ANNALES DE L'I. H. P.

G. CASTELNUOVO

Sur quelques problèmes se rattachant au Calcul des Probabilités

Annales de l'I. H. P., tome 3, nº 4 (1933), p. 465-490
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1933__3_4_465_0>

Sur quelques problèmes se rattachant au Calcul des Probabilités

PAR

G. CASTELNUOVO

---

1. Sur le problème des moments.

La *Théorie analytique des probabilités*, œuvre admirable de la maturité de LAPLACE, est le fruit d'une longue méditation poursuivie pendant plus de trente ans. On reste surpris en effet lorsqu'on remarque avec quelle profondeur ce génie avait dès sa jeunesse posé et traité quelques-uns des problèmes les plus ardus de la Science. Son premier travail sur ce sujet, publié en 1780, commence par ces paroles : « Je me propose « de traiter dans ce Mémoire deux points importants de l'analyse des « hazards qui ne paraissent point avoir été suffisamment approfondis : « le premier a pour objet la manière de calculer la probabilité des « événements composés d'événements simples dont on ignore les pos- « sibilités respectives ; l'objet du second est l'influence des événements « passés sur la possibilité des événements futurs... ».

Le premier point contient l'énoncé d'un problème qui attire depuis cette époque l'attention et les efforts des mathématiciens, soit à cause des difficultés analytiques qu'il met en évidence, soit à cause de l'intérêt dominant qu'il présente pour le calcul des probabilités. En effet la loi asymptotique qui résout ce problème fournit en même temps la raison des succès que rencontre le Calcul des Probabilités dans ses nombreuses applications : sous des hypothèses très larges, l'effet global qui résulte de l'action d'un très grand nombre de phénomènes élémentaires suit une loi indépendante de celles qui président aux causes initiales et qui d'ordinaire nous sont inconnues.

LAPLACE a pu préciser la forme de cette loi asymptotique seulement dans sa *Théorie analytique*. Cependant GAUSS avait déjà publié à cette époque son premier Mémoire sur les erreurs d'observation ; la démonstration plus simple et, en apparence, plus satisfaisante qu'il a donnée de la loi qui porte son nom, a probablement détourné l'attention des vues plus larges et des méthodes plus élevées mais difficiles de LAPLACE. L'exposition et les applications que POISSON en a faites ne suffirent pas à vaincre l'indifférence des uns et les critiques des autres.

C'est à un géomètre moins connu, à BIENAYMÉ, que revient le mérite d'avoir répondu à ces critiques et rappelé l'attention sur le théorème de LAPLACE. En défendant, en particulier, l'usage de la valeur moyenne des carrés des erreurs, employée par LAPLACE d'une façon systématique, BIENAYMÉ a fait une remarque extrêmement simple, qui trouve cependant, même aujourd'hui, de nombreuses applications en statistique. Il a montré que lorsqu'on connaît la valeur moyenne d'une variable et la valeur moyenne du carré de son écart, on peut préciser jusqu'à un certain point la loi de probabilité de la variable considérée.

Cette remarque frappa l'attention d'un géomètre russe éminent, TCHEBYCHEF qui généralisa la question, en formulant un problème beaucoup plus important. Supposons que les valeurs moyennes d'un certain nombre de puissances de l'écart considéré soient connues ; comment pourra-t-on préciser ultérieurement la loi de probabilité ? Ou bien, si l'on préfère employer le langage de la mécanique : avec quelle approximation est-il possible de déterminer une distribution de matière sur une droite quand on en connaît les moments (par rapport à un point fixe) jusqu'à un certain ordre ?

Les ressources dont disposait le géomètre russe et la finesse bien connue dont il faisait preuve dans toutes les questions d'approximation lui ont permis de résoudre ce problème difficile et de traiter en particulier le cas où les moments donnés correspondent à la loi de GAUSS, ou convergent vers des moments qui suivent cette loi. C'est ainsi que TCHEBYCHEF réussit à donner la première démonstration rigoureuse de la loi de GAUSS en partant du principe des erreurs élémentaires, formulé par LAPLACE.

Cette démonstration a été simplifiée par la suite. On a proposé d'autres démonstrations plus courtes et fondées sur des principes différents mais celle de Tchebychef me semble la plus directe et la plus conforme aux buts de la statistique. Quelques mots me suffiront pour vous en faire comprendre l'esprit.

Le point de départ est un fait remarquable qu'on établit d'une façon élémentaire. Considérons une succession illimitée de variables aléatoires indépendantes

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

ayant, chacune, la valeur moyenne nulle. Formons la somme des n premières variables et posons

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt{2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2)}},$$

où μ_1^2, est la valeur moyenne du carré de x_1, etc. On démontre que sous des hypothèses très larges, la valeur moyenne d'une puissance quelconque de y_n tend vers la valeur moyenne correspondante d'une variable qui suit la loi normale. On peut écrire symboliquement

$$M\,(y_n^r) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^r e^{-t^2} dt,$$

$$(r = 0, 1, 2, \cdots; n \rightarrow \infty).$$

Une fois ce point établi les questions suivantes se présentent spontanément à l'esprit :

1) Démontrer que la loi de Gauss est entièrement déterminée par les valeurs de ses moments ;

2) Démontrer la même chose pour la loi dont les moments sont écrits à gauche de la dernière formule ;

3) Démontrer que si les moments d'une loi de probabilité variable tendent vers les moments de la loi normale, la première loi tend vers la deuxième, à savoir :

$$\text{Prob}\,(y_n \leqq t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2} dt.$$

Naturellement ces démonstrations ne sont pas faciles ; mais du moins on voit à chaque pas le but qu'on doit atteindre, ce qui est un avantage précieux dans tout raisonnement mathématique.

Le problème général des moments formulé par TCHEBYCHEF a une importance beaucoup plus grande et mérite d'être étudié à cause de l'intérêt qu'il présente en l'Analyse indépendamment de ses applications au Calcul des probabilités. C'est à ce point de vue que STIELTJES l'a repris (1894-95) dans son Mémoire célèbre consacré à la théorie des fractions continues analytiques ; TCHEBYCHEF lui-même s'était servi de ces fractions pour sa démonstration.

STIELTJES envisage une distribution de matière sur une demi-droite $x \geqq 0$ et considère les moments par rapport à l'origine. Si l'on désigne par $\varphi(x)$ la quantité de matière à gauche du point x, le moment d'ordre r est défini par l'*intégrale de* STIELTJES

$$c_r = \int_0^\infty x^r d\varphi(x).$$

Les c_r étant données ($r = 0, 1, 2, \ldots$) il s'agit de déterminer une *fonction de répartition* $\varphi(x)$, monotone non décroissante, nulle à l'origine et satisfaisant aux équations écrites, qui sont en nombre infini. Un résultat imprévu des recherches de STIELTJES c'est que si l'intervalle d'intégration est infini, le problème peut être indéterminé ; on peut donc former une succession de nombres positifs $c_0, c_1, c_2, \ldots$, à laquelle corresponde un nombre infini de fonctions $\varphi(x)$; deux telles fonctions seront regardées comme différentes si elles diffèrent au moins en un point de continuité.

Le problème présente de nouvelles difficultés si l'on suppose la matière distribuée sur la droite entière, et si l'on étend, par conséquent, les intégrales de $-\infty$ à $+\infty$. Ce nouveau problème a été traité par de nombreux géomètres qui ont fait ressortir ses liens avec les théories modernes de l'Analyse : équations intégrales, développements en série de polynômes orthogonaux, matrices infinies, etc. C'est M. HAMBURGER [1] qui a obtenu les résultats les plus précis en établissant sous une forme assez simple les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce problème soit déterminé. Je me propose de montrer comment on peut retrouver ces conditions par une voie plus directe et plus élémentaire que celle suivie par M. HAMBURGER. Je tâcherai aussi d'éclaircir quelques points par des considérations intuitives.

(1) *Ueber eine Erweiterung des Stieltjes Momentenproblems*, Mathem. Annalen, vol. LXXXI-LXXXII (1920.)

Soit une succession illimitée de quantités réelles (*moments*) $c_0, c_1, c_2, \ldots$ données. On cherche une fonction réelle $\varphi(x)$, non décroissante, nulle pour $x = -\infty$, et telle que les équations

$$c_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r d\varphi(x) \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1}$$

soient satisfaites.

Si la fonction existe on voit tout de suite que les c_r sont les coefficients d'une certaine forme quadratique *positive*, d'où résultent les conditions nécessaires

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \cdots c_{n-1} \\ c_1 & c_2 \cdots c_n \\ \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_n \cdots c_{2n-2} \end{vmatrix} > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots; \Delta_0 = 1). \tag{2}$$

Le cas où les Δ_n s'annulent pour n supérieur à une certaine borne est dénué d'intérêt et sera laissé de côté.

Lorsque les conditions précédentes sont remplies, on peut, en résolvant un problème algébrique, déterminer n points $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ réels et distincts, et n masses positives $p(x_i)$ qui donnent lieu aux premiers $2n$ moments :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^r p(x_i) = c_r \qquad (r = 0, 1, \cdots 2n - 1)$$

On voit immédiatement que les n points en question sont les zéros de l'équation

$$Q_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n+1}}} \begin{vmatrix} 1 & x \cdots x^n \\ c_0 & c_1 \cdots c_n \\ \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_n \cdots c_{2n-1} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

où le facteur constant est introduit dans le seul but de normaliser les polynômes qui forment une suite orthogonale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_m(x) \cdot Q_n(x) d\varphi(x) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases};$$

$\varphi(x)$ est ici une solution du problème donné, qui, comme nous le verrons, existe toujours si les conditions (2) sont remplies.

Il convient cependant de remplacer dans l'équation (3) le moment c_{2n-1} par un paramètre variable. L'équation prend alors la forme

$$Q_n(x) + \lambda Q_{n-1}(x) = 0, \tag{4}$$

et représente une simple infinité de groupes de n points, c'est-à-dire une *involution* d'ordre n sur la droite. Tout point x appartient à un seul de ces groupes ; les autres points du groupe, que nous appellerons les *points conjugués* du point x, sont donnés par l'équation en y

$$-\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} 0 & 1 & y \cdots y^{n-1} \\ 1 & c_0 & c_1 \cdots c_{n-1} \\ x & c_1 & c_2 \cdots c_n \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ x^{n-1} & c_{n-1} & c_n \cdots c_{2n-2} \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$Q_0(x)Q_0(y) + Q_1(x)Q_1(y) + \cdots + Q_{n-1}(x)Q_{n-1}(y) = 0. \tag{5'}$$

Si l'on applique à un point x la masse $p_n(x)$ déterminée par la formule

$$\frac{1}{p_n(x)} = -\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \cdots x^{n-1} \\ 1 & c_0 & c_1 \cdots c_{n-1} \\ x & c_1 & c_2 \cdots c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{n-1} & c_{n-1} & c_n \cdots c_{2n-2} \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$= Q_0^2(x) + Q_1^2(x) + \cdots + Q_{n-1}^2(x),$$

on voit que chaque groupe de l'involution (4) fournit une solution du problème relatif aux premiers $2n-1$ moments.

Examinons maintenant comment varient les masses et leurs points d'application lorsque n croît. Fixons un de ces points, x. Il résulte de (6) que la masse correspondante $p_n(x)$ décroît et tend vers une limite $p(x)$, positive ou nulle selon que la série.

$$\frac{1}{p(x)} = Q_0^2(x) + Q_1^2(x) + \cdots \tag{7}$$

est convergente ou divergente. On démontre d'ailleurs facilement que les points conjugués de x se rapprochent de x, et tendent vers des positions limites, tandis que chaque fois que n croit d'une unité un nouveau point conjugué apparait, situé à l'extérieur du segment qui contient les autres.

On peut représenter la solution d'ordre n par une courbe en escalier, avec n paliers, dont l'ordonnée en chaque point ξ mesure la somme des masses situées à gauche de ξ ; les n degrés de l'escalier correspondent aux points d'application des masses. Si n croît, la largeur des paliers et la hauteur des marches diminuent. Imaginons toues les courbes en escalier qui correspondent aux valeurs successives de n, le point de discontinuité x restant fixe ou non. A cette famille de courbes on peut appliquer le principe de sélection qui rend tant de services à l'analyse moderne. On peut donc extraire de la famille une succession de courbes qui admet une courbe limite $y = \varphi(x)$. On démontre d'ailleurs que cette courbe fournit une solution du problème des moments. On voit ainsi que le problème a toujours une solution, et même une solution qui possède en un point arbitraire x, fixé d'avance, la masse $p(x)$ donnée par (7). Il s'agit de décider si la solution est unique, au sens convenu (*problème déterminé*), ou s'il y a plusieurs solutions, c'est-à-dire d'une façon plus précise une infinité de solutions (*problème indéterminé*).

Il résulte immédiatement de ce qui précède que si la série de polynômes (7) est convergente en tous les points d'un ensemble continu, le problème est indéterminé. En effet la méthode indiquée permet de construire une solution $\varphi(x)$ qui admet une discontinuité $p(x) > 0$ en un point x de l'ensemble ; si l'on fait varier x d'une manière continue, la fonction $\varphi(x)$, qui ne peut posséder qu'un ensemble dénombrable de points de discontinuité, changera nécessairement. On démontre d'ailleurs, par d'autres considérations, que si le problème est indéterminé on peut construire une solution ayant une discontinuité en un point quelconque donné d'avance, et l'on en conclut que la série (7) est convergente pour toute valeur réelle, finie de x. On obtient ainsi une première forme de la condition cherchée : *le problème des moments est indéterminé si la série* (7) *converge pour tous les points d'un ensemble continu et par conséquent en tout point de l'axe réel* situé à distance finie ; *et réciproquement.*

Nous verrons qu'en ce cas la série est convergente sur tout le plan complexe et que la fonction $\frac{1}{p(x)}$ est une transcendante entière.

Si, au contraire, le problème est déterminé, la série (7) sera divergente sur l'axe réel, sauf au plus en une infinité dénombrable de points de convergence ; on démontre qu'elle diverge sans exception en tout point imaginaire.

On a réussi à donner un exemple intéressant de ces différents cas. Envisageons une distribution de matière ayant la densité $e^{-|x|^\alpha}$ en tout point x réel. Si α est un nombre positif, les moments d'une telle distribution seront finis, et donneront lieu à un problème déterminé si $\alpha \geqq 1$. et indéterminé si $\alpha < 1$ [1]. On peut aussi démontrer que le problème reste encore déterminé si l'on part d'une distribution discontinue de matière obtenue en plaçant la masse $e^{-|x|^\alpha}$, avec $\alpha \geqq 1$, en tout point d'abcisse entière $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ et en supposant la densité nulle partout ailleurs. Si l'on parvenait à écrire sous une forme simple les polynômes $Q_n(x)$ relatifs à ce dernier exemple, on verrait que la série (7) est divergente partout, sauf aux points entiers où elle a la somme $e^{|x|^\alpha}$.

La condition de détermination ou d'indétermination, fondée sur l'examen de la série (7), n'est pas d'une application aisée. On a donc cherché à distinguer les deux cas, en partant d'expressions qui ne contenaient pas la variable. M. HAMBURGER y est parvenu en associant au problème (*principal*) relatif aux moments donnés $c_0, c_1, c_2, \ldots$, le problème (*secondaire*) qui consiste à chercher une distribution de matière donnant lieu aux moments

$$c_0' = c_2,\ c_1' = c_3,\ c_2' = c_4,\ \cdots$$

A toute solution $d\varphi$ du problème principal correspond une solution $x^2 d\varphi$ du problème secondaire avec une masse 0 (ou infiniment petite) à l'origine. Si le premier problème est indéterminé, le second l'est également. Mais alors, la masse limite du premier problème

$$p(x) = \lim_{n \to \infty} p_n(x)$$

et la masse limite du second

$$p'(x) = \lim_{n \to \infty} p'_n(x)$$

sont supérieures à zéro en tout point. En considérant en particulier l'origine $x = 0$, et en ayant recours à la formule (6) et à son analogue pour

(1) Voir par exemple la note : *Proof of the generalised second-limit Theorem...*, par MM. FRÉCHET et SHOAT (Transactions of the Mathematical Society, vol. XXXIII).

le problème secondaire, on trouve *les conditions nécessaires d'indétermination*

$$p(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta'_{n-1}} > 0, \; p'(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta'_{n-1}}{\Delta''_{n-2}} > 0, \tag{8}$$

où $\Delta_n{}'_{-1}$ et $\Delta_n{}''_{-2}$ sont les déterminants qu'on obtient de Δ_n en supprimant la première ligne et la première colonne, ou les deux premières lignes et les deux premières colonnes.

M. Hamburger, auquel on doit ces conditions, a démontré qu'elles *sont aussi suffisantes*. Je peux vous esquisser ici la voie beaucoup plus rapide qui a permis à M. Marcel Riesz (1) de retrouver le même résultat.

Par une simple transformation du déterminant qui entre dans la formule (6) on déduit l'égalité

$$\frac{1}{p_n(x)} = \frac{R^2_{n-1}(x)}{p_n(0)} + \frac{x^2}{p'_{n-1}(x)}, \tag{9}$$

où

$$R_{n-1}(x) = \left(1 - \frac{x}{\xi_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\xi_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\xi_{n-1}}\right)$$

est un polynôme dont les zéros sont les $n-1$ points conjugués de l'origine dans le problème principal d'ordre n, tandis que $p_n(x)$ et $p'_n(x)$ désignent, comme ci-dessus, des masses se rapportant au problème principal et au problème secondaire. M. Riesz cherche à majorer le second membre de (9) en remplaçant dans la première fraction le polynôme $R_{n-1}(x)$ par une fonction transcendante, dont on puisse connaître le comportement asymptotique pour n croissant, et dans la seconde fraction le dénominateur $p'_{n-1}(x)$ par une expression dépendant de $p'_{n-1}(0)$. On atteint ce second but en établissant l'inégalité

$$\frac{1}{p'_{n-1}(x)} \leqq \frac{1}{p'_{n-1}(0)} \left[\frac{R_{n-1}(x)}{1 - \frac{x}{\xi_i}} \right]^2,$$

où l'expression entre parenthèses désigne le plus grand (en valeur absolue) des rapports obtenus en divisant le polynôme $R_{n-1}(x)$ par chacun des facteurs qui le composent (la valeur de x étant fixée).

(1) *Sur le problème des moments*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik (*Svenska Vetenskaps Akademien*) vol. XVI, XVII (1922-23).

D'autre part, en tenant compte des sommes des valeurs réciproques des racines ξ_1, ξ_2, ... et de leurs carrés, M. RIESZ établit l'inégalité

$$R_{n-1}(t) \leqq e^{2\mu_n^2 |t|^2 + \mu_n |t|}$$

où

$$\mu_n = \sqrt{\frac{c_0 - p_n(0)}{p'_{n-1}(0)}}$$

est une constante positive et t une variable complexe. De ces inégalités et de l'égalité (9), on déduit

$$\text{(10)} \qquad \frac{1}{p_n(x)} \leqq e^{2\mu_n^2 x^2 + 6\mu_n |x|} \left[\frac{1}{p_n(0)} + \frac{x^2}{p'_{n-1}(0)} \right]$$

qui fixe une borne inférieure à la masse $p_n(x)$ d'un point x quelconque, lorsqu'on connaît les masses $p_n(0)$ et $p'_{n-1}(0)$ appartenant à l'origine.

Faisons maintenant croître n et supposons vérifiées les inégalités (8). μ_n reste finie et la masse $p_n(x)$ tend elle aussi vers une limite $p(x) > 0$ en tout point x. Le problème des moments est donc indéterminé, résultat qui est en accord avec le théorème de M. HAMBURGER.

De (10), qui s'étend immédiatement aux valeurs complexes de x, il résulte qu'en ce cas la série de polynômes

$$\text{(7)} \qquad \frac{1}{p(x)} = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i^2(x)$$

définit une transcendante entière, dont le genre ne surpasse pas 2. Une évaluation ultérieure a conduit M. RIESZ à démontrer que pour toute valeur réelle de x on a

$$\frac{1}{p(x)} < C e^{|x| \varepsilon_x}$$

où C est une constante positive et ou ε_x tend vers zéro pour $|x| \to \infty$.

En ce cas d'indétermination, la série plus générale

$$\text{(11)} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(x) Q_i(y)$$

converge absolument et uniformément lorsque chacune des variables x, y parcourt un domaine borné. Si l'on fixe la valeur de x, (11) représente une fonction entière de y ; si x est réel tous les zéros de cette fonction seront réels, et le genre de la fonction sera $\leqq 1$.

Il convient maintenant de mettre en lumière un autre côté de notre problème, celui qui concerne la position des points d'application des masses. Nous savons déjà que si l'on suppose connus les moments c_0, c_1, ... jusqu'à c_{2n-2}, et si l'on fixe un point x_0, les n-1 points conjugués $x_i^{(n)}$ qui, chargés de masses convenables, donnent lieu à ces moments, sont déterminés. Les points $x_i^{(n)}$ sont les racines de l'équation

$$Q_0(x_0)Q_0(x) + Q_1(x_0)Q_1(x) + \cdots + Q_{n-1}(x_0)Q_{n-1}(x) = 0$$

Désignons par $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, $\cdots$ les points que l'on rencontre en partant de x_0 et en suivant le sens positif, et par $x_{-1}^{(n)}$, $x_{-2}^{(n)}$ $\cdots$ les points situés à gauche de x_0. Nous avons affirmé déjà que si n croît, ces points s'approchent de x_0 et tendent vers des positions limites x_1^{∞}, x_2^{∞}, $\cdots$, x_{-1}^{∞}, $\cdots$

Or, il y a ici différents cas à distinguer. Il peut se faire que x_1^{∞} coïncide avec x_0 ; on démontre alors qu'on a aussi $x_0 = x_1^{\infty} = x_2^{\infty} = \cdots$ Le point x_0 attire, pour ainsi dire, les points conjugués $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, $\cdots$ qui se trouvent à sa droite ; d'une façon plus précise si l'on fixe un intervalle dont une des extrémités coïncide avec x_0, il est toujours possible de choisir n suffisamment grand pour que cet intervalle contienne un nombre arbitraire de points $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$ $\cdots$ Naturellement le point x_0 pourrait être point d'attraction à gauche, ou des deux côtés à la fois.

Le cas contraire où x_0 est un point isolé, $x_{-1}^{\infty} < x_0 < x_1^{\infty}$, se subdivise lui aussi en plusieurs autres. Il peut se faire qu'un point y_0 qui parcourt l'intervalle $\left(x_{-1}^{\infty}, x_1^{\infty}\right)$, extrêmes exclus, ait ses conjugués y_{-1}^{∞}, y_1^{∞} fixes en x_{-1}^{∞} et x_1^{∞} ; ou bien, au contraire, ces conjugués y_{-1}^{∞}, y_1^{∞} peuvent varier avec y_0. Ce dernier cas est le plus intéressant. On démontre alors que la fonction $y_1^{\infty} = f(y_0)$ est croissante sur toute la droite et univoquement invertible ; la différence $y_1^{\infty} - y_0$ admet un minimum supérieur à zéro en tout intervalle fini. Lorsque y_0 varie, le groupe $\cdots$ y_{-2}^{∞}, y_1^{∞}, y_0, y_1^{∞}, y_2^{∞} $\cdots$ varie aussi et décrit, pour ainsi dire, une involution d'ordre infini, qui peut être regardée comme la limite, pour $n \to \infty$, de l'involution (4) dont nous avons parlé à propos du problème algébrique. Chaque groupe de l'involution d'ordre infini donne une solution du problème des moments lorsqu'on applique au point y_i^∞ la masse $p(y_i^\infty) > 0$, donnée par (7). Le problème est indéterminé en ce cas, et en ce cas seulement. Les ∞^1 solutions dont nous venons de parler sont appelées par M. RIESZ *solutions extrémales* (1). Il y a une infinité d'autres solutions, par exemple celles qu'on obtient en combinant linéairement deux ou plusieurs solutions extrémales au moyen de paramètres positifs ayant une somme égale à 1.

Pour me rendre compte, par un procédé intuitif, des différentes circonstances que présentent les points conjugués x_i^∞ d'un point variable x_0, je me suis servi d'une représentation géométrique que je vais indiquer dans ce qui suit (2). Pour cela reprenons l'équation algébrique qui permet de résoudre le problème d'ordre n. Rappelons que si $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont les points d'application des masses produisant les moments $c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}$, deux quelconques de ces points, par ex. x_0, x_1, seront liés par l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ x_1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si l'on pose

$$x_0 + x_1 = 2x, \qquad x_0 x_1 = y \tag{12}$$

cette équation se transforme en la suivante

$$\begin{vmatrix} c_2 - 2xc_1 + yc_0 & \cdots & c_n - 2xc_{n-1} + yc_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n - 2xc_{n-1} + yc_{n-2} & \cdots & c_{2n-2} - 2xc_{2n-3} + yc_{2n-4} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Le premier membre est le discriminant d'une forme quadratique à $n - 1$ variables

$$f_2 - 2xf_1 + yf_0,$$

où f_2 et f_0 sont des formes définies positives.

(1) Au point de vue analytique, on forme une solution extrémale en recourant à la série de polynômes (11) qui, en ce cas, pour x réel donné, représente une fonction transcendante entière de y, ayant tous les zéros réels. Ces zéros donnent avec x un groupe de l'involution d'ordre infini.

(2) *Sul problema dei momenti*, Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, anno I, 1930.

L'équation (13), que nous écrirons brièvement

$$F_{n-1}(x, y) = 0, \tag{13'}$$

représente une courbe algébrique d'ordre $n - 1$ reliée d'une manière très simple à notre problème. Traçons, en effet la parabole

$$y = x^2 \tag{14}$$

et transportons sur elle, par projection parallèle à l'axe y, les points $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ formant notre groupe sur l'axe x. A chaque groupe de l'involution (4) correspond un groupe d'une involution d'ordre n sur la parabole. Or, on voit tout de suite que les tangentes à la parabole aux points d'un groupe quelconque de cette involution se rencontrent deux à deux sur la courbe F_{n-1}. Celle-ci est donc le lieu des sommets de ∞^1 polygones circonscrits à la parabole.

Les propriétés bien connues du discriminant d'une forme quadratique permettent d'établir quelques caractères topologiques de la courbe F_{n-1}. On voit ainsi que la courbe se compose de $n - 1$ branches distinctes du point de vue métrique (comme par exemple, pour $n = 3$, les deux branches d'une hyperbole). Ces branches ne se coupent pas et ne rencontrent la parabole en aucun point réel. Une de ces branches, que nous appellerons F'_{n-1} contient dans sa concavité la parabole et laisse du côté convexe les autres branches de la courbe F_{n-1}.

Faisons maintenant croître n et suivons les variations de la branche F'_{n-1} ; on voit facilement qu'elle se rapproche de la parabole. Mais lorsqu'on passe à la limite, il y a plusieurs cas à distinguer. Voici les plus remarquables.

Si le problème des moments est déterminé et donne lieu à une distribution continue de matière, la courbe limite F'_∞ coïncide avec la parabole. Si le problème, tout en restant déterminé, est satisfait par une distribution discrète de masses situées aux points $\cdots x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$, la courbe limite F'_∞ se réduit à une polygonale circonscrite à la parabole aux points d'abcisses $\cdots x_{-1}, x_0, x_1, \cdots$ Enfin, si le problème est indéterminé, la courbe F'_∞ n'a aucun point commun avec la parabole et renferme celle-ci dans sa concavité. On peut construire alors une infinité de polygonales circonscrites à la parabole et inscrites dans la courbe F'_∞ ; les points de contact d'une quelconque de ces polygonales donnent (par leurs abscisses) les points d'application des masses d'une solution extrémale du problème des moments (1).

On peut se baser sur ces considérations pour retrouver les conditions de M. HAMBURGER, sans recourir à la fonction transcendante introduite par M. RIESZ. Je me borne ici à une simple remarque qui mettra mieux en lumière la signification de ces conditions.

Reprenons le problème principal relatif aux moments c_0, c_1, c_2, c_3, $c_4, \cdots$ et le problème secondaire relatif aux moments $c_2, c_3, c_4 \cdots$ J'ai déjà remarqué que si le premier problème est indéterminé, le second l'est également ; et qu'on peut alors trouver une solution extrémale de l'un et de l'autre, ayant par exemple, une masse supérieure à zéro, à l'origine. Nous en avons déduit les conditions nécessaires

$$8) \qquad p(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{\Delta'_{n-1}} > 0, \quad p'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta'_{n-1}}{\Delta''_{n-2}} > 0.$$

Supposons maintenant que ces conditions soient remplies : Dans ce cas le problème secondaire est certainement indéterminé, car une solution $d\varphi$ du problème principal nous fournit d'abord une solution $x^2 d\varphi$ du problème secondaire ayant la masse 0 à l'origine, tandis qu'une autre solution de ce dernier problème présente à l'origine la masse $p'(0) > 0$. Le problème principal est aussi indéterminé. Considérons, en effet, toutes les distributions de matière sur la droite, qui ont les moments d'ordre $\geqq 2$ égaux à $c_2, c_3, \cdots$, tandis que les deux premiers moments ont toutes

(1) Une autre représentation géométrique plus élégante mais moins intuitive, parce qu'elle a lieu dans l'espace (affin) à une infinité dénombrable de dimensions, est la suivante. Considérons la quadrique (du point de vue formel)

$$0 = -\begin{vmatrix} 0 & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots \\ x_0 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots \\ x_1 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ x_2 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

et la courbe *rationnelle*.

$$x_0 = 1, x_1 = t, x_2 = t^2, \cdots$$

Dans le cas d'indétermination, il y a une infinité de polygones, ayant un nombre infini de sommets... t_{-1}, t, t_1..., qui sont inscrits dans la courbe et sont autopolaires par rapport à la quadrique ; à chacun de ces polygones correspond une solution extrémale... t_{-1}, t, t_1... Si l'on applique à chaque sommet t_i la masse $p(t_i)$ qui lui appartient, le barycentre du polygone coïncide avec le centre de la quadrique ($x_0 = 0$ étant l'hyperplan de l'infini).

Si, au contraire, le problème des moments est déterminé, la quadrique tend à dégénérer lorsque le nombre n des dimensions de l'espace croît et l'analogie avec le cas de n fini s'évanouit.

les valeurs c'_0, c'_1 compatibles avec l'existence d'une solution. On voit que la seule condition à laquelle c'_0 doit satisfaire est

$$c_0' \geqq c_0 - \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta'_{n-1}}.$$

Parmi ces distributions, il y en a une infinité possédant à l'origine la masse o, et différant par les valeurs de c'_0 et c'_1. En combinant linéairement plusieurs de ces solutions à l'aide de paramètres positifs ayant une somme égale à 1, on peut obtenir une distribution de matière qui donne lieu aux moments $c_0, c_1, c_2, c_3 \cdots$ et qui ait la masse o à l'origine. Il y a d'ailleurs une autre solution qui possède à l'origine la masse $p(0) > 0$. Le problème est donc indéterminé.

Les conditions de M. HAMBURGER, dont nous venons de parler, sont assez simples, au moins du point de vue théorique. Elles ont cependant le défaut d'attribuer un rôle privilégié à l'origine des abcisses. Envisageons une distribution de matière qui par rapport à l'origine O produise les moments $c_0, c_1, c_2, \cdots$ Si l'on transporte l'origine en O', cette même distribution conduira aux moments $c'_0, c'_1, c_2' \cdots$ que l'on calcule très facilement. Le problème relatif aux moments $c_0, c_1, c_2, \cdots$ ne diffère évidemment pas du problème relatif aux moments $c'_0, c'_1, c'_2, \cdots$, mais les conditions de HAMBURGER ne sont pas les mêmes pour les deux problèmes. En effet, tandis que le déterminant Δ_n ne change pas lorsqu'on remplace les moments c_i par les moments c'_i, il n'en est pas de même pour les mineurs Δ'_{n-1} et Δ''_{n-2} qui figurent dans les dites conditions. Il conviendrait donc d'exprimer ces conditions au moyen d'égalités ou d'inégalités formées à l'aide d'expressions invariantes par rapport à un déplacement de l'origine.

Un tel invariant est par exemple, le rapport $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ de deux déterminants, dont le dénominateur est obtenu à partir du numérateur en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. On peut démontrer que dans le cas d'indétermination l'expression

$$\frac{1}{n} \sqrt{\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}}$$

reste supérieure à une borne plus grande que zéro lorsque n croît indéfiniment. On déduit de là une condition suffisante, mais probablement non nécessaire, pour que le problème soit déterminé.

Une condition également suffisante et non nécessaire, qui a l'avantage d'une grande simplicité, a été donnée par MM. J. POLYA et RIESZ : *pour la détermination du problème il suffit que le rapport* $\frac{1}{n}\sqrt[2n]{c_{2n}}$ *soit borné supérieurement* ; d'après M. CARLEMAN, il suffit même que *la série* $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{c_{2n}}}$ *diverge.*

Ces conditions permettent facilement de construire des distributions de matière continues ou discontinues, donnant lieu à des problèmes déterminés. Il serait utile d'avoir aussi de nombreux exemples de distributions conduisant à des problèmes indéterminés. Raisonner sur des exemples concrets, permet souvent en mathématiques, de saisir des particularités qui échappent facilement à une analyse abstraite.

2. Sur quelques questions de géométrie et d'arithmétique asymptotiques

M. BOREL, dans un chapitre de son livre *Introduction à quelques théories physiques*, a exposé quelques résultats inattendus sur le volume et la surface d'une hypersphère appartenant à un espace ayant un très grand nombre de dimensions. Je vais examiner aujourd'hui quelques propriétés asymptotiques de l'hypercube, que j'appellerai *cube* tout court. Ces propriétés vous sembleront étranges, presque paradoxales. J'en parle volontiers ici, parce que la simple application d'une proposition du calcul des probabilités nous permettra de les découvrir sans effort.

La proposition à laquelle je fais allusion est le théorème limite de LAPLACE-TCHÉBYCHEFF, dont j'ai déjà parlé dans ma première conférence. Je vais maintenant l'énoncer sous une forme précise.

Considérons une succession illimitée de variables aléatoires indépendantes $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, ayant chacune la valeur moyenne nulle. Désignons par μ_i^2 la valeur moyenne de x_i^2 et par m_i^3 la valeur moyenne de $|x_i|^3$, et formons la variable somme normalisée

$$\xi_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt{2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n)}}\ .$$

Le théorème affirme que la probabilité de l'inégalité $\xi_n \leqq \xi$ (où ξ est donnée) tend uniformément, si n croît, vers la limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-t^2} dt, \tag{1}$$

pourvu que les variables x_i vérifient des conditions assez larges. Il suffit par exemple que le rapport

$$\lambda_n = \frac{m_1^3 + m_2^3 + \cdots + m_n^3}{(\mu_1^2 + \mu_2 + \cdots + \mu_n^2)^{3/2}} \tag{2}$$

tende vers zéro, lorsque n croît. M. CRAMÉR a démontré alors que l'erreur que l'on commet en prenant l'intégrale (1) comme valeur de la probabilité cherchée est inférieure à $3\lambda_n \log n$.

L'application du théorème est plus aisée lorsqu'on l'utilise sous la forme différentielle. Au point de vue critique, le passage de l'une à l'autre forme exige quelques restrictions supplémentaires relatives aux variables x_i. Mais le cas que nous avons à traiter est si simple que la discussion peut se faire directement. Nous dirons donc que pour n croissant, et sous la condition $\lambda_n \to 0$, la probabilité des inégalités

$$x \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq x + dx$$

tend, vers la limite

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sigma} \tag{3}$$

où $\sigma^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 \cdots$; on suppose que x/σ reste constante quand n varie.

Le théorème-limite s'étend sans difficulté aux systèmes de plusieurs variables aléatoires, ou, comme on pourrait dire, aux vecteurs aléatoires ; il faut naturellement remplacer la loi de GAUSS par la loi de BRAVAIS. Bornons-nous aux couples de variables que l'on peut envisager comme composantes de vecteurs dans un plan. Soit

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \cdots,\ (x_n, y_n),\ \cdots$$

une succession illimitée de tels couples. Nous supposons que les couples sont indépendants, à savoir que les valeurs prises par x_1, y_1 n'ont aucune influence sur les valeurs que prendront x_2, y_2, etc. Mais les deux variables d'un même couple seront liées en général. Nous admettons encore que chaque variable a la valeur moyenne nulle et nous désignons les valeurs moyennes, ou moments, du second ordre par la notation évidente

$$\mu_i^2 = \mathrm{M}(x_i^2), \quad \nu_i^2 = \mathrm{M}(y_i^2), \quad \rho_i = \mathrm{M}(x_i y_i).$$

On démontre alors, sous les conditions énoncées ci-dessous, que la probabilité de la vérification simultanée des inégalités

$$x \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq x + dx, \quad y \leqq y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leqq y + dy$$

tend (pour $n \to \infty$) vers la limite

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2rxy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)} \frac{dx}{\sigma_x}\frac{dy}{\sigma_y}.$$

On a posé

$$\sigma_x^2 = \Sigma\mu_i^2, \quad \sigma_y = \Sigma\nu_i^2, \quad r = \frac{\Sigma\rho_i}{\sigma_x\sigma_y} \quad \text{(coeff. de corrélation).}$$

Lorsque n croît, σ_x, σ_y et r varient ; on suppose ici que les rapports $\frac{x}{\sigma_x}$, $\frac{y}{\sigma_y}$ restent constants, afin que la limite soit déterminée, et que r (nécessairement compris entre -1 et $+1$) tend vers une limite qui est désignée par la même lettre. Pour que le théorème subsiste, on admet encore que les rapports (2) calculés avec les valeurs moyennes relatives aux x_i, et avec les valeurs moyennes relatives aux y_i, tendent vers zéro pour $n \to \infty$.

Envisageons maintenant le problème géométrique. Si l'on coupe par un plan un cube de l'espace à trois dimensions, on obtient un polygone dont on évalue immédiatement la surface ; il y a seulement deux ou trois cas à distinguer. Mais le nombre des cas augmente si l'on traite la question analogue dans l'espace à quatre dimensions, et le problème devient assez compliqué si le nombre n des dimensions est très grand. D'ailleurs, la formule exacte qu'on a établie dans un cas particulier n'est pas instructive à cause de sa complexité (1).

Nous nous proposons d'obtenir directement une formule asymptotique d'autant plus exacte que n est plus grand. C'est ici que le calcul des probabilités nous vient en aide.

(1) M. SOMMERFELD (*Boltzmann's Festschrift*, Leipzig, 1904 ; *Bulletin of the Calcutta Mathem. Soc.*, vol. XX, 1930), et M. TRICOMI (*Bollettino Unione Mat. Italiana*, vol. VII, 1928 ; *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*, anno II, 1931), ont donné, indépendamment l'un de l'autre, cette formule, en supposant $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ dans notre équation (5).

Envisageons dans l'espace à n dimensions le cube formé par les points dont les coordonnées cartésiennes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et imaginons que nous choisissions au hasard un de ces points. Quelle est la probabilité pour que le point appartienne à un volume V (à n dimensions) contenu dans le cube ? Le problème aura un sens seulement si l'on fixe la probabilité élémentaire. Adoptons l'hypothèse la plus simple : la probabilité pour que l'une des coordonnées soit comprise entre x_i et $x_i + dx_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) est égale à dx_i. En admettant l'indépendance des différentes coordonnées, il en résulte que la probabilité pour que le point appartienne à un certain volume V est exprimée par le même nombre que celui qui mesure le volume considéré.

En particulier, soit V, la couche comprise entre les deux hyperplans, infiniment voisins,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a \tag{5}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a + da \tag{5'}$$

et les faces du cube. Le nombre cherché exprime alors la probabilité des inégalités

$$a \leqq \Sigma a_ix_i \leqq a + da.$$

On peut donc appliquer la formule asymptotique (3) aux variables aléatoires a_ix_i, en remarquant que

$$M(a_ix_i)^2 = \frac{a_i^2}{12}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}\sum a_i^2, \quad M\,|a_ix_i|^3 = \frac{|a_i|^3}{32}.$$

L'expression $\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}$ qui figure (avec nos notations actuelles) dans la formule (3) a une interprétation géométrique très simple ; elle est égale à $\sqrt{6}l$ où l désigne la distance entre l'origine (centre du cube) et l'hyperplan (5). Le volume cherché est donc à peu près égal à

$$V = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\, e^{-6l^2}\, dl, \tag{6}$$

avec une approximation d'autant meilleure que n est plus grand.

D'autre part, dl est la hauteur de la couche comprise entre les deux hyperplans (5) et (5') ; il s'ensuit que

$$S = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\, e^{-6l^2} \tag{7}$$

est la valeur asymptotique de la surface (volume à $n - 1$ dimensions) découpée par le cube sur l'hyperplan (5). Si l'hyperplan passe par l'origine, on a simplement $S = \sqrt{\frac{6}{\pi}}$.

Le fait singulier c'est que le volume V et la surface S dépendent exclusivement de la distance de l'hyperplan (5) de l'origine et nullement de son orientation, comme si le cube avait la symétrie de la sphère. Or, il est clair que ce résultat ne peut pas être accepté sans réserve, car si l'hyperplan (5) était par exemple parallèle à une face (à $n - 1$ dimensions) du cube, on aurait $S = 1$.

Le paradoxe s'explique si l'on tient compte des conditions de validité du théorème-limite. La condition (suffisante d'ailleurs, mais non nécessaire) se réduit dans notre cas à la suivante

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(\sum_1^n |a_i|^3\right)^2}{\left(\sum_1^n a_i^2\right)^3} = 0, \tag{8}$$

qui n'est pas satisfaite si l'hyperplan est parallèle à une face à $n - 1$, ou $n - 2, \cdots$, dimensions du cube, ou même si les a_i croissent ou diminuent trop rapidement lorsque i augmente.

La formule (7) est applicable par exemple à l'hyperplan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a, \qquad \left(l = \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$$

et aussi à l'hyperplan

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = a, \qquad \left(l = a\sqrt{\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}}\right).$$

Au contraire, la condition suffisante de validité ne subsiste plus si l'on suppose dans (5) $a_i = h^i$ $(i = 1, 2, \cdots; h \neq 1)$; cette hypothèse exigerait une discussion directe.

Supposons la condition (8) satisfaite, et les cœfficients a_i positifs. L'hyperplan (5) divise le cube en deux parties dont l'une contient le sommet $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{2}\right)$. D'après la formule (6) le volume de cette partie est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-t^2}dt, \qquad \text{où } \lambda = \sqrt{6}\,l, \tag{9}$$

avec une erreur qui, pour les deux exemples numériques cités, est un infiniment petit de l'ordre de $\frac{\log n}{\sqrt{n}}$, ou d'ordre inférieur.

Pour n assez grand, la partie du cube comprise entre les deux hyperplans

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \pm \sqrt{n}$$

diffère de moins de 0,001 du volume du cube tout entier ; ce qui reste en dehors de cette tranche est donc négligeable, quoique l'épaisseur de la tranche soit à la diagonale correspondante du cube dans le rapport de 2 à $\sqrt{n}$. Tout cela confirme la remarque de M. BOREL sur l'incapacité de notre imagination à se représenter la grandeur des corps appartenant à un espace à un très grand nombre de dimensions.

La voie que nous avons suivie nous fournit d'autres résultats. Reprenons les deux hyperplans (5), (5′) et joignons leur deux autres hyperplans

$$(10) \qquad b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = b,\ b + db.$$

Ces quatre hyperplans renferment un prisme dont nous considérons la partie intérieure au cube. Quel est son volume ? Il est égal à la probabilité pour que les inégalités

$$a \leqq \Sigma a_i x_i \leqq a + da, \qquad b \leqq \Sigma b_i x_i \leqq b + db$$

subsistent simultanément.

On obtient l'expression asymptotique de cette probabilité en appliquant la formule (4) aux couples de variables aléatoires

$$a_i x_i, \qquad b_i x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

On a ici

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{12}\Sigma a_i^2, \sigma_y^2 = \frac{1}{12}\Sigma b_i^2,\ r = \frac{\Sigma a_i b_i}{\sqrt{\Sigma a_i^2 \cdot \Sigma b_i^2}},$$

et l'on trouve facilement que l'exposant de e se réduit à $-6h^2$, où h désigne la distance entre l'origine et l'espace à $n - 2$ dimensions, qui constitue l'*arête* du prisme, représenté par les équations $\Sigma a_i x_i = \Sigma b_i x_i = 0$. On voit d'ailleurs, par un simple calcul de géométrie analytique, que le facteur différentiel qui multiplie l'exponentielle dans (4), a la valeur $\frac{6}{\pi} d\tau$, où $d\tau$ est la surface à deux dimensions de la section du prisme par un plan normal. Le volume du prisme est donc donné par l'expression très simple

$$P = \frac{6}{\pi} e^{-6h^2} d\tau \tag{11}$$

La *hauteur* du prisme, c'est-à-dire la portion, comprise entre le cube, de l'espace à $n - 2$ dimensions qui est l'arête du prisme, a la valeur

$$\frac{6}{\pi} e^{-6h^2}.$$

Cette expression dépend aussi exclusivement de la distance entre l'origine et l'espace considéré.

Pour que la validité asymptotique de ces formules soit assurée, on admettra naturellelement que les conditions déjà énoncées relatives aux hyperplans qui renferment le prisme sont satisfaites.

On peut poursuivre les recherches dans cette direction. Je préfère indiquer une application de nos formules à des questions d'arithmétique reliées à la théorie de la partition des nombres.

Supposons que nous ayons à résoudre en nombres entiers, compris entre 0 et m, une équation indéterminée

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = k, \tag{12}$$

où les a_i et k sont des entiers positifs.

Combien de solutions y aura-t-il ?

On peut chercher une formule qui donne le nombre exact des solutions, mais cette formule présentera une complication croissante avec m, n. On préfère souvent d'avoir une formule d'approximation asymptotique pour m et n tendant vers l'infini.

Au point de vue géométrique le problème se présente de la manière suivante. Imaginons, dans l'espace à n dimensions, le cube qui a n côtés de longueur $m + 1$ situés sur les axes cartésiens et partageons ce cube en $(m + 1)^n$ cubes unitaires par des hyperplans parallèles aux faces (à $n - 1$ dimensions). Appelons *nœuds* du réseau les sommets de ces cubes, excepté les sommets qui appartiennent aux faces $x_i = m + 1$. Notre question se réduit alors à déterminer combien de ces nœuds se trouvent sur l'hyperplan (12), ou, ce qui revient au même, combien de nœuds sont contenus dans la couche comprise entre les deux hyperplans $\Sigma a_i x_i = k \pm \frac{1}{2}$. Nous savons évaluer approximativement le volume de la couche par une formule qui dérive directement de (6). On pourrait penser que ce volume exprime à peu près aussi le nombre des cubes unitaires ayant un de leurs sommets dans la couche et par conséquent sur l'hyperplan (12). Malheureusement l'épaisseur de la couche est trop petite par rapport aux dimensions de ces cubes, pour qu'un tel procédé de calcul soit digne de confiance. On parvient cependant, comme nous verrons, à le modifier légèrement de manière à obtenir une formule assez bonne. Remarquons pour le moment que notre procédé permet de répondre, par une formule d'approximation, à une question du type suivant : combien y a-t-il de systèmes de nombres entiers $x_1, x_2, \cdots, x_n$, compris entre 0 et m, qui satisfont à l'inégalité

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqq k \text{ ?} \tag{13}$$

Puisque la partie du grand cube comprise entre l'hyperplan (12) et l'origine a un volume exprimé asymptotiquement par la formule

$$V = \frac{(m+1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{6}l} e^{-t^2} dt, \tag{14}$$

où

$$l = \frac{2k - (m+1)\Sigma a_i}{2\sqrt{\Sigma a_i^2}}$$

est la distance entre le centre du cube et l'hyperplan (12), le nombre de solutions cherché sera représenté par l'expression V, avec une erreur relative d'autant plus petite que m et n seront plus grands [1].

Reprenons l'équation indéterminée (12), ou même le cas particulier

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k; \tag{15}$$

on veut résoudre l'équation (15) par des nombres entiers compris entre 0 et m. Désignons par $N(n,m,k)$ le nombre des solutions, où l'on regarde comme distinctes deux solutions même si elles ne diffèrent que par l'ordre des valeurs attribuées aux inconnues. Pour trouver une expression asymptotique de ce nombre, il convient de remplacer les variables aléatoires continues que nous avons employées jusqu'ici, par des variables

$$x_i, \quad (i = 1, 2 \cdots, n)$$

(1) On suppose naturellement que les a_i remplissent les conditions déjà exposées pour l'application du théorème-limite. Même dans ce cas, pour avoir un énoncé précis, il faudrait admettre que k croisse avec m et n de manière à laisser l constant.

prenant seulement les valeurs entières, $0, 1, 2, \cdots, m$, chacune avec la probabilité $\frac{1}{m+1}$. Le rapport

$$\frac{N(n,m,k)}{(m+1)^n}$$

nous donne alors la probabilité de l'égalité (15) ou, ce qui revient au même, des inégalités

$$k - \frac{1}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_i < k + \frac{1}{2}.$$

On peut évaluer approximativement cette probabilité à l'aide du théorème de LAPLACE-TCHÉBYCHEF qui est applicable même à ce cas. Pour cela remarquons que la valeur moyenne de Σx_i est $\frac{mn}{2}$ et que la valeur moyenne du carré de l'écart $\Sigma x_i - mn/2$ est

$$\sigma^2 = \frac{(m^2+2m)n}{12}.$$

Le théorème cité nous dit que la probabilité demandée tend, lorsque n croît, vers la limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt$$

où (1)

$$\alpha, \beta = \sqrt{6}\,\frac{2k - mn \mp 1}{2\sqrt{(m^2+2m)n}}.$$

Si m et n sont assez grands pour que la différence $\beta - \alpha$ soit petite, on peut remplacer l'intégrale par l'expression

$$\sqrt{\frac{6}{\pi n(m^2+2m)}}\; e^{-\frac{3(2k-mn)^2}{2n(m^2+2m)}}. \tag{16}$$

Cette formule fournit donc une valeur du rapport

$$\frac{N(n,m,k)}{(m+1)^n}$$

d'autant plus approchée que m et n sont plus grands.

Si pour la même équation (15) on admet seulement les valeurs $1, 2, \ldots,$

(1) Pour la précision de l'énoncé on devrait supposer que m et k varient avec n de manière à laisser α et β constants.

m des inconnues et si l'on désigne par $N'(n,m,k)$ le nombre des solutions, la formule d'approximation devient

$$\frac{N'(n,m,k)}{m^n} \sim \sqrt{\frac{6}{\pi n(m^2-1)}}\, e^{-\frac{3(2k-mn-n)^2}{2n(m^2-1)}} . \tag{17}$$

Cette expression asymptotique coïncide, à des quantités négligeables près, avec une formule due à M. TRICOMI [1].

Cette formule donne, à ce qu'il paraît, des résultats assez bons, même pour des valeurs pas trop grandes de n et m. Si, par exemple, on suppose, avec M. TRICOMI, $n = 20$, $m = 100$, $k = 600$, on trouve que le rapport entre la valeur N' fournie par (17) et la valeur exacte (qui est un nombre de 36 chiffres) est inférieur à 1,132.

On peut appliquer la même méthode à l'équation indéterminée

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = k\,; \tag{18}$$

on obtiendra une expression asymptotique du nombre des solutions formées par des nombres entiers compris entre 0 et m (borne fixée). Cette équation a un intérêt tout particulier dans la théorie de la partition des nombres. En effet, à une solution $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de (18) correspond une partition de l'entier k en parties dont x_1 ont la valeur 1, x_2 la valeur 2..., et x_n la valeur n. Pour obtenir toutes les partitions de k en nombres $\leq n$, il faut permettre à x_1 d'atteindre la valeur k, à x_2 la valeur $\left[\frac{k}{2}\right]$, etc. La borne m ci-dessus devrait donc être égale à k. Mais la formule asymptotique ne donne pas une bonne approximation dans ce cas. On sait en effet que l'approximation fournie par la formule exponentielle classique du calcul des probabilités est satisfaisante seulement si la valeur absolue de l'écart n'est pas trop grande par rapport à l'écart quadratique moyen. Or, dans le cas $m = k$ le rapport entre ces deux écarts est

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{n(n+1)-4}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{k}\right) n(n+1)(2n+1)}}$$

et tend à l'infini comme $\sqrt{n}$.

[1] M. TRICOMI (*Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*, 1931) regarde lui aussi le premier membre de (17) comme l'expression d'une probabilité, mais au lieu d'appliquer le théorème-limite, établit directement la formule exacte qui donne le nombre des solutions de (15), et l'écrit de telle façon que les termes successifs aient un poids rapidement décroissant ; en approximant convenablement le premier terme il arrive à la formule citée.

La voie que nous avons suivie ne semble donc pas conduire à des résultats intéressants pour ce qui concerne l'équation (18) et le problème fondamental de la partition des nombres.

Vous savez qu'on a pu répondre à cette question, du moins dans le cas $m = k = n$ (partitions de n en nombres entiers positifs) par une voie tout à fait différente. En effet, M.M HARDY et RAMANUYAN, le mathématicien indien bien connu, mort prématurément, ont obtenu en 1917, par des procédés élevés d'analyse, extrêmement intéressants, la formule asymptotique suivante (1)

$$\frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

qui donne, à ce qu'il semble, des résultats très bons pour le nombre des partitions d'un nombre n, même si $n < 100$. Sera-t-il possible de relier cette expression à la formule qui règit si souvent les événements fortuits ?

(1) *Proceedings of the London Mathematical Society*, s^e 2, vol. XVII (1918) ; voir aussi Hardy, *Trois problèmes célèbres de la théorie des nombres*, Paris, Les Presses universitaires de France, 1931.

(Conférences faites à l'Institut Henri-Poincaré en avril 1932).

Manuscrit reçu le 18 Avril 1932.