

FRANÇOIS GEOFFRIAU

**Sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une
algèbre de Takiff**

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 1, n° 2 (1994), p. 15-31

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1994__1_2_15_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Takiff

FRANÇOIS GEOFFRIAU

RÉSUMÉ — L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple est un module libre sur son centre. Le but de cet article est de démontrer, par la méthode de Kostant ([5]), un résultat analogue pour les algèbres de Takiff associées à une algèbre de Lie semi-simple.

On the center of the enveloping algebra of a Takiff algebra

ABSTRACT — The enveloping algebra of a semisimple Lie algebra is a free module over its center. We prove (with the Kostant method [5]) a similar result for the Takiff algebra associated to a semisimple Lie algebra.

1. INTRODUCTION

1.1. — Dans cet article, $\mathbf{k}$ est un corps commutatif, algébriquement clos et de caractéristique nulle. Tous les espaces vectoriels et algèbres considérés sont définis sur $\mathbf{k}$, et les algèbres de Lie sont, sauf mention du contraire, de dimension finie. Nous renvoyons à [4] pour les concepts généraux utilisés.

1.2. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de rang ℓ . Notons $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Takiff associée à $\mathfrak{g}$; c'est le produit semi-direct de $\mathfrak{g}$ par son espace vectoriel sous-jacent (considéré comme algèbre de Lie abélienne), relativement à la représentation adjointe. Comme espace vectoriel, $\tilde{\mathfrak{g}}$ s'identifie à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et les crochets sont donnés par

$$[(x_0, x_1), (y_0, y_1)] = ([x_0, y_0], [x_0, y_1] + [x_1, y_0])$$

pour tous $(x_0, x_1), (y_0, y_1) \in \tilde{\mathfrak{g}}$.

Nous considérerons $\mathfrak{g}$ comme une sous-algèbre de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par l'injection qui à $x \in \mathfrak{g}$ associe $(x, 0) \in \tilde{\mathfrak{g}}$.

1.3. – L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ n'étant pas semi-simple, sa forme de Killing est dégénérée, mais il existe une forme bilinéaire $\mathcal{B}$ non dégénérée et invariante sous l'action de $\tilde{\mathfrak{g}}$ définie par

$$\mathcal{B}((x_0, x_1), (y_0, y_1)) = \mathcal{K}(x_0, y_1) + \mathcal{K}(x_1, y_0)$$

où $\mathcal{K}$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Ceci permet d'identifier $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ en tant que $\tilde{\mathfrak{g}}$ -modules.

1.4. – Soit N l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$. Soit P et $\tilde{P}$ les ensembles des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ et de $\tilde{\mathfrak{g}}$ respectivement (un élément d'une algèbre de Lie est dit régulier si son centralisateur est de dimension minimale).

D'après [6] 3.8, un élément (x_0, x_1) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ est régulier si et seulement si x_0 est un élément régulier de $\mathfrak{g}$.

1.5. – Soit J l'ensemble des fonctions polynomiales de $S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ invariantes sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ et J_+ l'ensemble des éléments de J sans terme constant. Notons $\tilde{V}$, l'ensemble des zéros de l'idéal $J_+ S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ de $S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$.

Soit $p_1, \dots, p_\ell$ des générateurs homogènes et algébriquement indépendants de l'algèbre des polynômes $\mathfrak{g}$ -invariants de $S(\mathfrak{g}^*)$ ([4] 7.3.5 et 11.1.4).

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq \ell$, définissons les fonctions polynomiales P_i, Q_i sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ par : pour tout $x = (x_0, x_1) \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$P_i(x_0, x_1) = p_i(x_0),$$

$$Q_i(x_0, x_1) = dp_i(x_0).x_1.$$

D'après [6] 4.5(ii), la famille de polynômes $(P_i, Q_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ est un système de générateurs homogènes et algébriquement indépendants de J . L'ensemble $\tilde{V}$ est alors l'ensemble des zéros de la famille de polynômes $(P_i, Q_i)_{1 \leq i \leq \ell}$,

$$\tilde{V} = \{(x_0, x_1) \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid p_i(x_0) = 0, dp_i(x_0).x_1 = 0, i = 1, \dots, \ell\}.$$

L'isomorphisme de $\tilde{\mathfrak{g}}$ -modules entre $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ permet, par prolongement, d'identifier $S(\tilde{\mathfrak{g}})$ et $S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ en tant que $\tilde{\mathfrak{g}}$ -modules. Par conséquent $Y(\tilde{\mathfrak{g}})$, l'ensemble des éléments $\tilde{\mathfrak{g}}$ -invariants de $S(\tilde{\mathfrak{g}})$, s'identifiant à J , est lui aussi un anneau de polynômes ainsi que, par symétrisation, $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$ le centre de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

1.6. – Soit $\tilde{G}$ le groupe adjoint algébrique de $\tilde{\mathfrak{g}}$. C'est le groupe engendré par les automorphismes élémentaires de $\tilde{\mathfrak{g}}$, ([2] proposition 1 p159, théorème 14 p175 et corollaire 3 p123) puisque l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ est engendrée par ses éléments nilpotents (en effet, $\mathfrak{g}$ étant semi-simple, est engendrée par ses éléments nilpotents et tous les éléments de $(0, \mathfrak{g})$ sont nilpotents).

Soit G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$, il s'identifie à un sous-groupe de $\tilde{G}$ et ce dernier est engendré par G et les exponentielles des éléments de $\text{ad}(0, \mathfrak{g})$.

1.7. – Pour $x \in \mathfrak{g}$, le rang de la famille $(dp_1(x), \dots, dp_\ell(x))$ sera noté $\text{rg } d\pi_x$.

2. IRRÉDUCTIBILITÉ DE LA VARIÉTÉ $\tilde{V}$

2.1. LEMME – L'ensemble $\tilde{V} \cap \tilde{P}$ est un ouvert non vide de $\tilde{V}$ et il se compose d'une seule $\tilde{G}$ -orbite.

DÉMONSTRATION – D'après [4] 1.11.5, $\tilde{P}$ est une partie ouverte de $\tilde{g}$ et donc $\tilde{V} \cap \tilde{P}$ est une partie ouverte de $\tilde{V}$. Il est clair que les ensembles $\tilde{V}$ et $\tilde{P}$ sont stables sous l'action de $\tilde{G}$.

D'après [4] 8.1.3(i), les zéros de la famille $p_1, \dots, p_\ell$ sont les éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$ et pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $Q_i(x, 0) = dp_i(x).0 = 0$, $i = 1 \dots \ell$, ainsi $\tilde{V} \cap \mathfrak{g} = N$.

Comme (x_0, x_1) est régulier dans $\tilde{g}$ si et seulement si x_0 est régulier dans $\mathfrak{g}$, $\tilde{V} \cap \tilde{P} \cap \mathfrak{g} = N \cap P$. L'ensemble $N \cap P$ est non vide d'après [4] 8.1.1(i) et donc $\tilde{V} \cap \tilde{P}$ est non vide.

Soit $(z_0, z_1) \in \tilde{V} \cap \tilde{P}$, z_0 est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}$. Alors pour tout $y \in \mathfrak{g}$, $e^{\text{ad}(0,y)}(z_0, z_1) = (z_0, z_1 + [y, z_0])$. Cet élément appartient à $\tilde{V}$, d'où

$$dp_i(z_0).(z_1 + [y, z_0]) = Q_i(z_0, z_1 + [y, z_0]) = 0.$$

Il en résulte que $z_1 + [y, z_0]$ est inclus dans $\bigcap_{i=1 \dots \ell} \ker dp_i(z_0)$. Or z_0 étant régulier, ces deux ensembles sont des sous-espaces affines de $\mathfrak{g}$ de dimension $n - \ell$. Ils sont donc égaux, et il existe $y \in \mathfrak{g}$ tel que

$$\begin{aligned} z_1 + [y, z_0] &= 0, \\ e^{\text{ad}(0,y)}(z_0, z_1) &= (z_0, 0). \end{aligned}$$

Ainsi (z_0, z_1) et z_0 appartiennent à la même orbite.

D'après [4] 8.1.3(iv), l'ensemble $N \cap P$ est constitué d'une seule orbite sous l'action de G . Ainsi $\tilde{V} \cap \tilde{P}$ est constitué d'une seule $\tilde{G}$ -orbite.

2.2. LEMME – Soit X la variété des zéros communs d'une famille de r polynômes sur $\mathbf{k}^n$. Si X est la réunion d'une famille de fermés irréductibles $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que

$$\dim F_i < \dim F_1 = n - r \quad \forall i = 2, \dots, n$$

alors X est une variété irréductible.

DÉMONSTRATION – Soit Y une composante irréductible de X , alors

$$Y = Y \cap X = Y \cap \bigcup F_i = \bigcup Y \cap F_i$$

Pour chaque i , $Y \cap F_i$ est une partie fermée de Y , donc Y étant irréductible, toutes les parties $Y \cap F_i$ sont vides sauf une. Ainsi, il existe un entier i tel que $Y \subseteq F_i$. Or, la variété X étant définie par une famille de r polynômes, ses composantes irréductibles ont une dimension supérieure ou égale à $n - r$ ([8] corollaire 5 p57). Donc d'après [3] proposition 2 p91, $n - r \leq \dim Y \leq \dim F_i$, et $i = 1$. Par conséquent X , réunion de ses composantes irréductibles, est égal à F_1 qui est irréductible.

2.3. — Nous avons montré (lemme 2.1) que la sous-variété $\tilde{V} \cap \tilde{P}$ est un ouvert non vide de $\tilde{V}$ composé d'une seule $\tilde{G}$ -orbite. Donc $\tilde{V} \cap \tilde{P}$ est irréductible de dimension

$$\dim \tilde{G}.x = \dim \tilde{\mathfrak{g}} - \dim \tilde{\mathfrak{g}}^x = \dim \tilde{\mathfrak{g}} - \chi(\tilde{\mathfrak{g}}) = 2(\dim \mathfrak{g} - \ell)$$

où $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$ est nilpotent régulier et où $\chi(\tilde{\mathfrak{g}}) = 2\ell$ est l'indice de $\tilde{\mathfrak{g}}$ ([6] 2.8).

2.4. THÉORÈME — Pour toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, la variété $\tilde{V}$ est irréductible.

DÉMONSTRATION — Supposons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit produit de deux algèbres de Lie semi-simples $\mathfrak{g}^{(1)}$ et $\mathfrak{g}^{(2)}$. Alors les algèbres $S(\mathfrak{g}^{(1)*})$ et $S(\mathfrak{g}^{(2)*})$ s'injectent naturellement dans $S(\mathfrak{g}^*)$. Si $(p_1^{(1)}, \dots, p_{\ell(1)}^{(1)})$ (resp. $(p_1^{(2)}, \dots, p_{\ell(2)}^{(2)})$) est une famille de générateurs homogènes et algébriquement indépendants de l'algèbre des polynômes $\mathfrak{g}^{(1)}$ -invariants (resp. $\mathfrak{g}^{(2)}$ -invariants) de $S(\mathfrak{g}^{(1)*})$ (resp. $S(\mathfrak{g}^{(2)*})$) alors la famille de polynômes $(p_1^{(1)}, \dots, p_{\ell(1)}^{(1)}, p_1^{(2)}, \dots, p_{\ell(2)}^{(2)})$ est une famille de générateurs homogènes et algébriquement indépendants de l'algèbre des polynômes $\mathfrak{g}$ -invariants de $S(\mathfrak{g}^*)$.

La variété $\tilde{V}$ est donc le produit des variétés $\tilde{V}^{(1)}$ et $\tilde{V}^{(2)}$. Si ces deux dernières variétés sont irréductibles, alors $\tilde{V}$ l'est aussi ([3] corollaire de la proposition 7 p52). Par conséquent, nous pouvons supposer que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple.

Soit $\eta: \tilde{V} \rightarrow \mathfrak{g}$ la projection de $\tilde{V}$ sur $\mathfrak{g}$ qui à (x_0, x_1) associe x_0 , l'image de η est l'ensemble N des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$.

Soit $x \in N$. L'idéal des polynômes s'annulant sur la variété N étant engendré par $p_1, \dots, p_{\ell}$, l'espace tangent de Zariski de N en x , $T_x(N)$, est l'intersection des noyaux de $dp_1(x), \dots, dp_{\ell}(x)$. Ainsi, la fibre $\eta^{-1}(x)$ est égale à $(x, T_x(N))$, et sa dimension est $\dim \mathfrak{g} - \text{rg } d\pi_x$.

Les fonctions polynomiales $p_1, \dots, p_{\ell}$ étant $\mathfrak{g}$ -invariantes, pour tout $\alpha \in G$, $T_{\alpha(x)}(N) = \alpha(T_x(N))$. Ainsi, la variété $\eta^{-1}(G.x)$ est irréductible, car image de la variété irréductible $G \times T_x(N)$ par le morphisme surjectif $(\alpha, y) \mapsto (\alpha(x), \alpha(y))$ ([3] T4 p186). Et, comme le morphisme de $\eta^{-1}(G.x)$ sur $G.x$ déduit de η est un morphisme équivariant d'espaces homogènes pour G , donc d'après [9] théorème 4.3.3, on a

$$\begin{aligned} \dim \eta^{-1}(x) &= \dim \eta^{-1}(G.x) - \dim G.x, \\ \dim \eta^{-1}(G.x) &= \dim \mathfrak{g} - \text{rg } d\pi_x + \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^x = 2 \dim \mathfrak{g} - \text{rg } d\pi_x - \dim \mathfrak{g}^x. \end{aligned}$$

De plus, l'orbite $G.x$ est localement fermée ([9] lemme 4.3.1). Donc $\eta^{-1}(G.x)$ est localement fermé, la projection η étant une application continue pour la topologie de Zariski. Ainsi, la variété est ouverte dans son adhérence qui est donc irréductible ([3] T2 p185). Cette dernière a, par conséquent, la même dimension que $\eta^{-1}(G.x)$ ([3] proposition 2 p91).

La variété N est la réunion finie d'orbites $\mathcal{O}_i$ ([4] 8.1.3). Ainsi

$$\tilde{V} = \eta^{-1}(N) = \bigcup \eta^{-1}(\mathcal{O}_i) = \bigcup \overline{\eta^{-1}(\mathcal{O}_i)}.$$

De plus, pour toute orbite $\mathcal{O}_i$ de N , $\overline{\eta^{-1}(\mathcal{O}_i)}$ est une partie fermée irréductible de $\tilde{V}$. Donc, d'après le lemme 2.2, pour prouver que la variété $\tilde{V}$ est irréductible, il suffit de montrer que

$$\dim \overline{\eta^{-1}(\mathcal{O}_i)} < 2(\dim \mathfrak{g} - \ell)$$

pour toute orbite $\mathcal{O}_i$ sauf pour l'orbite des éléments réguliers qui est de dimension $2(\dim \mathfrak{g} - \ell)$.

Il nous reste donc à démontrer que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent non régulier,

$$\begin{aligned} \dim \eta^{-1}(G.x) &< 2(\dim \mathfrak{g} - \ell), \\ 2 \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} d\pi_x - \dim \mathfrak{g}^x &< 2(\dim \mathfrak{g} - \ell), \\ 2\ell &< \operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x. \end{aligned}$$

ce qui est fait dans les points suivants pour chaque type d'algèbre de Lie simple.

2.5. — Lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple classique, à tout $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent, est associée une suite d'entiers strictement positifs $\lambda(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ qui caractérise l'orbite de x . Ces entiers sont les diviseurs élémentaires de la matrice sous-jacente dans la représentation naturelle de $\mathfrak{g}$.

R. W. Carter exprime ([1] chapitre 13) la dimension du centralisateur de x en fonction des entiers r_i ($i \in \mathbb{N}$) où $r_i = \operatorname{card}\{j \mid 1 \leq j \leq k, \lambda_j = i\}$ et R. W. Richardson exprime ([7] chapitre 4) le rang de $d\pi_x$ en fonction de $\lambda(x)$.

2.6. — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type A_ℓ :

Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent non régulier, $\lambda(x)$ est déterminée par

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \\ \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k &= \ell + 1. \end{aligned}$$

Et alors

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} d\pi_x &= \lambda_1 - 1, \\ \dim \mathfrak{g}^x &= \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq i} r_j \right)^2 - 1, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= \lambda_1 + \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq i} r_j \right)^2 - 2 \\
 &= \lambda_1 + \sum_{i \geq 1} ir_i^2 + \sum_{i < j} 2ir_i r_j - 2 \\
 &\geq \lambda_1 + \lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i r_{\lambda_1} + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i^2 - 2 \\
 &\geq 2\lambda_1 r_{\lambda_1} + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i^2 - 2 \\
 &\geq 2 \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1} ir_i + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i^2 - 2 \\
 &\geq 2(\ell + 1) + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i^2 - 2 \\
 &\geq 2\ell + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i^2.
 \end{aligned}$$

Si $r_{\lambda_1} \geq 2$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 > 2\ell.$$

Sinon, x étant non régulier, λ_1 est distinct de $\ell + 1$, $k \geq 2$, $\lambda_2 < \lambda_1$ et

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \lambda_2 r_{\lambda_2}^2 > 2\ell.$$

2.7. — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type B_ℓ :

Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent non régulier, $\lambda(x)$ est déterminée par

$$\begin{aligned}
 \lambda(x) &= (\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_h), \\
 \alpha_1 &\geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 1, \\
 \beta_1 &> \beta_2 > \dots > \beta_h \geq 1; \beta_i \text{ impair}, \\
 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_h &= 2\ell + 1.
 \end{aligned}$$

Quitte à réordonner la suite $\lambda(x)$, nous pouvons supposer que

$$\begin{aligned}
 \lambda(x) &= (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \\
 \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1, \\
 \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k &= 2\ell + 1, \\
 \text{si } \lambda_i \text{ est pair, } r_{\lambda_i} &\text{ est pair.}
 \end{aligned}$$

Et alors

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} d\pi_x &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right), \\ \dim g^x &= \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq i} r_j \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i, \end{aligned}$$

où $E(z)$ est la partie entière de z ($z \in \mathbb{R}$). Donc si λ_1 est pair, $r_{\lambda_1} \geq 2$ et

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} d\pi_x + \dim g^x &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq i} r_j \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\ &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} ir_i^2 + \sum_{i < j} ir_i r_j - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\ &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ pair}} ir_i^2 + \sum_{i < j} ir_i r_j + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i(ir_i - 1) \\ &\geq \frac{1}{2}\lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i r_{\lambda_1} \\ &\geq \lambda_1 r_{\lambda_1} + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i \\ &\geq 2\ell + 1 \\ &> 2\ell. \end{aligned}$$

Si λ_1 est impair, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} d\pi_x + \dim g^x &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq i} r_j \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\ &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} ir_i^2 + \sum_{i < j} ir_i r_j - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\ &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} ir_i^2 + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i r_{\lambda_1} - \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} r_i \\ &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i + \frac{1}{2} r_{\lambda_1} (\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} r_i(ir_i - 1) \\ &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + 2\ell + 1 - \lambda_1 r_{\lambda_1} + \frac{1}{2} r_{\lambda_1} (\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} r_i(ir_i - 1) \\ &\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}(r_{\lambda_1} - 2)(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} r_i(ir_i - 1). \end{aligned}$$

Si $r_{\lambda_1} \geq 3$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2}(r_{\lambda_1} - 2)(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_1} = 2$, alors λ_1 est distinct de 1 (car $\lambda(x)$ ne peut être égal à $(1, 1)$) et

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_1} = 1$, x étant non régulier, λ_1 est distinct de $2\ell + 1$, $k \geq 2$, $\lambda_2 < \lambda_1$ et

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2}r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) > 2\ell$$

car $\lambda(x)$ est distinct de $(\lambda_1, 1)$, λ_1 étant impair.

2.8. — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type C_ℓ :

Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent non régulier, $\lambda(x)$ est déterminée par

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= (\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_k, 2\beta_1, \dots, 2\beta_h), \\ \alpha_1 &\geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 1, \\ \beta_1 &> \beta_2 > \dots > \beta_h \geq 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_h &= \ell. \end{aligned}$$

Quitte à réordonner la suite $\lambda(x)$, on peut supposer que

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \\ \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k &= 2\ell, \\ \text{si } \lambda_i &\text{ est impair, } r_{\lambda_i} \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Et alors

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} d\pi_x &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right), \\ \dim \mathfrak{g}^x &= \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq i} r_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i. \end{aligned}$$

Donc si λ_1 est impair, $r_{\lambda_1} \geq 2$ et

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq i} r_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\
 &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} ir_i^2 + \sum_{i < j} ir_i r_j + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\
 &\geq \frac{1}{2} \lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i r_{\lambda_1} + \frac{1}{2} r_{\lambda_1} \\
 &\geq \lambda_1 r_{\lambda_1} + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i + \frac{1}{2} r_{\lambda_1} \\
 &\geq 2\ell + \frac{1}{2} r_{\lambda_1} \\
 &> 2\ell.
 \end{aligned}$$

Si λ_1 est pair, alors

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq i} r_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\
 &= \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} ir_i^2 + \sum_{i < j} ir_i r_j + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\
 &\geq \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i r_{\lambda_1} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i^2 \\
 &\geq \lambda_1 r_{\lambda_1} + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i + \frac{1}{2} \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i^2 \\
 &\geq 2\ell + \frac{1}{2} \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i^2.
 \end{aligned}$$

Si $r_{\lambda_1} \geq 2$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2} \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 > 2\ell.$$

Sinon, x étant non régulier, λ_1 est distinct de 2ℓ , $k \geq 2$, $\lambda_2 > \lambda_1$ et

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2} \lambda_2 r_{\lambda_2}^2 > 2\ell.$$

2.9. — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type D_ℓ :

Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent non régulier, $\lambda(x)$ est déterminée par

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= (\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_h), \\ \alpha_1 &\geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 1, \\ \beta_1 &> \beta_2 > \dots > \beta_h \geq 1; \beta_i \text{ impair}, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_h &= 2\ell.\end{aligned}$$

Quitte à réordonner la suite $\lambda(x)$, nous pouvons supposer que

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \\ \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k &= 2\ell, \\ \text{si } \lambda_i \text{ est pair, } r_{\lambda_i} &\text{ est pair.}\end{aligned}$$

L'expression de $\dim \mathfrak{g}^x$ est

$$\dim \mathfrak{g}^x = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq i} r_j \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} i r_i^2 + \sum_{i < j} i r_i r_j - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i.$$

Le calcul de $\text{rg } d\pi_x$ distingue plusieurs cas. Si $\lambda(x) = (2\ell - i, i)$ où i est un entier impair inférieur ou égal à ℓ ,

$$\text{rg } d\pi_x = \frac{1}{2}(2\ell - i + 1),$$

et alors

$$\text{rg } d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x = \frac{1}{2}(2\ell - i + 1) + \ell + i - 1 \geq 2\ell + \frac{1}{2}(i - 1) > 2\ell.$$

L'élément x étant non régulier, $d\pi_x < \ell$ ([4] 8.5.3) et $i > 1$.

Si $\lambda(x) = (\ell, \ell)$ lorsque ℓ est pair,

$$\text{rg } d\pi_x = \frac{1}{2}\ell,$$

et alors

$$\text{rg } d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x = \frac{1}{2}\ell + 2\ell > 2\ell.$$

Si $k \geq 3$, alors

$$\text{rg } d\pi_x = E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right).$$

Donc si λ_1 est pair, $r_{\lambda_1} \geq 2$ et

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg} d\pi_x + \dim g^x &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} ir_i^2 + \sum_{i < j} ir_i r_j - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\
 &\geq \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ pair}} ir_i^2 + \sum_{i < j} ir_i r_j + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i(ir_i - 1) \\
 &\geq \frac{1}{2}\lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i r_{\lambda_1} + \frac{1}{2}\lambda_1 \\
 &\geq \lambda_1 r_{\lambda_1} + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i + \frac{1}{2}\lambda_1 \\
 &\geq 2\ell + \frac{1}{2}\lambda_1 \\
 &> 2\ell.
 \end{aligned}$$

Si λ_1 est impair, alors

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg} d\pi_x + \dim g^x &= E\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} ir_i^2 + \sum_{i < j} ir_i r_j - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} r_i \\
 &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} ir_i^2 + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i r_{\lambda_1} - \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} r_i \\
 &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} ir_i + \frac{1}{2} r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} r_i(ir_i - 1) \\
 &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + 2\ell - \lambda_1 r_{\lambda_1} + \frac{1}{2} r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} r_i(ir_i - 1) \\
 &\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2} r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} r_i(ir_i - 1).
 \end{aligned}$$

Si $r_{\lambda_1} \geq 4$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim g^x \geq 2\ell + \frac{1}{2} r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) \geq 2\ell + 2 > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_1} = 3$, alors λ_1 est distinct de 1 (car $\lambda(x)$ ne peut être égal à $(1, 1, 1)$) et

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim g^x \geq 2\ell + \frac{1}{2} r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) \geq 2\ell + \frac{3}{2}(\lambda_1 - 1) > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_1} = 2$, k étant supérieur ou égal à 3, $\lambda_3 < \lambda_1$ et

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg} d\pi_x + \dim g^x &\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2} r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2} r_{\lambda_3}(\lambda_3 r_{\lambda_3} - 1) \\
 &\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 3) + \frac{1}{2} r_{\lambda_3}(\lambda_3 r_{\lambda_3} - 1) \\
 &> 2\ell.
 \end{aligned}$$

En effet $\lambda_1 \geq 3$, λ_1 étant impair, et $\lambda_3 r_{\lambda_3} \geq 2$, $\lambda(x)$ étant distinct de $(\lambda_1, \lambda_1, 1)$.
Si $r_{\lambda_1} = 1$, $\lambda_2 < \lambda_1$ et

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} r_i(i r_i - 1) \\ &\geq 2\ell - 1 + \frac{1}{2}r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_2 - 1} r_i(i r_i - 1). \end{aligned}$$

Trois sous-cas apparaissent alors. Si $r_{\lambda_2} \geq 3$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell - 1 + \frac{1}{2}r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) \geq 2\ell - 1 + \frac{3}{2}(3\lambda_2 - 1) \geq 2\ell + 2 > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_2} = 2$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell - 1 + \frac{1}{2}r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) \geq 2\ell - 1 + 2\lambda_2 - 1 \geq 2\ell + 2 > 2\ell$$

car $\lambda_2 \geq 2$, $\lambda(x)$ étant distinct de $(\lambda_1, 1, 1)$.

Si $r_{\lambda_2} = 1$, alors k étant supérieur ou égal à 3, λ_3 est strictement inférieur à λ_2 qui est un entier impair supérieur ou égal à 3. Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &\geq 2\ell - 1 + \frac{1}{2}r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) + \frac{1}{2}r_{\lambda_3}(\lambda_3 r_{\lambda_3} - 1) \\ &\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_2 - 3) + \frac{1}{2}r_{\lambda_3}(\lambda_3 r_{\lambda_3} - 1) \\ &> 2\ell \end{aligned}$$

car $\lambda_3 r_{\lambda_3} > 2$, $\lambda(x)$ étant distinct de $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$.

2.10. — Pour les algèbres de Lie simples exceptionnelles, nous suivons les notations de [1] quant aux dénominations des orbites nilpotentes.

Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent. La dimension du centralisateur de x est calculée dans [1] chapitre 13 et le rang de $d\pi_x$ est calculé en appendice pour les algèbres de Lie simples exceptionnelles (le rang de $d\pi_x$ est égal au nombre d'exposants de $(\mathfrak{g}, x)$, [7] chapitre 2).

2.11. — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type E_6 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 6. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est strictement

supérieure à 12 sauf pour les orbites $E_6(a_3)$, D_5 et $E_6(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\operatorname{rg} d\pi_x$	$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
$E_6(a_3)$	12	3	15
D_5	10	4	14
$E_6(a_1)$	8	5	13

2.12. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type E_7 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 7. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est strictement supérieure à 14 sauf pour les orbites E_6 , $E_7(a_3)$, $E_7(a_2)$ et $E_7(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\operatorname{rg} d\pi_x$	$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
E_6	13	4	17
$E_7(a_3)$	13	4	17
$E_7(a_2)$	11	5	16
$E_7(a_1)$	9	6	15

2.13. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type E_8 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 8. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est strictement supérieure à 16 sauf pour les orbites E_7 , $E_8(a_4)$, $E_8(a_3)$, $E_8(a_2)$ et $E_8(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\operatorname{rg} d\pi_x$	$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
E_7	16	5	21
$E_8(a_4)$	16	4	20
$E_8(a_3)$	14	5	19
$E_8(a_2)$	12	5 ou 6	17 ou 18
$E_8(a_1)$	10	7	17

2.14. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type F_4 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 4. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est strictement

supérieure à 8 sauf pour les orbites $F_4(a_2)$ et $F_4(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\text{rg } d\pi_x$	$\text{rg } d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
$F_4(a_2)$	8	2	10
$F_4(a_1)$	6	3	9

2.15. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type G_2 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 2. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est supérieure strictement à 4 sauf pour l'orbite $G_2(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\text{rg } d\pi_x$	$\text{rg } d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
$G_2(a_1)$	4	1	5

2.16. PROPOSITION – L'idéal $J_+S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ de $S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ est un idéal premier.

DÉMONSTRATION – La variété $\tilde{V}$ est irréductible et les fonctions polynomiales $P_1, \dots, P_\ell, Q_1, \dots, Q_\ell$ sont linéairement indépendantes en tout point de $\tilde{V} \cap \tilde{P}$ ([6] 3.8). Donc, d'après [4] 11.2.3, l'idéal $J_+S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ est premier.

3. L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE MODULE LIBRE SUR SON CENTRE

3.1. LEMME – Soit $h_1, \dots, h_k \in S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$, linéairement indépendants modulo $J_+S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$. Il existe une partie ouverte non vide Ω de $\tilde{\mathfrak{g}}$ telle que pour tout $x \in \Omega$, les fonctions $h_1|_{\tilde{\mathfrak{G}}.x}, \dots, h_k|_{\tilde{\mathfrak{G}}.x}$ soient linéairement indépendantes.

DÉMONSTRATION – Soit $x_0 \in \tilde{V} \cap \tilde{P}$ et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{k}$ tels que

$$(\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k)|_{\tilde{\mathfrak{G}}.x_0} = 0.$$

D'après le lemme 2.1, l'ensemble $\tilde{V} \cap \tilde{P}$ est un ouvert non vide constitué d'une seule $\tilde{G}$ -orbite, donc

$$(\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k)|_{\tilde{V} \cap \tilde{P}} = 0.$$

La variété $\tilde{V}$ étant irréductible, $\tilde{V} \cap \tilde{P}$ est dense dans $\tilde{V}$ et

$$(\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k)|_{\tilde{V}} = 0.$$

De plus, l'ensemble des polynômes de $S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ s'annulant sur $\tilde{V}$ est l'idéal $J_+S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ (2.16), donc

$$\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k \in J_+S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$$

Ainsi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont nuls et $h_1|_{\tilde{G}.x_0}, \dots, h_k|_{\tilde{G}.x_0}$ sont linéairement indépendants.

Soit θ l'application de $\tilde{G} \times \tilde{g}$ dans $\tilde{g}$ qui à (α, x) associe $\alpha(x)$. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k$, posons $\ell_i = h_i \circ \theta$. Chaque application ℓ_i est une fonction régulière sur $\tilde{G} \times \tilde{g}$, il existe donc ([3] proposition 9 p35) des fonctions régulières $\phi_{i,s}$ sur $\tilde{G}$ et des applications polynômes $\zeta_{i,s}$ ($1 \leq s \leq p$) sur $\tilde{g}$ telles que pour tout couple (α, x) de $\tilde{G} \times \tilde{g}$,

$$\ell_i(\alpha, x) = \sum_{s=1}^p \phi_{i,s}(\alpha) \zeta_{i,s}(x).$$

Soit $(\phi_1, \dots, \phi_q)$ une base de l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{i,s})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq q}$. Il existe alors des applications polynômes $\psi_{i,s}$ ($1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq q$) sur $\tilde{g}$ telles que pour tout couple (α, x) de $\tilde{G} \times \tilde{g}$,

$$\ell_i(\alpha, x) = \sum_{s=1}^q \phi_s(\alpha) \psi_{i,s}(x).$$

Soit $x \in \tilde{g}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $h_1|_{\tilde{G}.x}, \dots, h_k|_{\tilde{G}.x}$ sont linéairement indépendantes;
- (ii) $\ell_1|_{\tilde{G} \times \{x\}}, \dots, \ell_k|_{\tilde{G} \times \{x\}}$ sont linéairement indépendantes;
- (iii) la matrice $M(x) = (\psi_{i,s}(x))_{1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq q}$ est de rang k .

D'après le début de la démonstration, il existe $x_0 \in \tilde{g}$ tel que les assertions précédentes soient vérifiées. Ainsi q est supérieur ou égal à k et il existe une matrice $k \times k$ extraite de $M(x_0)$ dont le déterminant $D(x_0)$ est non nul. La fonction D de $\tilde{g}$ sur $\mathbf{k}$ est une application polynomiale de $\tilde{g}$. Soit Ω l'ensemble des $x \in \tilde{g}$ tel que $D(x)$ soit non nul. C'est un ouvert non vide de $\tilde{g}$. Pour tout $x \in \Omega$, $D(x)$ étant non nul, la matrice $M(x)$ est de rang k et donc $h_1|_{\tilde{G}.x}, \dots, h_k|_{\tilde{G}.x}$ sont linéairement indépendantes.

3.2. LEMME – Soit H un supplémentaire gradué de $J_+S(\tilde{g}^*)$ dans $S(\tilde{g}^*)$. L'application linéaire $f: H \otimes J \rightarrow S(\tilde{g}^*); h \otimes j \mapsto hj$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Ainsi $S(\tilde{g}^*)$ est un J -module libre.

DÉMONSTRATION – Nous avons $S^0(\tilde{g}^*) = H_0 \subseteq H \subseteq HJ$. Supposons que $S^0(\tilde{g}^*) + \dots + S^k(\tilde{g}^*) \subseteq HJ$ alors

$$S^{k+1}(\tilde{g}^*) = H_{k+1} + J_+(S^0(\tilde{g}^*) + \dots + S^k(\tilde{g}^*)) \subseteq H + J_+HJ \subseteq HJ,$$

donc $S(\tilde{g}^*) = HJ$ et ainsi f est surjective.

Soit $h_1, \dots, h_k \in H$ linéairement indépendants sur $\mathbf{k}$. L'ensemble H étant un supplémentaire de $J_+ S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$, $h_1, \dots, h_k$ sont linéairement indépendants modulo $J_+ S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$. Soit $j_1, \dots, j_k \in J$ tels que $h_1 j_1 + \dots + h_k j_k = 0$.

Soit Ω l'ensemble défini au lemme 3.1 pour $h_1, \dots, h_k$ et soit $x \in \Omega$. Alors

$$\begin{aligned}(h_1 j_1 + \dots + h_k j_k)|_{\tilde{G}.x} &= 0, \\ (j_1(x)h_1 + \dots + j_k(x)h_k)|_{\tilde{G}.x} &= 0, \\ j_1(x) &= \dots = j_k(x) = 0,\end{aligned}$$

car les applications $j_1, \dots, j_k$ sont constantes sur $\tilde{G}.x$, et car les fonctions $h_1|_{\tilde{G}.x}, \dots, h_k|_{\tilde{G}.x}$ sont linéairement indépendantes.

Les fonctions polynomiales $j_1, \dots, j_k$ sont nulles sur l'ouvert non vide Ω de $\tilde{\mathfrak{g}}$, elles sont donc nulles sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $h_1, \dots, h_k$ sont linéairement indépendantes sur J . Ainsi f est injective.

Par conséquent $S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ s'identifie à $H \otimes J$ et toute base de l'espace vectoriel H est une base du J -module $S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$.

3.3. THÉOREME — a) L'algèbre symétrique $S(\tilde{\mathfrak{g}})$ est un $Y(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module libre.

b) L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$ est un $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module libre.

DÉMONSTRATION — a) Reprenons les notations du lemme 3.2. L'ensemble $Y(\tilde{\mathfrak{g}})$ est l'image de J par l'isomorphisme de $S(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ sur $S(\tilde{\mathfrak{g}})$, notons H' l'image de H par cet isomorphisme.

Alors, d'après 3.2, l'application linéaire $f': H' \otimes Y(\tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow S(\tilde{\mathfrak{g}}); h \otimes j \mapsto hj$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Ce qui entraîne que $S(\tilde{\mathfrak{g}})$ est un $Y(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module libre.

b) Soit H'' l'image de H' par la symétrisation de $S(\tilde{\mathfrak{g}})$ sur $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$ et l'application linéaire $f'': H'' \otimes Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}}); h \otimes z \mapsto hz$.

La filtration de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$ induit une filtration sur $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$ et sur H'' . L'application f'' est compatible avec ces filtrations et définit donc, par passage au gradué, une application

$$\text{gr}(f''): \text{gr}(H'') \otimes \text{gr}(Z(\tilde{\mathfrak{g}})) \rightarrow \text{gr}(\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})).$$

Les ensembles $\text{gr}(\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}}))$, $\text{gr}(Z(\tilde{\mathfrak{g}}))$ et $\text{gr}(H'')$ s'identifient à $S(\tilde{\mathfrak{g}})$, $Y(\tilde{\mathfrak{g}})$ et H' respectivement (H étant gradué par construction, H' est gradué) et l'application $\text{gr}(f'')$ s'identifie à f' . D'après a), f' est bijective, il en est donc de même de $\text{gr}(f'')$ et de f'' . Ainsi $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$ est un $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module libre.

3.4. — Soit m un entier non nul. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_m$ quotient de l'algèbre de Lie de dimension infinie $\mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[T]$ par l'idéal $\sum_{n \geq m+1} \mathfrak{g} \otimes T^n$. Lorsque $m = 1$, $\mathfrak{g}_1$ s'identifie à l'algèbre de Takiff associée à $\mathfrak{g}$.

On peut conjecturer que l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_m$ est un module libre sur son centre. Nous l'avons prouvé lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est produit d'algèbres isomorphes à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{k})$. Le point qu'il reste à démontrer dans le cas général est l'irréductibilité de la variété $\tilde{V}$.

REMERCIEMENT

Je remercie M. Brion qui m'a donné d'utiles indications pour la démonstration du théorème 2.4.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. R. W. CARTER, *Finite groups of Lie type : Conjugacy classes and complex characters*, John Wiley and Sons, Chichester - New York, 1985.
2. C. CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie, tome II, groupes algébriques*, Hermann & Cie, éditeurs, 1951.
3. J. DIEUDONNE, *Cours de géométrie algébrique tome 2*, Collection Sup, Presses Universitaires de France, 1974.
4. J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*, Cahiers scientifiques, fascicule 37, Gauthier-Villars, 1974.
5. B. KOSTANT, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math., 85, p327-404, 1963.
6. M. RAÏS ET P. TAUVEL, *Indice et polynômes invariants pour certaines algèbres de Lie*, J. reine angew. Math., 425, p123-140, 1992.
7. R. W. RICHARDSON, *Derivatives of invariant polynomials on a semisimple Lie algebra*, Miniconference on harmonic analysis and operators algebras, Camberra, Proc. Centre of Math. Anal. Austral. Nat. Univ., 1987.
8. I. R. SHAFAREVICH, *Basic algebraic geometry*, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977.
9. T. A. SPRINGER, *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1981.

 François GEOFFRIAU
 Département de Mathématiques,
 URA CNRS 1322
 Université de Poitiers

86022 POITIERS CEDEX