de contractions sur h;
- L'ensemble D ci-dessus est un domaine essentiel à la fois pour G et G^*;
- Les opérateurs L_k et L_k^* sont fermés; $D(G) \subset D(L_k)$, $D(G^*) \subset D(L_k)$, et L_k coïncide avec la fermeture de sa restriction au domaine $D(G)$, pour tout $k = 1, \ldots, d$;
- $\mathcal{L}(I) = 0$, où I désigne l'opérateur identité;
- $\mathcal{T}$ et $\tilde{\mathcal{T}}$ ce sont des semigroupes minimaux préservant l'identité;
- Pour tout $u \in D$, l'image $R(n; G)u$ par la résolvante du semigroupe, appartient à $D(G^*)$ et la suite $(nG^*R(n; G)u; n \geq 1)$ converge fortement.

Sous les hypothèses précédentes, (voir par exemple [2]), il existe un cocycle unitaire unique $V = (V_t; t \geq 0)$ vérifiant $\mathcal{T}_t(X) = PV_tXV_t^*P$, et satisfaisant l'équation:

$$dV_t = V_t \left(\sum_{k=1}^{d} [L_k^* dA_k(t) - L_k dA_k^\dagger(t)] + G^* dt \right), \tag{2.3}$$

où nous avons employé les notations habituelles pour les opérateurs d'annihilation et de création respectivement (voir par exemple [10]). De même, le cocycle dual noté $\tilde{V} = (\tilde{V}_t; t \geq 0)$, en est donné par $\tilde{V}_t = \mathcal{R}_t V_t^* \mathcal{R}_t$, où $\mathcal{R}_t$ désigne l'opérateur de renversement du temps dans l'espace de Fock, $(t \geq 0)$. L'équation satisfaite par $\tilde{V}$ s'obtient de (2.3) en remplaçant L_k par $-L_k$ et G^* par G.

Le *flot quantique* $(j_t; t \geq 0)$ est alors obtenu comme une dilatation du semigroupe dynamique quantique au moyen du cocycle V en définissant $j_t(X) = V_tXV_t^*$, $(t \geq 0, X \in \mathcal{B}(h))$.

2.1. Le résultat principal. Nous commençons par rappeller un résultat déjà ancien dû à A. Frigerio et M.Verri ([7], Theorem 3.3, p.281). Dans le reste de cette note nous ne considérons que des semigroupes $\mathcal{T}$ possédant un état stationnaire normal et fidèle ρ. Ceci détermine l'existence d'une espérance conditionnelle, au sens d'Umegaki, $X \mapsto \mathcal{E}(X)$ définie sur $\mathcal{B}(h)$, à valeurs dans l'algèbre de Von Neumann des éléments invariants du semigroupe $\mathcal{T}$.

Théorème 2 (Frigerio–Verri). *Si l'ensemble des points fixes de $\mathcal{T}$ coïncide avec l'espace des éléments $X \in \mathcal{B}(h)$ tels que $\mathcal{T}_t(X^*X) = \mathcal{T}_t(X^*)\mathcal{T}_t(X)$ et $\mathcal{T}_t(XX^*) = \mathcal{T}_t(X)\mathcal{T}_t(X^*)$, pour tout $t \geq 0$, alors*

$$w^* - \lim_{t\to\infty} \mathcal{T}_t(X) = \mathcal{E}(X), \tag{2.4}$$

pour tout $X \in \mathcal{B}(h)$.

Ce Théorème a été le point de départ de notre recherche qui a abouti au résultat fondamental qui suit.

Théorème 3. *Si le semigroupe $\mathcal{T}$ est tel que le commutant géneralisé de la famille d'opérateurs $(L_k, L_k^*; k = 1, \ldots, d)$ est réduit aux multiples de l'identité, alors*

$$w^* - \lim_{t\to\infty} \mathcal{T}_t(X) = \mathcal{E}(X) = (tr\, \rho X)I, \tag{2.5}$$

pour tout $X \in \mathcal{B}(h)$.

Preuve. Tout d'abord nous appelons $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ l'espace des éléments $X \in \mathcal{B}(h)$ tels que $\mathcal{T}_t(X^*X) = \mathcal{T}_t(X^*)\mathcal{T}_t(X)$ et $\mathcal{T}_t(XX^*) = \mathcal{T}_t(X)\mathcal{T}_t(X^*)$, pour tout $t \geq 0$. La preuve se fait alors comme suit. Premièrement l'on établit que $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ est contenu dans le commutant généralisé de $(L_k, L_k^*; k = 1, \ldots, d)$. Evidemment $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ contient, à son tour, l'algèbre des points fixes de $\mathcal{T}$. Puis, l'hypothèse faite sur le commutant généralisé nous assure que l'ensemble des point fixes n'est réduit qu'à l'ensemble des multiples de l'identité d'où le théorème découle. Il est d'ailleurs évident que dans ce cas $\mathcal{E}(X) = (\text{tr } \rho X)I$. Pour compléter la preuve, il suffira de démontrer la proposition ci–dessous, que nous tenons à énoncer séparément car elle a de la valeur par elle–même. □

Proposition 1. *Sous les hypothèses précédentes, l'ensemble* $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ *est contenu dans le commutant généralisé de* $(L_k, L_k^*; k = 1, \ldots, d)$.

Preuve. Soit X un élément arbitraire de $\mathcal{N}(\mathcal{T})$. Alors, pour tout $t \geq 0$ fixe il vient

$$\mathcal{T}_t(X^*X) = \mathcal{T}_t(X^*)\mathcal{T}_t(X). \tag{2.6}$$

Or, j_t est un homomorphisme et l'on a également $j_t(X^*X) = j_t(X^*)j_t(X)$, d'où il découle, (la définition de P figure au début de la note),

$$Pj_t(X^*X)P = Pj_t(X^*)j_t(X)P. \tag{2.7}$$

Le membre gauche de (2.7) équivaut à celui de l'équation (2.6). Comme le membre droit de (2.6) s'écrit $Pj_t(X^*)Pj_t(X)P$, il s'ensuit que

$$Pj_t(X^*)Pj_t(X) = Pj_t(X^*)j_t(X)P. \tag{2.8}$$

Désignons par $P^\perp$ la projection orthogonale à P, puisque $P+P^\perp$ est égale à l'identité de $\mathcal{H}$, il vient

$$Pj_t(X^*)Pj_t(X) = Pj_t(X^*)(P + P^\perp)j_t(X)P,$$

donc

$$Pj_t(X^*)P^\perp j_t(X)P = 0, \tag{2.9}$$

c'est–à–dire, l'opérateur $P^\perp j_t(X)P$ est nul.

Si l'on remplace X par X^* dans (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), l'on a de même, que $P^\perp j_t(X^*)P$ est nul.

Par conséquent, si f est un élément arbitraire de $L^2(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^d)$, et $u, v \in h$, alors pour tout $t \geq 0$ il vient

$$0 = \langle v\mathcal{R}_t f, j_t(X)ue(0)\rangle = \langle \tilde{V}_t v f, X\tilde{V}_t ue(0)\rangle,$$

et de l'équation de $\tilde{V}$ il s'ensuit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t [\langle \tilde{V}_s G v f, X \tilde{V}_s u e(0)\rangle + \langle \tilde{V}_s v f, X \tilde{V}_s G u e(0)\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{d} \langle \tilde{V}_s L_k v f, X \tilde{V}_s L_k u e(0)\rangle] ds \\ &+ \sum_{k=1}^{d} \int_0^t [\langle \tilde{V}_s v e(0), X \tilde{V}_s L_k u e(0)\rangle - \langle \tilde{V}_s L_k^* v e(0), X \tilde{V}_s u e(0)\rangle] \bar{f}_k(s) ds \end{aligned}$$

En particulier, si l'on prend une fonction f continue et l'on dérive la dernière équation ci–dessus, on obtient:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{V}_t G v f, X \tilde{V}_t u e(0)\rangle + \langle \tilde{V}_t v f, X \tilde{V}_t G u e(0)\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{d} \langle \tilde{V}_t L_k v f, X \tilde{V}_t L_k u e(0)\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{d} \langle \tilde{V}_t v e(0), X \tilde{V}_t L_k u e(0)\rangle - \langle \tilde{V}_t L_k^* v e(0), X \tilde{V}_t u e(0)\rangle] \bar{f}_k(t). \end{aligned}$$

Puis, pour tout $k = 1, \ldots, d$ fixé on choisit une fonction f de sorte que sa composante f_k soit non nulle en 0, et l'on fait tendre t vers 0. L'équation précédente devient donc,

$$\langle v, X L_k u\rangle - \langle L_k^* v, X u\rangle = 0 \tag{2.10}$$

De l'équation (2.10) on déduit d'abord que Xu appartient au domaine $D(L_k)$ pour tout $k = 1, \ldots, d$ et pour tout $u \in D$, donc pour tout $u \in D(G)$. Ensuite,

$$\langle v, X L_k u\rangle = \langle v, L_k X u\rangle, \tag{2.11}$$

mais, étant donné que L_k est la fermeture de sa restriction au domaine $D(G)$, l'égalité précédente entraîne que

$$X L_k \subseteq L_k X,$$

pour tout $k = 1, \ldots, d$.

D'une façon analogue on prouve que $X^* L_k \subseteq L_k X^*$ et l'on déduit (voir par exemple [22], Th.3, p.195)

$$L_k^* X = (X^* L_k)^* \supseteq (L_k X^*)^* \supseteq X L_k^*$$

pour tout $k = 1, \ldots, d$ et la preuve est complète. □

Le lecteur pourra vérifier que la proposition précédente généralise le Théorème 3.2 de [6].

2.2. Un exemple tiré de l'optique quantique. Dans les articles [3] et [4] on a introduit le semigroupe quantique associé aux équations de l'optique quantique ("laser" et "maser"). Le théorème 2 ci–dessus peut–être appliqué à l'étude de ce semigroupe. En effet, dans ce cas particulier l'on est réduit à considérer l'espace initial $h = \ell^2(\mathbf{N})$ muni de l'opérateur de création (resp. d'annihilation) $a^\dagger$ (resp. a), et l'opérateur de nombre noté N. Puis, les coefficients G et L_k ($k = 1, \ldots, 4$) valent

$$L_1 = \mu a^\dagger, \quad L_2 = \lambda a, \quad L_3 = R\cos(\phi\sqrt{aa^\dagger}),$$

$$L_4 = R\frac{\sin(\phi\sqrt{aa^\dagger})}{\sqrt{aa^\dagger}}a, \quad G = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} L_k^* L_k,$$

où ϕ, $R > 0$, $\lambda < \mu$, ce sont des paramètres donnés du modèle physique.

Pour prouver que les hypothèses du Théorème 2 sont satisfaites, il suffit d'étudier l'action des opérateurs sur la base canonique $(e_m; m \geq 0)$ de h. En particulier, le lecteur pourra remarquer que l'on obtient une relation de récurrence, portant sur les éléments de la base, d'où s'ensuit que $\langle e_r, X e_m\rangle = 0$ pour tout élément X dans le commutant généralisé de L_k, L_k^*, ($k = 1, \ldots, 4$). Le corollaire suivant est alors immédiat.

Corollaire 1. *Le semigroupe de l'optique quantique introduit ci–dessus approche l'équilibre au sens de la topologie faible w^* lorsque $t \to \infty$.*

Il est donc évident que dans le cas précédent les moyennes ergodiques du semigroupe convergent au sens de la topologie w^*, résultat qui avait été obtenu dans [4] par d'autres moyens.

3. La simulation d'un semigroupe quantique sur un état donné

En général, un semigroupe quantique peut être simulé en considérant sa restriction à une sous–algèbre commutative de $\mathcal{B}(h)$, en particulier, l'algèbre engendrée par un opérateur autoadjoint. Dans cette section nous abordons la relation entre la théorie des semigroupes quantiques et la Mécanique Stochastique de Nelson. Nous montrerons que cette Mécanique peut être considéré comme une simulation d'un semigroupe quantique au sens suivant.

Définition 2. *Etant donné un semigroupe quantique $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$, l'orbite $(\mathcal{T}_t(X))_{t\geq 0}$ est* ***l'évolution observable à partir de** X, où ce dernier est un opérateur autoadjoint (un observable). Une* ***simulation de cette évolution sur un état** ρ **déterminé*** *est la donnée d'un semigroupe $(P_t)_{t\geq 0}$ de probabilités de transition tel que*

$$tr\, \rho\mathcal{T}_t(f(X)) = P_t(f), \; (t \geq 0) \tag{3.1}$$

pour toute fonction borélienne bornée f définie sur le spectre de X.

Etudions maintenant, la simulation du semigroupe quantique considéré par Nelson. Pour simplifier les notations on fixe l'espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$, bien que les conclusions soient également valides sur $L^2(\mathbf{R}^d)$. Sur $\mathcal{H}$ on considère un hamiltonien de la forme $H = -\frac{1}{2}\Delta$, (bien entendu ici $\Delta = d^2/dx^2$). Le semigroupe quantique associé est $\mathcal{T}_t(X) = \exp(itH)X\exp(-itH)$, $(t \geq 0)$.

Supposons que l'état choisi appartienne au sous–ensemble convexe des opérateurs positifs à trace unitaire dont la mesure spectrale par rapport à H est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit X un observable fixé. Alors, pour tout $t \geq 0$, il existe un élément positif $\rho(\cdot,t) \in L^1(\mathbf{R})$, d'intégrale unitaire, tel que

$$\operatorname{tr} \rho\mathcal{T}_t(f(X)) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\rho(x,t)dx,\ (t \geq 0). \tag{3.2}$$

On peut remarquer que lorsque $X = id$ et que ρ est un état pur, alors $\rho(\cdot,t)$ peut être identifié à $|\psi(\cdot,t)|^2$, ψ étant alors une fonction d'onde. En outre, $\rho(\cdot,t)$ satisfait à une équation de Fokker–Planck au sens faible, c'est–à–dire, pour toute $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ à suport compact,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)(\rho(x,t) - \rho(x,s))dx = \int_s^t (\int_{-\infty}^{\infty} (L_u\phi)\rho(x,u)dx)du), \tag{3.3}$$

où L_u est un opérateur différentiel de la forme

$$L_u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,u)\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.4}$$

avec $b(x,u)$ donné, au moins formellement, par l'expression

$$b(x,u) = \Re\frac{\psi'(x,u)}{\psi(x,u)} + \Im\frac{\psi'(x,u)}{\psi(x,u)}. \tag{3.5}$$

L'équation (3.3) est écrite d'habitude comme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = L_t^*\rho = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho - \frac{\partial}{\partial x}(b(.,t)\rho).$$

La simulation du semigroupe quantique dans l'état donné équivaut à construire une diffusion de générateur L. L'existence d'une telle diffusion n'est pas garantie étant donné que b n'est pas bornée, l'ensemble où cette fonction n'est pas définie étant celui des *nodes* de la fonction d'onde qui s'exprime également comme $N = \{(x,t) : \rho(x,t) = 0\}$. Cela nous mène à résoudre un problème de martingales d'un type particulier que nous préciserons dans ce qui suit.

3.1. Le Problème de Martingales Associé à un semigroupe quantique. Etant donné un état $\rho \in \mathcal{B}(h)$, identifié à une fonction $\rho : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ continue intégrable, d'intégrale unitaire, nous appelons N l'ensemble de ses zéros sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$. Soit b une fonction continue définie sur le complémentaire de N. On considère l'opérateur différentiel

$$L_t = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\ (t \geq 0).$$

Choisissant $H = -\frac{1}{2}\Delta$, nous sommes intéressés au cas où ρ est une solution faible de l'équation de Fokker–Planck (3.3).

On introduit ensuite la base stochastique canonique des diffusions $\Omega = C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbf{R}+$; $\mathcal{F}$, la tribu de ses boreliens; $X_t(\omega) = \omega(t)$, pour tous $\omega \in \Omega$, $t \geq 0$; $\mathcal{F}_t$, la tribu engendrée par les X_s pour tout $s \leq t$, $(t \geq 0)$.

Finalement, on note comme d'habitude C_t^f le processus

$$C_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t L_s f(X_s) ds, \quad (t \geq 0), \tag{3.6}$$

où f est une fonction réelle indéfiniment dérivable et bornée.

Définition 3. *Nous dirons que P est une solution du problème de martingales associé à L et ρ si*

(1) *C^f est une P-martingale pour toute fonction réelle f indéfiniment dérivable et bornée;*
(2) *Pour tout $t \in [0, \infty[$, et toute fonction réelle, bornée et continue f,*

$$E(f(X_t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x,t)dx. \tag{3.7}$$

Nous allons résoudre le problème de martingales que nous venons de poser. Une fois résolus les problèmes dérivés de la non définition de b sur tout l'espace, la construction d'une solution se fait comme dans le cas classique de la théorie de Stroock et Varadhan.

Ce type de problème a été étudié par Zheng (1984). Un problème similaire, motivé par l'Optique Quantique a été abordé par Retamal, Saavedra et moi–même dans un article conjoint (Rebolledo–Retamal–Saavedra (1990)). Mon approche ainsi que celle de Zheng possèdent une partie commune, bien qu'elle en ait été prouvée d'une manière différente. Cette partie commune est celle de la construction de P une fois résolues les difficultés techniques liées au choix de ρ et de b. Or, la construction de Zheng est différente de la mienne en ce qui concerne les hypothèses supplémentaires que l'on doit imposer à b et ρ, dans le cas général, pour pouvoir justifier l'existence de la diffusion aproprié.

Nous commençons par un lemme élémentaire.

Lemme 1. *Si b est définie et bornée partout et ρ est en outre strictement positive, alors il existe une solution au Problème de Martingales (L, ρ).*

Preuve. Soit P_0 la probabilité sur Ω selon laquelle X est un mouvement brownien de mesure initiale $\rho(x, 0)dx$. Soit Z le processus:

$$Z_t = \rho(X_0, 0) \exp\left(\int_0^t b(X_s, s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s, s)|^2 ds\right), \tag{3.8}$$

for all $t \geq 0$.

Z est une martingale positive d'espérance 1. On prend P comme la probabilité dont la dérivée de Radon–Nykodim est Z_∞.

Du Théorème de Girsanov on déduit que P est la solution du problème de martingales (L,ρ), puisque sous P le processus $X_t - \int_0^t b(X_s,s)ds$ est un processus de Wiener et

$$E(f(X_t)) = E_0(Z_t f(X_t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x,t)dx\,.$$

□

On remarquera que la continuité du coefficient b, n'a pas été utilisée dans la preuve du lemme. En effet, la conclusion reste vrai pour une fonction bornée et mesurable b.

3.2. Stabilité des solutions. Pour continuer, il faut adapter à notre contexte le Théorème (5.2) de Platen–Rebolledo (1985) (voir également Rebolledo (1980)). On commence par quelques notations. Soit X^n le processus canonique X avec la distribution P^n. Par ailleurs, on définit

$$(3.9)\quad B_t(\omega) := \int_0^t b(\omega(s),s)ds\,;\ B_t^n(\omega) := \int_0^t b^n(\omega(s),s)ds\,,\ (\omega\in\Omega, t\geq 0)\,.$$

où b et b^n sont supposées continues comme fonction des deux variables.

Nous nous plaçons alors dans la situation suivante: nous avons une suite (X^n) de semimartingales continues possédant une décomposition unique

$$(3.10)\qquad X_t^n = W_t + B_t^n\,,$$

où W est le processus de Wiener; par ailleurs,

$$(3.11)\qquad E(f(X_t^n)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho^n(x,t)dx\,,$$

pour toute fonction continue et bornée f.

Nous voulons que (X^n) soit tendue et que chaque point limite satisfasse (3.10) et (3.11) avec B^n et ρ^n remplacés par B et ρ, respectivement.

Pour appliquer le Théorème (5.2) de Platen–Rebolledo (1985), nous devons vérifier les hypothèses suivantes:

(i) faiblement vers $F_0(dx) = \rho(x,0)dx$;
(ii) $\sup_{t\leq N}|B_t^n - B_t(X^n)| \to 0$ en probabilité, pour tout $N\geq 1$
(iii) Pour tout $N\geq 1$, et toute suite de temps d'arrêt T^n, bornés par N, toute suite $\delta^n \in]0,N[$, $\delta^n \searrow 0$, l'on a $B_{T^n+\delta^n}(X^n) - B_{T^n}(X^n) \to 0$ en probabilité.

Lemme 2. *Si (i), (ii), (iii) sont satisfaites, alors (X^n) est tendue et tout point limite produit une solution du problème de martingales associé à l'opérateur L.*

C'est une application directe du Théorème (5.2) de Platen–Rebolledo (1985).

Lemme 3. *Soit (P^n) une suite de probabilités, telle que chaque P_n soit une solutiond'un problème de martingales (L^n, ρ^n), où $L_t^n = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^n(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$, et$\rho^n$ résoud léquation de Fokker–Planck au sens faible. Supposons en outre que $b^n \to b$ locally uniformly on $\mathbf{R}\times \mathbf{R}_+$ et de même $\rho^n \to \rho$. Alors la suite (P^n) est tendue et tout point limite P est une solution du problème de martingales (L,ρ), où $L_t = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$.*

Preuve. Vérifions les hypothèses (i), (ii), (iii). Tout d'abord, l'hypothèse de l'uniforme convergence locale de (p^n) vers ρ entraîne (i); mieux encore, nous avons une propriété plus forte: $F_t^n(dx) = \rho^n(x,t)dx$ converge faiblement vers $F_t(dx) = \rho(x,t)dx$ pour tout t. En particulier, (X_t^n) est $\mathbf{R}$–tendue, pour tout $t \geq 0$ fixé. Alors, étant donnés $N \geq 1$ et $\epsilon > 0$, on peut trouver un sous–ensemble compact $K^{N,\epsilon}$ de $\mathbf{R}$ tel que

$$P^n(\sup_{t\leq N}|\omega(t)| \in K^{N,\epsilon}) \geq 1-\epsilon\,. \tag{3.12}$$

Analysons (ii). Pour que cette hypothèse soit vérifiée, nous devons prouver que

$$P^n(\sup_{t\leq N}|b^n(\omega(t),t) - b(\omega(t),t)| > \eta) \to 0\,, \tag{3.13}$$

pour tout $\eta > 0$, quand $n \nearrow \infty$. Décomposons la probabilité de l'ensemble de l'équation (3.13) comme suit:

$$\begin{aligned}
&P^n(\sup_{t\leq N}|b^n(\omega(t),t) - b(\omega(t),t)| > \eta,\ \sup_{t\leq N}|\omega(t)| \in K^{N,\epsilon})+\\
&P^n(\sup_{t\leq N}|b^n(\omega(t),t) - b(\omega(t),t)| > \eta,\ \sup_{t\leq N}|\omega(t)| \in \mathbf{R}\setminus K^{N,\epsilon})\\
&\leq P^n(\sup_{t\leq N}|b^n(\omega(t),t) - b(\omega(t),t)| > \eta,\ \sup_{t\leq N}|\omega(t)| \in K^{N,\epsilon})+\\
&P^n(\sup_{t\leq N}|\omega(t)| \in \mathbf{R}\setminus K^{N,\epsilon})\\
&< P^n(\sup_{t\leq N}|b^n(\omega(t),t) - b(\omega(t),t)| > \eta,\ \sup_{t\leq N}|\omega(t)| \in K^{N,\epsilon}) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Or, le premier terme tend vers zéro à cause de la convergence uniforme de (b^n) vers b, quand $n \nearrow \infty$. Puis, comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, la relation (3.13) est prouvé.

Vérifions (iii). Il suffit de prouver que

$$P^n(\int_{T^n}^{T^n+\delta^n} |b(\omega(t),t)|dt > \eta) \to 0, \tag{3.14}$$

pour tout $\eta > 0$, si $n \nearrow \infty$.

Nous décomposons la probabilité précédente au moyen d'ensembles compacts $K^{N,\epsilon}$ comme avant, pour obtenir les majorations

$$P^n(\int_{T^n}^{T^n+\delta^n} |b(\omega(t),t)|dt > \eta \sup_{t\leq N}|\omega(t)| \in K^{N,\epsilon}) + \epsilon, \tag{3.15}$$

Sur l'ensemble $\{\omega : \sup_{t\leq N}|\omega(t)| \in K^{N,\epsilon}\}$, $|b(\omega(t),t)|$ est bornée par une constante $\beta > 0$, pour tout $t \in [0,N]$, et $\int_{T^n}^{T^n+\delta^n} |b(\omega(t),t)|dt \leq \beta\delta^n$. Par conséquent, la probabilité dans léquation (3.15) tend vers zéro quand $n \nearrow \infty$, et puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, nous obtenons (3.14).

Par conséquent, les hypothèses (i), (ii), (iii) sont satisfaites; la suite (P^n) est tendue et tout point limite P est une solution du problème de martingales associée à L. Pour terminer il faut montrer que P satisfait la condition

$$E(f(X_t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x,t)dx, \tag{3.16}$$

pour toute fonction continue et bornée f.

Soit $(P^{n(i)})$ une sous-suite convergeant vers P. De la convergence faible on déduit

$$E^{n(k)}(f(X_t)) \to E(f(X_t)),$$

mais $E^{n(k)}(f(X_t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho^{n(k)}(x,t)dx$, et puisque $\rho^{n(k)}(x,t) \to \rho(x,t)$, le résultat (3.16) découle du Théorème de la Convergence Dominée de Lebesgue et la preuve est ainsi achevée. □

Pour aborder maintenant le cas plus général, où b n'est pas défini sur l'ensemble des nodes, nous introduirons une condition sur l'état ρ que l'on choisit pour simuler le semigroupe quantique.

3.3. L'hypothèse d'entropie finie. *Hypothèse (EF):* La fonctionnelle d'entropie de Shannon $H_t(\rho)$ associée à $\rho(.,t)$ est finie pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, où

$$H_t(\rho) = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)\log\rho(x,t)dx \tag{3.17}$$

$$= E(-\log\rho(X_t,t)), \tag{3.18}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}_+$.

On remarquera que $H_t(\rho)$ prend des valeurs sur toute la droite réelle et elle est finie si et seulement si la fonction $\rho(\cdot,t)|\log\rho(\cdot,t)|$ est intégrable au sens de Lebesgue. Que $H_t(\rho)$ prenne la valeur $+\infty$ (respectivement $-\infty$) équivaut à ce que seule $\rho(\cdot,t)(\log\rho(\cdot,t))^+$ (resp. $\rho(\cdot,t)(\log\rho(\cdot,t))^-$ soit intégrable.

S'il existe une solution P au problème de martingales (L,ρ) sous l'hypothèse (EF), on dira que P définit une **diffusion entropique**.

3.4. Existence de diffusions entropiques.

Théorème 4. *Etant donnée une solution faible $\rho(\cdot,\cdot)$ de l'équation de Fokker-Planck (3.1), satisfaisant l'hypothèse d'entropie finie, alors il existe une diffusion X de générateur infinitésimal L, telle que la loi de X_t possède une densité $\rho(x,t)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Pour prouver ce Théorème, nous aurons besoin de quelques lemmes supplémentaires.

Lemme 4. *Si P est une solution du problème de martingales (L,ρ), où ρ satisfait l'hypothèse d'entropie finie* (3.18), *alors*

$$P(\{\omega \in \Omega : \text{ there exists } t \geq 0, \rho(X_t,t) = 0\}) = 0$$

Preuve. D'après (EF), $\log \rho(X_t, t)$ est un processus intégrable. On introduit les temps d'arrêt:

$$T = \inf\{t \geq 0 : \rho(X_t, t) = 0\};$$

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : \rho(X_t, t) \leq \exp(-n)\}, \quad (n \in \mathbf{N})$$

Par convention, l'infimum de l'ensemble vide est ∞. Nous prouverons que $P(T < \infty) = 0$. Or, pour tout $t \geq 0$, $P(T < t)$ est la limite de $P(T_n < t)$ quand n tend vers ∞. Mais $P(T_n < t) = P(-\log \rho(X_t, t) \geq n) \to 0$ si $n \to \infty$ puisque $\log \rho(X_t, t)$ est intégrable. Par conséquent, $P(T < t) = 0$, pour tout $t \geq 0$, i.e. $T = \infty$ P–a.s. □

Etudions maintenant comment l'hypothèse (EF) elimine les explosions.

Lemme 5. *S'il existe une solution P au problème de martingales (L, ρ), avec b mesurable mais éventuellement non borné, et si, en outre, ρ satisfait la condition d'entropie finie, alors le processus (X_t) n'explose pas P-p.s.*

Preuve. Soit $T_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n\}$, $n \in \mathbf{N}$, and $T_\infty = \lim T_n$. Nous prouverons que $P(T_\infty < \infty) = 0$, où P résoud le problème de martingales (L, ρ).

Or, pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbf{N}$, nous avons l'inégalité

$$\limsup_{s \leq t} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,s)(\log \rho(x,s))^+ dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)(\log \rho(x,t))^+ dx, \tag{3.19}$$

d'après le lemme de Fatou puisque $(x,t) \mapsto \rho(x,t)$ est continue et $\rho(\cdot,t)(\log \rho(\cdot,t))^+$ est intégrable.

On choisit ensuite une énumération $(s_m)_m$ de tous les rationnels de $[0,t]$ de sorte que $s_m \to t$ si $m \to \infty$. De (3.19) il découle

$$\sup_m \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, s_m)(\log \rho(x, s_m))^+ dx < \infty, \tag{3.20}$$

Or $G(x) = x(\log x)^+$ est une fonction convexe croissante sur $[0, \infty[$ $(G(0) = 0)$ telle que $\frac{G(x)}{x} \to \infty$ si $x \to \infty$. Alors (3.20) entraîne l'intégrabilité uniforme de la famille $(\rho(\cdot, s_m))_m$. Par conséquent,

$$p(q) = \sup_m \int_{|x| \geq q} \rho(x, s_m) dx,$$

tends vers 0 si $q \to \infty$. Finalement, étant donnés $\epsilon > 0$ et $j \geq 1$ choisissons $q(j)$ tel que $p(q(j)) < \epsilon 2^{-j} t^{-1}$. Alors $P(\exists k \leq [2^j t] : |X_{k2^{-j}}| > q(j)) < [2^j t] p(q(j)) < \epsilon$ pour tout $j \geq 1$. Du lemme de Fatou on déduit:

$$P(T_\infty < \infty) \leq \liminf_{j \to \infty} P(\exists k \leq [2^j t] : |X_{k2^{-j}}| > q(j)) < \epsilon.$$

De la dernière inégalité résulte donc $P(T_\infty < \infty) = 0$. □

Corollaire 2. *Sous l'hypothèse d'entropie finie et si $\rho > 0$, alors il existe une solution au problème de martingales (L, ρ).*

Preuve. Le coefficient b est continu mais non borné. Nous le remplaçons par

$$b_n(x,t) = b(x,t)I_{\{|x|\le n\}},$$

et considérons les temps d'arrêt T_n définis dans a preuve du lemme précédent. Selon la remarque faite après le lemme 1, il existe une solution au problème (L_n,ρ); soit P^n une telle solution. Cette probabilité correspond à la loi du processus arrêté $X_t^n = X_{T_n\wedge t}$, et elle est définie sur la tribu $\mathcal{F}_{T_n}$.

Puisque T_n croît, P^{n+1} coïncide avec P^n sur $\mathcal{F}_{T_n}$. Alors il existe une probabilité P sur $\mathcal{F}_{T_\infty}$ telle que la restriction à chauqe $\mathcal{F}_{T_n}$ soit P^n. Mais alors P est une solution du problème de martingales (L,ρ) puisque $P(T_\infty = \infty) = 1$ d'après le lemme précédent et $\mathcal{F}_{T_\infty} = \mathcal{F}_\infty$, car la filtration est complète. □

Preuve du Théorème 4. Soit g une densité gaussienne sur $\mathbf{R}$. Nous introduisons la procédure de régularisation suivante:

$$\begin{aligned} \rho_n(x,t) &= (1-\frac{1}{n})\rho(x,t) + \frac{1}{n}g(x); \\ b_n(x,t) &= \rho_n(x,t)^{-1}(1-\frac{1}{n})\rho(x,t)b(x,t); \end{aligned}$$

$n \geq 1$.

Alors ρ_n est > 0 et satisfait la condition d'entropie finie; b_n est continue (non bornée). Du corollaire précédent on tirequ'il existe une solution P^n du problème de martingales (L_n,ρ_n) where

$$L_{n,t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\cdot}{\partial x^2} + b_n(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\,.$$

Or, il est évident que, étant donné n'importe quel compact arbitraire $K\times M$ de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$, l'on a

$$\text{(3.21)} \qquad \sup_{(x,t)\in K\times M} |\rho_n(x,t)-\rho(x,t)| \to 0; \quad \sup_{(x,t)\in K\times M} |b_n(x,t)-b(x,t)| \to 0,$$

Par le lemme 3, la suite (P^n) est tendue et tout point limite P est une solution du problème de martingales (L,ρ). La preuve est alors achevée. □

3.5. Propriété de Markov. Pour prouver la propriété markovienne de la solution du problème de martingales que nous venons de construire, nous modifions la méthode utilisée par Zheng (1985), paragraphe 7, pour l'adapter à l'hypothèse de l'entropie finie.

Théorème 5. *Sous les hypothèses du Théorème 4, la diffusion X est un processus markovien.*

Preuve. Reprenons les notations introduites dans la preuve du Théorème 4. Soit P_0 la mesure de Wiener commençant au point 0. Montrons tout d'abord que P est absolument continue par rapport à P_0, la propriété de Markov suivra par un argument de fonctionnelles multiplicatives.

Soit (S_m) une suite de temps d'arrêt définis comme

$$(3.22) \qquad S_m = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t |b(X_s, s)|^2 ds \geq m\}, \quad S = \lim S_m.$$

Tous ces temps d'arrêt prennent des valeurs sur $[0, \infty]$. Considérons ensuite le processus

$$(3.23) \qquad Z_t = \rho(X_0, 0) \exp(\int_0^t b(X_s, s) dX_s - \frac{a}{2} \int_0^t |b(X_s, s)|^2 ds) I_{\{t<S\}},$$

qui correspond à la dérivée de Radon–Nikodym de P par rapport à P_0 comme nous le prouverons ci-dessous.

En effet, Z est une P_0-surmartingale positive qui est une martingale locale positive sur $[0, S[$. En outre, $E_0(Z_0) = 1$. Alors, par le Théorème de Girsanov, P restreinte à $\mathcal{F}_T$ est absolument continue par rapport à P_0, pour tout temps d'arrêt $T < S$.

Nous considérons ensuite les temps d'arrêt T_n introduits dans le lemme 5 précédent: $T_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n\}$. Clairement $T_n < S_n < S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $P(T_n < \infty) \to 0$ quand $n \nearrow \infty$, grâce à l'hypothèse d'entropie finie. Alors, étant donné un ensemble P_0-négligeable N , tenant compte que $N \cap \{T_n = \infty\} \in \mathcal{F}_{T_n}$ et que sur cette tribu P est absolument continue par rapport à P_0, il résulte $P(N \cap \{T_n = \infty\}) = 0$. Finalement, faisant tendre $n \nearrow \infty$, on obtient $P(N) = 0$. Cela prouve l'absolue continuité de P par rapport à P_0 sur toute la tribu $\mathcal{F}_\infty$. Par conséquent, Z est une martingale positive.

On complète la preuve en démontrant que Z_t est une fonctionnelle multiplicative. Nous introduisons d'abord le noyau

(3.24)

$$Q_{st}(x, f) = E_x\{f(X_{t-s}) \exp(\int_s^t b(X_u, s+u) dX_u - \frac{a}{2} \int_s^t |b(X_u, s+u)|^2 du)\},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s < t$, et f fonction mesurable positive, où l'espérance E_x est prise par rapport à la mesure de Wiener partant de x.

De la caractérisation de la dérivée de Radon–Nikodym, et de la propriété markovienne du mouvement brownien, nous avons, pour tous $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} E(I_A f(X_t)) &= E_0(I_A f(X_t) Z_t) \\ &= E_0\left(I_A f(X_t) Z_s \exp\left(\int_s^t b(X_u, u) dX_u - \frac{a}{2} \int_s^t |b(X_u, u)|^2 du\right)\right) \\ &= E_0(I_A Z_s Q_{st}(X_s, f)) = E(I_A Q_{st}(X_s, f)), \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. □

Dans mon article [20], on analyse en outre la question de la reversibilité des diffusions entropiques. Il reste à étudier le problème inverse de celui que nous avons traité ci-dessus. A savoir, étant donné une densité $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ satisfaisant à l'hypothèse d'entropie finie et à l'équation de Fokker-Planck au sens faible, sous quelle hypothèse additionnelle ψ est-elle une solution de l'équation de Schrödinger?

Il me semble nécessaire d'y introduire un Principe Variationnel, dans le style de celui considéré par Guerra et repris par Nelson dans [12] en définissant les diffusions critiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. E.B. Davies. Quantum dynamical semigroups and the neutron diffusion equation. *Rep.Math.Phys.*, 11:169–188, 1977.
2. F. Fagnola, Characterization of isometric and unitary weakly differentiable cocycles in Fock space, *Quantum Probabability and Related Topics*, 1993, vol. VIII, 143–164.
3. F. Fagnola, R. Rebolledo, and C. Saavedra. Quantum flows associated to master equations in quantum optics. *J. Math.Phys.*, 35:1-12, 1994.
4. F. Fagnola, R. Rebolledo, An ergodic theorem in quantum optics, 1995, à paraître dans les actes du colloque en honneur de A. Frigerio, publiées par l'Université d'Udine.
5. F. Fagnola, R. Rebolledo, Sur l'approche de l' équilibre au moyen des flots quantiques, 1995, C.R. Acad.Sci. Paris, sér. I, t.321, 473–476.
6. A. Frigerio, Stationary states of quantum dynamical semigroups, *Comm. in Math. Phys.*, 1978, vol. 63, 269–276.
7. A.Frigerio et M.Verri, Long-time asymptotic properties of dynamical semigroups on W^*-algebras, *Math. Zeitschrift*, 1982, 180, 275–286.
8. A. Kossakowski V. Gorini and E.C.G. Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems. *J. Math. Phys.*, 17:821–825, 1976.
9. G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Commun. Math. Phys.*, 48:119–130, 1976.
10. P.-A. Meyer. *Quantum Probability for Probabilists*, volume 1538 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
11. Nelson, E. (1967) *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press.
12. Nelson, E. (1985) *Quantum Fluctuations*. Princeton University Press.
13. K.R. Parthasarathy and K.B. Sinha. Markov chains as Evans-Hudson diffusions in Fock space. *Séminaire de Probabilités*, XXIV(1426):362–369, 1988–1989. LNM–Springer.
14. K.R. Parthasarathy. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, volume 85 of *Monographs in Mathematics*. Birkhaüser–Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.
15. Platen–Rebolledo (1985) Weak Convergence of Semimartingales and Discretization Methods. Stochastiç Processes and their Appl. 20, 41–58.
16. Protter, P. (1990) *Stochastic Integration and Differential Equations. A New Approach.* Springer–Verlag, 302 p.
17. Rebolledo (1979) La Méthode des Martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi des processus. Bull. Soc. Math. de France, mém. 62, 125 p.
18. Rebolledo (1980) Sur l'existence de solutions á certains probleèmes de semimartingales. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 290, 843–846.
19. Rebolledo, R.–Retamal, J.–Saavedra, C. (1992) Diffusion Processes associated to a Laser Model. Journal of Math. Phys. vol. 33, 826–831.
20. Rebolledo, R. (1992) The Role of weak topologies in Stochastic Mechanics. Ed. Bernoulli, Proceedings IV CLAPEM, Acta Científica Venezolana, Caracas, num. 3, 43–60.
21. Stroock, D.W.–Varadhan, S.R.S (1979) *Multidimensional Diffusions Processes.* Springer, 338 p.

22. K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3rd. edition, 1971.
23. Zheng, W.A. (1985) Tightness results for laws of diffusion processes, application to Stochastic Mechanics, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 21, n°2, 103–124.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE, CASILLA 306, SANTIAGO 22, CHILI.