ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

JEAN PICARD

Transformations et équations anticipantes pour les processus de Poisson

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 1 (1996), p. 111-123

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_111_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.111-123

TRANSFORMATIONS ET EQUATIONS ANTICIPANTES POUR LES PROCESSUS DE POISSON

Jean PICARD

Résumé. Nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution pour des équations stochastiques anticipantes conduites par un processus de Poisson ponctuel. Pour une classe particulière d'équations linéaires, la solution peut s'interpréter comme la densité de Radon-Nikodym d'une transformation anticipante du processus de Poisson.

Abstract. We prove the existence and uniqueness of a solution for stochastic anticipative equations driven by a point Poisson process. For a particular class of linear equations, the solution may be interpreted as the Radon-Nikodym density of an anticipative transformation of the Poisson process.

0. Introduction

Les équations anticipantes sur l'espace de Wiener sont des équations du type

$$Y_t = \eta + \int_0^t b(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dW_s$$

où la condition initiale η et les coefficients b, σ peuvent être aléatoires et dépendre de tout le processus de Wiener W_t. On obtient alors en fait deux équations de natures différentes selon que l'intégrale stochastique anticipante est définie au sens de Stratonovich ou de Skorohod. Lorsque σ est déterministe, la résolution de l'équation de Stratonovich peut se ramener à la résolution d'une équation non anticipante ([5]); si par exemple b et σ sont déterministes ([4]), la solution est $\Phi(t, \eta)$, où $\Phi(t, y)$ est la solution de l'équation de Stratonovich non anticipante avec coefficients b, σ, et condition initiale $Y_0 = y$. La résolution de l'équation de Skorohod est en revanche plus compliquée; ont été abordés les cas où les coefficients sont soit déterministes, soit linéaires ([1]); dans le cas déterministe, on n'obtient le plus souvent que des solutions locales; dans le cas linéaire, la solution de l'équation peut s'interpréter à l'aide d'une densité de Radon-Nikodym pour une transformation de Girsanov anticipante du processus de Wiener.

Nous désirons ici remplacer l'espace de Wiener par un espace de Poisson, le processus de Wiener étant ainsi remplacé par un processus de Poisson ponctuel; nous nous limiterons de plus aux cas où les solutions des équations auront des trajectoires à variation finie. L'analogue de l'équation de Stratonovich est alors une équation ordinaire avec coefficients aléatoires et se résout donc trajectoire par trajectoire. Nous nous intéresserons donc à un analogue de l'équation de Skorohod qui ne peut se résoudre aussi simplement; cependant, le fait que les trajectoires sont à variation finie va nous permettre d'utiliser un calcul stochastique de type L^1 au lieu de L^2, et va beaucoup simplifier le problème par rapport au cas de l'espace de Wiener; un cas particulier des équations que nous allons considérer est étudié dans [3]. Comme pour l'espace de Wiener, une classe d'équations linéaires va s'interpréter comme donnant la densité de Radon-Nikodym pour des transformations de Girsanov anticipantes; cela nous fournira une motivation pour introduire la classe d'équations non linéaires que nous chercherons à résoudre. Signalons qu'une classe d'équations anticipantes d'un type différent est étudié dans [7].

Nous commençons au §1 par des rappels sur le calcul stochastique anticipant pour les espaces de Poisson construit dans [6], expliquons au §2 comment les transformations anticipantes sont reliées à des équations linéaires, puis posons et résolvons le problème des équations non linéaires au §3.

1. Calcul stochastique anticipant

Traduisons pour le cas des processus de Poisson ponctuels les résultats du calcul anticipant de [6] sur l'espace de Poisson. Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace lusinien muni d'une mesure σ-finie μ, et considérons l'espace produit

$$(U,\mathcal{U}) = (\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$$

muni de la mesure

$$\lambda^-(dt,dx) = dt\,\mu(dx).$$

On définit l'espace de Poisson Ω comme l'ensemble des mesures ω sur U à valeurs entières, telles que $\omega(\{t\}\times E) \leq 1$ pour tout t et $\omega(A) < \infty$ dès que $\lambda^-(A) < \infty$. On considère la mesure aléatoire canonique sur U définie par

$$\lambda^+(\omega, A) = \omega(A),$$

la tribu $\mathcal{F}$ sur Ω engendrée par les applications $\lambda^+(A)$, $A \in \mathcal{U}$, et la probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$ qui fait de λ^+ une mesure de Poisson d'intensité λ^-: la variable $\lambda^+(A)$ suit une loi de Poisson de moyenne $\lambda^-(A)$, et si (A_i) est une famille de parties mesurables disjointes de U, alors les variables $\lambda^+(A_i)$ sont indépendantes. Le processus

$$N_t(A) = \lambda^+([0,t]\times A) \tag{1.1}$$

définit ainsi un processus de Poisson ponctuel. Un élément $\omega \in \Omega$ peut être vu comme un système de particules se trouvant aux points (t,x) chargés par ω.

Pour tout (t,x) dans U, on introduit les transformations de Ω dans lui-même définies par

$$(\varepsilon_t^- \omega)(A) = \omega(A \cap (\{t\}^c \times E)), \qquad (\varepsilon_{tx}^+ \omega)(A) = (\varepsilon_t^- \omega)(A) + 1_A(t,x).$$

Ces transformations agissent respectivement en supprimant la particule éventuelle de $\{t\} \times E$, et en ajoutant une particule au point (t,x). La formule fondamentale du calcul anticipant sur Ω est donnée dans le théorème suivant (théorème 1 de [6]).

Théorème 1.1. *Soit $Z = (Z_{tx}(\omega))_{(t,x)\in U}$ un processus mesurable positif tel que $Z_{tx} \circ \varepsilon_{tx}^+ = Z_{tx} \circ \varepsilon_t^-$. Alors*

$$\mathbb{E} \int_U Z_{tx} \lambda^+(dt,dx) = \mathbb{E} \int_U Z_{tx} \lambda^-(dt,dx).$$

Ce résultat se généralise évidemment aux processus réels intégrables; la condition sur Z signifie que la valeur de Z_{tx} ne dépend pas de la présence ou de l'absence d'une particule en (t,x). On remarque que même si Z ne vérifie pas cette condition, les processus $Z_{tx} \circ \varepsilon_t^-$ et $Z_{tx} \circ \varepsilon_{tx}^+$ la vérifient toujours.

Corollaire 1.2. *Soient Z_{tx} et Z'_{tx} deux processus mesurables positifs; alors*

$$\mathbb{E} \int_U Z_{tx} (Z'_{tx} \circ \varepsilon_t^-) \lambda^+(dt,dx) = \mathbb{E} \int_U (Z_{tx} \circ \varepsilon_{tx}^+) Z'_{tx} \lambda^-(dt,dx).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1.1 au processus $(Z_{tx} \circ \varepsilon_{tx}^+)(Z'_{tx} \circ \varepsilon_t^-)$, et de remarquer que $\varepsilon_t^- \omega = \omega$ pour presque tout t relativement à la mesure de Lebesgue, et que $\varepsilon_{tx}^+ \omega = \omega$ pour λ^+ presque tout (t,x). □

Ce corollaire peut être utilisé pour étudier les changements de probabilité résultant de transformations sur le système de particules. Notons que ces transformations vont être aléatoires, et vont donc nécessiter l'introduction d'un espace de probabilité auxiliaire $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$. Le résultat suivant correspond au corollaire 7 de [6].

Corollaire 1.3. *Sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$, soit Λ_0 une variable aléatoire à valeurs dans Ω dont la loi est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ avec densité L. Soit $H_{tx} \geq 0$ un processus sur Ω tel que*

$$\int_U H_{tx} (\lambda^-(dt,dx) + \lambda^+(dt,dx)) \leq 1.$$

On considère alors sur Ω' une variable Λ_1 à valeurs dans Ω dont la loi conditionnelle sachant Λ_0 est définie ainsi:
(a) avec probabilité $\int H(\Lambda_0) d\lambda^-$, le système Λ_1 est obtenu en ajoutant à Λ_0 une particule en un point (t,x) choisi avec pondération $H_{tx}(\Lambda_0)\lambda^-(dt,dx)$;
(b) avec probabilité $\int H(\Lambda_0) d\Lambda_0$, le système Λ_1 est obtenu en enlevant à Λ_0 une particule choisie avec pondération $H_{tx}(\Lambda_0)$;

(c) avec probabilité $1 - \int H(\Lambda_0)(d\lambda^- + d\Lambda_0)$*, on ne fait rien, et on a donc* $\Lambda_1 = \Lambda_0$.
Le nouveau système Λ_1 *a alors une loi absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *avec densité*

$$L' = L + \int \Big(((H_{tx}L) \circ \varepsilon_{tx}^+) - H_{tx}L \Big) \lambda^-(dt, dx) + \int \Big(((H_{tx}L) \circ \varepsilon_t^-) - H_{tx}L \Big) \lambda^+(dt, dx).$$

Démonstration. Si F est une variable aléatoire bornée sur Ω,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'\big[F(\Lambda_1)\big] &= \mathbb{E}'\Big[F(\Lambda_0) + \int_U \big(F(\varepsilon_{tx}^+\Lambda_0) - F(\Lambda_0)\big) H_{tx}(\Lambda_0) \lambda^-(dt, dx) \\ &\qquad + \int_U \big(F(\varepsilon_t^- \Lambda_0) - F(\Lambda_0)\big) H_{tx}(\Lambda_0) \Lambda_0(dt, dx)\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[LF + L \int_U (F \circ \varepsilon_{tx}^+ - F) H_{tx} \lambda^-(dt, dx) \\ &\qquad + L \int_U (F \circ \varepsilon_t^- - F) H_{tx} \lambda^+(dt, dx)\Big]. \end{aligned}$$

On utilise alors le corollaire 1.2 pour se débarasser des opérateurs ε_{tx}^+ et ε_t^- appliqués à F, et on obtient ainsi que cette expression vaut $\mathbb{E}[L'F]$. □

Remarque. Le corollaire 1.3 peut être généralisé à l'étude de transformations où on ajoute et enlève simultanément plusieurs particules (voir [6]).

Nous aurons besoin au §3 de la généralisation suivante du corollaire 1.2.

Corollaire 1.4. *Soit* $\mathcal{F}_t$ *la filtration naturelle (non complétée) du processus de Poisson ponctuel* N_t *de (1.1). Soit* τ *un temps d'arrêt et soient* Z_{tx} *et* Z'_{tx} *deux processus mesurables positifs. Alors*

$$\mathbb{E} \int_0^\tau \int_E Z_{tx} (Z'_{tx} \circ \varepsilon_t^-) \lambda^+(dt, dx) = \mathbb{E} \int_0^\tau \int_E (Z_{tx} \circ \varepsilon_{tx}^+) Z'_{tx} \lambda^-(dt, dx).$$

Démonstration. L'événement $\{s < \tau\}$ est dans $\mathcal{F}_s$, donc est invariant par les opérateurs ε_t^- et ε_{tx}^+ pour tout $t > s$, c'est-à-dire

$$\{s < \tau\} = \{s < \tau \circ \varepsilon_t^-\} = \{s < \tau \circ \varepsilon_{tx}^+\}.$$

En faisant croître s vers t, on obtient

$$\{t \le \tau\} = \{t \le \tau \circ \varepsilon_t^-\} = \{t \le \tau \circ \varepsilon_{tx}^+\}.$$

A l'aide de cette relation, il suffit d'appliquer le corollaire 1.2 aux processus $Z_{tx} 1_{\{t \le \tau\}}$ et $Z'_{tx} 1_{\{t \le \tau\}}$ pour conclure. □

2. Transformations et équations linéaires

Nous allons maintenant décrire une transformation aléatoire de Ω définie par une modification progressive du système de particules; plus précisément, nous allons considérer un processus Λ_t, $t \geq 0$, à valeurs dans Ω, qui va être obtenu à partir de la condition initiale Λ_0 en modifiant à l'instant t l'état du système sur $\{t\} \times E$. Ce processus Λ_t peut être vu comme un analogue des flots de transformations anticipantes sur l'espace de Wiener ([1]), la différence étant que sur l'espace de Wiener, la transformation est déterministe et ne demande donc pas l'introduction d'un espace de probabilité auxiliaire.

Supposons que μ est finie (les sauts des processus que nous allons considérer seront ainsi isolés, ce qui facilitera l'étude). Etant donné un processus borné positif H_{tx} tel que $H_{tx}(\omega) \leq 1$ si ω a une masse en (t,x), nous considérons sur un espace $(\Omega', \mathcal{F}')$ un processus de Markov inhomogène Λ_t à valeurs dans Ω, continu à droite, limité à gauche, et dont les probabilités de transition sont données de la façon suivante; si $\omega([t, t+\Delta t] \times E) = 0$, alors

$$\mathbb{P}'\left[\Lambda_{t+\Delta t} = \omega \mid \Lambda_t = \omega\right] = 1 - \int_t^{t+\Delta t} \int_E H_{sx}(\omega) \lambda^-(ds, dx) + o(\Delta t),$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}'\left[\Lambda_{t+\Delta t} \in \left\{\varepsilon_{sx}^+ \omega;\ t \leq s \leq t+\Delta t,\ x \in A\right\} \mid \Lambda_t = \omega\right] \\ &\quad = \int_t^{t+\Delta t} \int_A H_{sx}(\omega) \lambda^-(ds, dx) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

pour $A \in \mathcal{E}$, et si ω a une masse en (t,x),

$$\mathbb{P}'\left[\Lambda_t = \omega \mid \Lambda_{t-} = \omega\right] = 1 - H_{tx}(\omega),$$

$$\mathbb{P}'\left[\Lambda_t = \varepsilon_t^- \omega \mid \Lambda_{t-} = \omega\right] = H_{tx}(\omega).$$

Autrement dit, partant d'une condition initiale $\Lambda_0 = \omega$, on ajoute à l'instant t une particule en (t,x) avec intensité $H_{tx}(\Lambda_{t-})$ par rapport à λ^-, et une particule de ω située en (t,x) est retirée à l'instant t avec probabilité $H_{tx}(\Lambda_{t-})$. En termes de problèmes de martingales, si g est une fonction borélienne bornée sur Ω, alors

$$\begin{aligned} M_t^g = &g(\Lambda_t) - \int_0^t \int_E \big(g(\varepsilon_{sx}^+ \Lambda_{s-}) - g(\Lambda_{s-})\big) H_{sx}(\Lambda_{s-}) \lambda^-(ds, dx) \\ &- \int_0^t \int_E \big(g(\varepsilon_s^- \Lambda_{s-}) - g(\Lambda_{s-})\big) H_{sx}(\Lambda_{s-}) \Lambda_0(ds, dx) \end{aligned} \tag{2.1}$$

doit être une martingale sous les probabilités $\mathbb{P}'[.|\Lambda_0 = \omega]$.

Nous prenons maintenant une condition initiale Λ_0 de loi $\mathbb{P}$, et désirons calculer la loi $\mathbb{P}_t$ de Λ_t, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_t[d\omega] = \int \mathbb{P}'\left[\Lambda_t \in d\omega \mid \Lambda_0 = \omega_0\right] \mathbb{P}[d\omega_0].$$

On peut montrer que $\mathbb{P}_t$ reste absolument continu par rapport à $\mathbb{P}$, et obtenir une formule pour sa densité L_t (exemple 7 du §3 de [6]). Nous nous intéressons ici à une autre méthode qui va reposer sur l'équation satisfaite par L_t (un analogue de l'équation de Fokker-Planck pour les diffusions). Le corollaire 1.3 donne formellement le passage de L_t à L_{t+dt}, l'équation obtenue étant

$$\begin{aligned} L_t =& 1 + \int_0^t \int_E \Big(((H_{sx} L_{s-}) \circ \varepsilon_s^-) - (H_{sx} L_{s-}) \Big) \lambda^+(ds, dx) \\ &+ \int_0^t \int_E \Big(((H_{sx} L_{s-}) \circ \varepsilon_{sx}^+) - (H_{sx} L_{s-}) \Big) \lambda^-(ds, dx). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Une solution à cette équation est par définition un processus L_t continu à droite, limité à gauche, tel que les deux intégrales sont définies et l'équation est satisfaite $\mathbb{P}$ presque sûrement pour tout t.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses précédentes (en particulier H borné et μ finie), l'équation (2.2) a une unique solution L_t telle que*

$$\mathbb{E} \int_0^t L_{s-} \big(\lambda^+(ds, dx) + \lambda^-(ds, dx) \big) < \infty \tag{2.3}$$

pour tout t. De plus L_t est la densité $d\mathbb{P}_t / d\mathbb{P}$.

La solution de (2.2) va en fait être donnée par une formule du type Feynman-Kac, au moyen d'un procédé que nous allons maintenant décrire; étant donné un instant final T fixé, on considère le processus de Markov inhomogène Γ_t, $t \leq T$ à valeurs dans Ω dont les probabilités de transition retournées $\mathbb{P}''$ sont construites de façon à satisfaire le problème de martingales suivant (on considère la version continue à droite de Γ_t); pour toute fonctionnelle borélienne bornée f sur Ω, le processus

$$\begin{aligned} \overline{M}_t^f =& f(\Gamma_t) - \int_t^T \int_E \big(f(\varepsilon_{sx}^+ \Gamma_s) - f(\Gamma_s) \big) H_{sx}(\varepsilon_{sx}^+ \Gamma_s) \lambda^-(ds, dx) \\ &- \int_t^T \int_E \big(f(\varepsilon_s^- \Gamma_s) - f(\Gamma_s) \big) \frac{H_{sx}(\varepsilon_s^- \Gamma_s)}{H_{sx}(\varepsilon_s^- \Gamma_s) + 1 - H_{sx}(\Gamma_s)} \Gamma_T(ds, dx) \end{aligned} \tag{2.4}$$

doit être une martingale rétrograde sous les probabilités $\mathbb{P}''[.|\Gamma_T = \omega]$. Cela signifie que en partant d'une condition finale Γ_T et en remontant le temps, on ajoute à l'instant t une particule en (t, x) avec intensité $H_{tx}(\varepsilon_{tx}^+ \Gamma_t)$ par rapport à λ^-, et qu'une particule située en (t, x) est retirée à l'instant t avec probabilité

$$\mathbb{P}'' \big[\Gamma_{t-} = \varepsilon_t^- \omega \mid \Gamma_t = \omega \big] = H_{tx}(\varepsilon_t^- \omega) \,/\, \big(H_{tx}(\varepsilon_t^- \omega) + 1 - H_{tx}(\omega) \big). \tag{2.5}$$

Lemme 2.2. *Pour $t \leq T$, le processus*

$$L_t(\omega) = \mathbb{E}'' \big[\Psi_t \mid \Gamma_t = \omega \big]$$

avec

$$\Psi_t = \exp\Big(\int_0^t \int_E \log\big(1 - H_{sx}(\Gamma_s) + H_{sx}(\varepsilon_s^- \Gamma_s)\big)\Gamma_t(ds, dx) \\ + \int_0^t \int_E \big(H_{sx}(\varepsilon_{sx}^+ \Gamma_s) - H_{sx}(\Gamma_s)\big)\lambda^-(ds, dx)\Big)$$

est solution de l'équation (2.2) et satisfait la condition d'intégrabilité (2.3).

Remarque. On peut vérifier que la formule du lemme est bien équivalente à la formule calculée dans [6] pour la densité $d\mathbb{P}_t/d\mathbb{P}$.

Démonstration du lemme 2.2. On peut vérifier que le processus L_t ainsi défini est bien continu à droite, limité à gauche, et que

$$\sup_{s \le t} L_s \le \exp C\big(t + \lambda^+([0,t] \times E)\big), \tag{2.6}$$

ce qui permet d'obtenir la condition (2.3). Pour montrer que L_t est solution de (2.2), on peut considérer séparément les intervalles de temps où il n'y a pas de particules de ω, et les instants où se trouvent ces particules. Si $\omega([t, t + \Delta t] \times E) = 0$, nous écrivons

$$L_{t+\Delta t}(\omega) = \Big(1 + \int_t^{t+\Delta t} \int_E \big(H_{sx}(\varepsilon_{sx}^+ \omega) - H_{sx}(\omega)\big)\lambda^-(ds, dx) + O\big((\Delta t)^2\big)\Big) \\ \mathbb{E}''\big[\Psi_t \mid \Gamma_{t+\Delta t} = \omega\big]$$

et la propriété de Markov montre que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}''\big[\Psi_t \mid \Gamma_{t+\Delta t} = \omega\big] \\
&\quad = \mathbb{E}''\big[L_t(\Gamma_t) \mid \Gamma_{t+\Delta t} = \omega\big] \\
&\quad = L_t(\omega) + \mathbb{E}''\Big[\int_t^{t+\Delta t} \int_E \big(L_t(\varepsilon_{sx}^+ \Gamma_s) - L_t(\Gamma_s)\big) H_{sx}(\varepsilon_{sx}^+ \Gamma_s)\lambda^-(ds, dx) \;\Big|\; \Gamma_{t+\Delta t} = \omega\Big] \\
&\quad = L_t(\omega) + \int_t^{t+\Delta t} \int_E \big(L_t(\varepsilon_{sx}^+ \omega) - L_t(\omega)\big) H_{sx}(\varepsilon_{sx}^+ \omega)\lambda^-(ds, dx) + O((\Delta t)^2)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le problème de martingales (2.4) pour $f = L_t$; cette fonctionnelle n'est en fait pas bornée, mais comme H est borné et μ finie, on peut vérifier que $\sup_{t \le T} \Gamma_t([0,T] \times E)$ a des moments exponentiels sous $\mathbb{P}''[.|\Gamma_T = \omega]$; et (2.6) permet alors de montrer que $\overline{M}^f$ satisfait une condition d'intégrabilité suffisante pour être une martingale rétrograde. On obtient ainsi

$$L_{t+\Delta t}(\omega) = L_t(\omega) + \int_t^{t+\Delta t} \int_E \big((H_{sx} L_t)(\varepsilon_{sx}^+ \omega) - (H_{sx} L_t)(\omega)\big)\lambda^-(ds, dx) + O\big((\Delta t)^2\big).$$

Comme $L_t \circ \varepsilon_{sx}^+$ tend vers $L_{s-} \circ \varepsilon_{sx}^+$ lorsque t croît vers s, on peut en déduire que l'équation (2.2) est bien satisfaite en dehors des instants de saut. D'autre part, en un instant t tel que ω a une masse en (t,x),

$$\begin{aligned}L_t(\omega) &= \big(1-H_{tx}(\omega)+H_{tx}(\varepsilon_t^-\omega)\big)\mathbb{E}''\big[L_{t-}(\Gamma_{t-})\mid\Gamma_t=\omega\big]\\ &= \big(1-H_{tx}(\omega)+H_{tx}(\varepsilon_t^-\omega)\big)\Big(L_{t-}(\omega)\\ &\qquad+\big(L_{t-}(\varepsilon_t^-\omega)-L_{t-}(\omega)\big)\mathbb{P}''\big[\Gamma_{t-}=\varepsilon_t^-\omega\mid\Gamma_t=\omega\big]\Big)\\ &= L_{t-}(\omega)+(H_{tx}L_{t-})(\varepsilon_t^-\omega)-(H_{tx}L_{t-})(\omega)\end{aligned}$$

d'après (2.5). Le processus L_t vérifie donc bien l'équation (2.2). □

Démonstration du théorème 2.1. Comme nous avons déjà montré l'existence d'une solution, il suffit de vérifier que si L_t est une solution vérifiant la condition d'intégrabilité (2.3), alors c'est nécessairement la densité de $\mathbb{P}_t$; nous fixons un temps $T>0$, considérons une fonctionnelle bornée $f:\Omega\to\mathbb{R}$, et posons

$$F_t(\omega)=\mathbb{E}'\big[f(\Lambda_T)\mid\Lambda_t=\omega\big]$$

pour $0\le t\le T$. Alors $F_t(\Lambda_t)$ est une martingale; en utilisant aussi le problème de martingales (2.1) pour $g=F_{t+\Delta t}$, on obtient

$$\begin{aligned}F_t(\omega) &= \mathbb{E}'\big[F_{t+\Delta t}(\Lambda_{t+\Delta t})\mid\Lambda_t=\omega\big]\\ &= F_{t+\Delta t}(\omega)+\mathbb{E}'\Big[\int_t^{t+\Delta t}\int_E\big(F_{t+\Delta t}(\varepsilon_{sx}^+\Lambda_{s-})-F_{t+\Delta t}(\Lambda_{s-})\big)H_{sx}(\Lambda_{s-})\lambda^-(ds,dx)\\ &\qquad+\int_t^{t+\Delta t}\int_E\big(F_{t+\Delta t}(\varepsilon_s^-\Lambda_{s-})-F_{t+\Delta t}(\Lambda_{s-})\big)H_{sx}(\Lambda_{s-})\Lambda_0(ds,dx)\;\Big|\;\Lambda_t=\omega\Big].\end{aligned}$$

Comme précédemment, en étudiant séparément les intervalles de temps où ω n'a pas de masse, et les instants où se trouvent ces masses, on peut en déduire que $F_t(\omega)$ est solution de l'équation rétrograde

$$\begin{aligned}F_t(\omega)=&f(\omega)+\int_t^T\int_E\big(F_s(\varepsilon_{sx}^+\omega)-F_s(\omega)\big)H_{sx}(\omega)\lambda^-(ds,dx)\\ &+\int_t^T\int_E\big(F_s(\varepsilon_s^-\omega)-F_s(\omega)\big)H_{sx}(\omega)\omega(ds,dx).\end{aligned}$$

Avec cette équation et (2.2), on montre que

$$\begin{aligned}F_TL_T=F_0+\int_0^T\int_E\Big(&(F_s\circ\varepsilon_{sx}^+)((H_{sx}L_{s-})\circ\varepsilon_s^-)\\ &-(F_s\circ\varepsilon_s^-)((H_{sx}L_{s-})\circ\varepsilon_{sx}^+)\Big)(\lambda^+(ds,dx)-\lambda^-(ds,dx)).\end{aligned}$$

Les processus F et H sont bornés, et le processus L vérifie par hypothèse une condition d'intégrabilité (2.3) qui permet d'appliquer la formule du théorème 1.1 et d'obtenir que dans cette expression, l'intégrale est d'espérance nulle. Donc

$$\mathbb{E}_T[f(.)]=\mathbb{E}\big[\mathbb{E}'[f(\Lambda_T)|\Lambda_0]\big]=\mathbb{E}[F_0]=\mathbb{E}[F_TL_T]=\mathbb{E}[L_Tf(.)],$$

ce qui montre que L_T est la densité de $\mathbb{P}_T$. □

3. Equations non linéaires

Nous désirons étudier une généralisation non linéaire de l'équation (2.2). Si les opérateurs ε_{sx}^{+} et ε_{s}^{-} sont absents, l'équation peut sous certaines hypothèses se résoudre trajectoire par trajectoire (c'est l'analogue des équations de Stratonovich). Les termes faisant intervenir ε_{sx}^{+} et ε_{s}^{-} ont en fait des comportements différents; pour mieux le comprendre, nous étudions d'abord deux cas particuliers, chacun faisant intervenir un seul de ces deux opérateurs. Dans ces deux cas, nous supposons que E est réduit à un point, de sorte que λ^{+} est réduit à un processus de Poisson $N_t = \lambda^{+}([0,t] \times E)$ de paramètre $\mu = \mu(E)$; l'espace est muni de la filtration naturelle $\mathcal{F}_t$ de N_t.

Exemple 1. La première équation que nous considérons est

$$Y_t = \eta + \int_0^t g(s, Y_s \circ \varepsilon_s^{-}) dN_s.$$

Ceci n'est en fait pas vraiment une équation, mais plutot une formule permettant de donner la solution par récurrence sur N_t; en effet, elle exprime Y_t sur $\{N_t = n\}$ en fonction de Y_s, $s \le t$, sur $\{N_t = n-1\}$. La même remarque permet d'étudier une classe d'équations plus générale faisant intervenir ε_s^{-} (voir [3]). Cette méthode ne peut toutefois pas être appliquée lorsque le nombre de sauts n'est pas fini.

Exemple 2. La seconde équation est

$$Y_t = \eta + \int_0^t f(s, Y_s \circ \varepsilon_s^{+}) ds. \tag{3.1}$$

Cette équation ne peut pas se résoudre comme la précédente, le processus Y_t sur $\{N_t = n\}$ étant exprimé en fonction de Y_s, $s \le t$ sur $\{N_t = n+1\}$. Nous allons utiliser la méthode des approximations successives. Nous supposons la variable η bornée, la fonction $f(t,y)$ bornée et K-lipschitzienne par rapport à y, et pour tout processus Y_t absolument continu, nous définissons $\phi_t(Y)$ comme le membre de droite de (3.1). Soit τ un temps d'arrêt; alors, en appliquant le corollaire 1.4,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{t \le \tau} |\phi_t(Y) - \phi_t(Y')| &\le K \mathbb{E} \int_0^{\tau} \big(|Y_t - Y'_t| \circ \varepsilon_t^{+}\big) dt \\
&= \frac{K}{\mu} \mathbb{E} \int_0^{\tau} |Y_t - Y'_t| dN_t \\
&\le \frac{K}{\mu} \mathbb{E}\big[N_\tau \sup_{t \le \tau} |Y_t - Y'_t|\big].
\end{aligned}$$

On prend pour τ le $n$ème temps de saut de N, de sorte que $N_\tau = n$. L'application qui au processus Y fait correspondre le processus $\phi(Y)$ est ainsi contractante pour la norme

$$\|Y\| = \mathbb{E} \sup_{t \le \tau} |Y_t|$$

pourvu que $\mu > Kn$, et dans ce cas les approximations successives convergent sur $\{t \leq \tau\}$. Mais les lois des processus de Poisson correspondant aux diverses valeurs de μ sont toutes équivalentes entre elles sur les intervalles de temps finis, donc on peut faire varier μ; on peut ainsi obtenir la convergence des approximations successives en probabilité sur tout intervalle de temps borné, et vérifier que la limite est une solution de l'équation (la méthode va être détaillée dans le cas général étudié ci-dessous).

On remarque que dans ces deux exemples, on peut remplacer Y_s par Y_{s-}; pour le premier, Y ne saute qu'aux temps de saut de N, donc $Y \circ \varepsilon_s^-$ est continu en s; pour le second, Y est continu.

En revenant à un espace E général, considérons deux fonctions mesurables

$$f, g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E \times \mathbb{D}_d \times \mathbb{D}_d \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

où $\mathbb{D}_d$ est l'espace de Skorohod des fonctions continues à droite, limitées à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$; les hypothèses que nous ferons impliqueront que les valeurs de f et g en (ω, t, x, y, y') ne dépendent pas des trajectoires de y et y' après l'instant t. L'équation non linéaire que nous allons étudier est

$$Y_t = \eta + \int_0^t \int_E f(s, x, Y, Y \circ \varepsilon_{sx}^+) \lambda^-(ds, dx) + \int_0^t \int_E g(s, x, Y, Y \circ \varepsilon_s^-) \lambda^+(ds, dx), \quad (3.2)$$

où η est est une condition initiale aléatoire; une solution de cette équation est par définition un processus continu à droite, limité à gauche, tel que les deux intégrales sont bien définies, et l'équation est vérifiée presque sûrement pour tout t.

Théorème 3.1. *Soit h et $\widetilde{h}$ deux fonctions positives définies sur $\mathbb{R}_+ \times E$ telles que $\widetilde{h} \leq h$ et*

$$\int_0^t \int_E h(s, x) \max\big(\widetilde{h}(s, x), 1\big) \lambda^-(ds, dx) < \infty \quad (3.3)$$

pour tout t. Supposons que

$$\big|f(t, x, Y, Z) - f(t, x, Y', Z')\big| \leq h(t, x) \sup_{s<t} |Y_s - Y'_s| + \widetilde{h}(t, x) \sup_{s<t} |Z_s - Z'_s|, \quad (3.4)$$

$$\big|g(t, x, Y, Z) - g(t, x, Y', Z')\big| \leq h(t, x) \sup_{s<t} \big(|Y_s - Y'_s| + |Z_s - Z'_s|\big), \quad (3.5)$$

$$\big|f(t, x, 0, 0)\big| + \big|g(t, x, 0, 0)\big| \leq h(t, x), \quad (3.6)$$

et que la variable η est bornée. Alors l'équation (3.2) a au moins une solution. Si la condition (3.6) est remplacée par

$$\big|f(t, x, Y, Z)\big| + \big|g(t, x, Y, Z)\big| \leq h(t, x), \quad (3.7)$$

alors la solution est unique.

Avant le théorème, nous allons considérer un cas particulier. Nous désignons par $\mathcal{F}_t$ la filtration naturelle du processus de Poisson ponctuel N_t de (1.1), et considérons la famille de temps d'arrêt

$$\tau(K) = \inf\big\{t;\ \int_0^t \int_E h(s,x)\big(\lambda^+(dt,dx) + \lambda^-(dt,dx)\big) \geq K\big\}.$$

L'idée va être d'utiliser le changement de temps défini par cette famille; de plus, pour éviter des découpages du temps en intervalles aléatoires suffisamment petits, nous utilisons sur l'espace des processus une norme avec poids exponentiel (méthode inspirée de [2]).

Proposition 3.2. *Sous les hypothèses du théorème 3.1 (sauf "η bornée" qui est remplacé par "η intégrable"), et si de plus $\widetilde{h}(t,x) \leq \alpha$ pour une constante $\alpha < 1$, alors pour tout $\beta > 2/(1-\alpha)$, l'équation (3.2) admet une solution Y et une seule telle que*

$$\|Y\| = \mathbb{E}\int_0^\infty e^{-\beta K} \sup_{t<\tau(K)} |Y_t|\, dK < \infty. \tag{3.8}$$

Démonstration de la proposition 3.2. Notons $\mathcal{L}$ l'espace de Banach des processus Y vérifiant (3.8), muni de la norme $\|.\|$, et désignons par $\phi_t(Y)$ le membre de droite de (3.2) lorsqu'il est défini. En particulier on peut vérifier d'après (3.6) que $\phi(0)$ est défini et est dans $\mathcal{L}$. Si $\phi_t(Y)$ et $\phi_t(Y')$ sont définis et en posant $V_t = \sup_{s<t}|Y_s - Y'_s|$, les hypothèses (3.4) et (3.5) impliquent que

$$\begin{aligned}|\phi_t(Y) - \phi_t(Y')| \leq &\int_0^t \int_E \big(V_s h(s,x) + (V_s \circ \varepsilon^+_{sx})\widetilde{h}(s,x)\big)\lambda^-(ds,dx)\\ &+ \int_0^t \int_E (V_s + V_s \circ \varepsilon^-_s) h(s,x)\lambda^+(ds,dx),\end{aligned}$$

donc si τ est un temps d'arrêt, en appliquant le corollaire 1.4,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\sup_{t<\tau}|\phi_t(Y) - \phi_t(Y')|\\ &\leq \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau \int_E \big(V_t h(t,x) + (V_t \circ \varepsilon^+_{tx})\widetilde{h}(t,x)\big)\lambda^-(dt,dx)\\ &\qquad + \int_0^{\tau-}\int_E V_t h(t,x)\lambda^+(dt,dx) + \int_0^\tau \int_E (V_t \circ \varepsilon^-_t) h(t,x)\lambda^+(dt,dx)\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[2\int_0^\tau \int_E V_t h(t,x)\lambda^-(dt,dx) + \int_0^\tau \int_E V_t \widetilde{h}(t,x)\lambda^+(dt,dx)\\ &\qquad + \int_0^{\tau-}\int_E V_t h(t,x)\lambda^+(dt,dx)\Big]\\ &\leq 2\mathbb{E}\int_0^{\tau-} V_t h(t,x)(\lambda^-(dt,dx) + \lambda^+(dt,dx)) + \alpha\mathbb{E}V_\tau\end{aligned}$$

où, pour la dernière inégalité, on a séparé dans les intégrales sur $[0,\tau]$ la contribution de l'instant τ, et on a utilisé $\widetilde{h} \leq h$ et $\widetilde{h} \leq \alpha$. Nous appliquons cette estimation au temps $\tau = \tau(K)$. On obtient alors, en changeant de temps dans l'intégrale, que

$$\mathbb{E} \sup_{t<\tau(K)} \left|\phi_t(Y) - \phi_t(Y')\right| \leq 2\mathbb{E} \int_0^K V_{\tau(\kappa)} d\kappa + \alpha \mathbb{E} V_{\tau(K)},$$

et on en déduit que

$$\|\phi(Y) - \phi(Y')\| \leq (\alpha + 2/\beta) \int_0^\infty e^{-\beta K} \mathbb{E}[V_{\tau(K)}] dK = (\alpha + 2/\beta) \|Y - Y'\|.$$

En reprenant ces calculs pour $Y' = 0$, on peut vérifier que ϕ envoie $\mathcal{L}$ dans lui-même. L'application ϕ devient ainsi une contraction sur $\mathcal{L}$, donc a un unique point fixe. □

Démonstration du théorème 3.1. Lorsque nous ne supposons plus $\widetilde{h} \leq \alpha < 1$, il nous faut changer de probabilité (comme dans l'exemple 2); posons

$$a(t,x) = \max(2\widetilde{h}(t,x), 1).$$

On peut considérer la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ pour laquelle λ^+ est une mesure de Poisson d'intensité

$$\widetilde{\lambda}(dt,dx) = a(t,x)\lambda^-(dt,dx).$$

L'équation (3.2) peut s'écrire sous la forme d'une équation conduite par $\widetilde{\lambda}$ et λ^+; la fonction g est inchangée, et la fonction f est remplacée par f/a; en particulier, les propriétés (3.4), (3.5), (3.6) s'étendent avec la même fonction h, mais $\widetilde{h}$ est remplacé par $\widetilde{h}/a$ qui est majoré par $\alpha = 1/2$; de plus, la fonction h est $\widetilde{\lambda}$ intégrable d'après (3.3), et la variable η étant supposée bornée est bien intégrable sous $\widetilde{\mathbb{P}}$. Par la proposition 3.2, on obtient donc l'existence d'une solution dans un espace $\mathcal{L}$ muni d'une norme $\|.\|$ définie comme en (3.8), mais relativement à $\widetilde{\mathbb{P}}$; les deux probabilités $\mathbb{P}$ et $\widetilde{\mathbb{P}}$ étant équivalentes sur les intervalles de temps finis (λ^- et $\widetilde{\lambda}$ sont équivalentes et coïncident sauf sur une partie qui est de mesure finie pour les deux mesures), on a aussi existence d'une solution sous $\mathbb{P}$, c'est-à-dire satisfaisant l'équation $\mathbb{P}$-presque sûrement. Quant à l'unicité, on vérifie facilement que sous la condition supplémentaire (3.7), toute solution Y satisfait nécessairement $\|Y\| < \infty$, avec à nouveau la norme (3.8) définie relativement à $\widetilde{\mathbb{P}}$. □

Bibliographie

[1] R. Buckdahn, Anticipative Girsanov transformations and Skorohod stochastic differential equations, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **111** (1994), Number 533.

[2] D. Feyel, Sur la méthode de Picard (EDO et EDS), dans: *Séminaire de Probabilités XXI*, Lect. N. Math. **1247**, Springer, 1987.

[3] J.A. León, J. Ruiz de Chávez et C. Tudor, Anticipating semilinear stochastic equations on the Poisson space, à paraître.

[4] D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics*, Probab. and Applic., Springer, 1995.

[5] D. Ocone et E. Pardoux, A generalized Ito-Ventzell formula, Application to a class of anticipating stochastic differential equations, *Ann. Institut H. Poincaré, Probab. Stat.* **25** (1989), 1, 39–72.

[6] J. Picard, Formules de dualité sur l'espace de Poisson, *Ann. Institut H. Poincaré, Probab. Stat.*, à paraître.

[7] N. Privault, Linear Skorohod stochastic differential equations on Poisson space, à paraître.

J.P., Laboratoire de Mathématiques Appliquées, URA 1501 du CNRS, Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand), 63177 Aubière Cedex, France.

E-mail: picard@ucfma.univ-bpclermont.fr