ANNALES DE L'I. H. P.

R.H. FOWLER

Sur quelques problèmes de radioactivité et de ferromagnétisme

Annales de l'I. H. P., tome 3, n° 1 (1932), p. 75-134

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1932__3_1_75_0>

© Gauthier-Villars, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur quelques problèmes de radioactivité et de ferromagnétisme

PAR

R. H. FOWLER

I. Théorie de l'absorption interne des rayons gamma pour le radium C'

1. — *Faits expérimentaux concernant le phénomène d'absorption interne.* Il est bien connu qu'en se désintégrant, le noyau d'un atome radioactif émet des photons sous la forme de rayons γ de différentes fréquences souvent très élevées. On mesure d'habitude ces fréquences par la différence de potentiel V, nécessaire pour communiquer à un électron une énergie cinétique égale au quantum $h\nu$ du rayonnement : $\varepsilon V = h\nu$. Comptées suivant cette méthode les fréquences des rayons γ s'échelonnent entre quelques centaines de mille volts jusqu'à deux millions de volts environ. Il existe plusieurs procédés expérimentaux pour déceler l'existence de ces rayons γ et pour mesurer leur fréquence. Le plus direct consiste à utiliser une chambre de Wilson et à observer la trajectoire d'un électron photoélectrique arraché par le rayon γ à l'édifice atomique d'un gaz connu ; M. AUGER, a fait, ici même, à Paris, d'admirables expériences de ce genre.

L'action photoélectrique du rayon γ s'exerce le plus fortement sur les électrons qui dans l'atome ont une énergie (négative) voisine de celle du quantum incident. Dans les cas usuels, ce sont les électrons K qui sont le plus souvent arrachés ; on peut donc s'en occuper exclusivement, et négliger complètement les autres, dont la contribution est secondaire.

Considérons donc les électrons K d'un atome donné. Ces électrons se meuvent dans un champ de forces très peu différent de celui d'un

atome hydrogénoïde ayant une charge centrale $Z\varepsilon$, et on peut effectivement décrire le phénomène en n'employant que des fonctions de Schrödinger qui correspondent à des atomes de ce type déterminé. Supposons qu'un rayonnement γ tombe sur cet atome, qui se trouve dans son état d'énergie normale, (négative) $-E_0$. Le champ électromagnétique de la radiation incidente agit comme une perturbation qui induit un certain nombre de transitions vers un nouvel état de l'atome, dans lequel le rayon γ a disparu, et l'électron a été transféré à un nouvel état d'énergie positive E', $E' = h\nu - E_0$. OPPENHEIMER et WENTZEL ont été les premiers à traiter ce problème qui a été repris récemment par SOMMERFELD et ses collaborateurs. D'une façon générale, le résultat que fournit la mécanique quantique de l'effet photoélectrique, s'accorde assez bien avec les faits expérimentaux obtenus en employant des rayons γ mous, correspondant aux rayons X ordinaires.

Du moment que les rayons γ agissent de cette façon sur les atomes éloignés, il s'en suit nécessairement qu'ils doivent avoir une action à peu près analogue sur les électrons extérieurs de l'atome même où ils prennent naissance. Cette action est bien connue, car l'on s'est rendu compte, depuis longtemps, que c'est elle qui provoque l'apparition des raies dans le spectre des rayons β, accompagnant l'émission γ de la substance radioactive. Toutes les fois qu'un rayon γ est absorbé de cette façon dans son atome d'origine, il se convertit en un électron, qui quitte cet atome avec une quantité d'énergie bien définie. Ce processus d'absorption interne est si net, qu'on peut l'utiliser pour déduire l'existence et l'énergie des rayons γ issus d'un noyau radioactif, à partir d'observations faites sur le spectre de ses rayons β. M. le duc de BROGLIE a, le premier, entrepris de telles recherches, qui ont été étendues et précisées considérablement depuis cette époque, notamment par le Dr ELLIS et le Pr Lise MEITNER. Il est naturel, comme pour l'absorption photoélectrique ordinaire, d'essayer de mesurer la valeur absolue de la probabilité d'absorption interne, et de comparer le résultat à celui qu'on peut déduire de la théorie. Les observations nécessaires sont assez délicates, et M. ELLIS et ses collaborateurs n'ont pu obtenir que tout récemment une valeur digne de confiance pour cette probabilité d'absorption. La théorie qu'on doit utiliser ressemble à celle de l'absorption ordinaire, modifiée cependant en tenant compte de la *relation spatiale* particulière qui

existe entre le système émetteur et le système absorbant. Un calcul théorique a été tenté pour la première fois par Miss SWIRLES. Dans les conférences qui vont suivre je vais vous présenter ces calculs, revus, mais moins rigoureux que dans leur version originale. Il est d'ailleurs évident, d'après les observations de M. ELLIS que dans ce domaine, aucune théorie simple ne saurait suffire. En effet la variation du coefficient d'absorption avec la fréquence des rayons γ incidents suit une loi très curieuse, qui ne ressemble pas du tout à celle de la variation régulière, caractérisant l'absorption photo-électrique ordinaire. A l'heure actuelle il semble plutôt opportun de se borner uniquement à explorer les possibilités d'explication, plutôt que d'essayer d'établir une théorie exacte dans quelques cas particuliers.

Les observations de M. ELLIS sur les coefficients d'absorption interne ne concernent jusqu'à présent que les rayons γ du RaB et du RaC. Rappelons brièvement la succession des transformations radioactives pour ces deux éléments.

		82 RaB	
		→	rayons β (spectre continu)
		83 RaC	(excité)
		→	rayons γ et raies β du RaB
		83 RaC	(normal)
rayons α de 4 cm.	←	→	rayons β (spectre continu)
	81 RaC″	84 RaC′	(excité)
(1)		→	rayons γ et raies β du RaC
rayons β (spectre continu)	←	84 RaC′	(normal)
		→	rayons α de 7 cm. [avec des groupes plus longs, tels que ceux de 9.2 cm. etc.](2)
	82 RaD	82 RaD	

et ainsi de suite.

Dans le tableau précédent nous avons placé sur la même verticale les symboles des diverses substances, qui se transforment successi-

(1) Les détails de cette branche ne sont pas connus. Cette branche se produit 4000 fois moins souvent que l'autre.

(2) Les groupes de plus long parcours sont associés, sans doute, avec le groupe 7 centimètres. Leur position exacte apparaîtra plus tard.

vement les unes dans les autres ; les nombres qui sont inscrits à côté de ces symboles sont les numéros atomiques correspondants. M. ELLIS a mesuré le nombre des quanta émis, par noyau transformé, pour chacun des rayons γ principaux de RaB, lesquels viennent en réalité du noyau de RaC excité après le départ du rayon β principal. Il a également mesuré pour chacun de ces rayons γ sa probabilité d'absorption par les électrons K, L_{II}... etc. de l'atome initial, et a répété les mêmes mesures pour les rayons γ principaux du RaC, qui sont émis par le noyau excité de RaC′ (numéro atomique = 84). Les valeurs expérimentales des coefficients d'absorption interne, c'est-à-dire des probabilités d'absorption, sont contenues dans le tableau suivant :

Valeurs des coefficients d'absorption interne pour les électrons K.

$h\nu$ du rayon γ en volts	Coefficient d'absorption interne pour les électrons K
RaB	
2.43×10^5	0.25
2.97 »	0.15
3.54 »	0.10
RaC	
6.12×10^5	0.0061
7.73 »	0.0048
9.41 »	0.0061
11.30 »	0.0062
12.48 »	0.0057
13.90 »	0.0014
14.26 »	>0.07
17.78 »	0.0016
22.19 »	0.0013

Le coefficient d'absorption pour les électrons L_{II} varie généralement entre un cinquième et un sixième du coefficient correspondant pour les électrons K. La valeur pour $h\nu = 14.26 \times 10^5$ est $\frac{14}{100}$ environ ; elle est donc assez réduite. Les coefficients d'absorption pour les électrons M_I sont petits, et leur mesure est difficile ; ils sont égaux à

un quart environ des valeurs précédentes. Les coefficients d'absorption pour les électrons L_{II} à L_{III} sont beaucoup plus petits que ceux pour L_I, et il en est de même pour les niveaux M.

Nous voyons donc, que les électrons K absorbent jusqu'à 10 % à 25 % des rayons du RaB ; la variation du coefficient d'absorption avec la fréquence est normale, c'est-à-dire la même que pour le cas d'un atome éloigné. Il n'en est plus de même pour le RaC. Les rayons γ du RaC se divisent en trois groupes. Pour deux d'entre eux l'absorption interne est à peu près constante, quoique les énergies des rayons γ varient dans le rapport de un à deux dans l'intérieur de chaque groupe. Le troisième groupe comprend un seul rayon γ pour lequel l'absorption est anormalement grande, au moins cinquante fois, et probablement plusieurs centaines de fois plus grande que l'absorption des autres rayons γ du même atome. Le nombre donné représente un minimum, et c'est la seule chose qu'Ellis ait pu mesurer.

Bien que les raies du spectre de rayons β produits par l'absorption dans les niveaux K, L, M soient les plus fortes de tout le spectre, les rayons γ correspondants sont si rares hors de l'atome, qu'on n'a pas encore réussi à obtenir une seule preuve certaine de leur existence, d'après leurs effets sur des atomes éloignés. MM. Ellis et Aston n'ont pas pu les déceler expérimentalement en aucune façon. Ils ont déduit un minimum pour l'absorption interne, en évaluant le plus grand nombre de rayons γ, capables d'être normalement absorbés dans des atomes éloignés, et ayant juste assez d'énergie pour exciter leurs plaques photographiques. La meilleure preuve de l'existence réelle de ce groupe de rayons γ, est fournie par quelques expériences de Skobelzyn ; celles-ci mettent effectivement en évidence l'existence de ces rayons, mais montrent en même temps qu'ils sont extrêmement rares. On pourrait même, sans commettre vraisemblablement une grande erreur, les considérer comme des rayons γ ayant *un coefficient d'absorption interne égal à l'unité.*

2. — *Le calcul théorique du coefficient d'absorption interne.* — Si nous voulons construire un modèle qui nous permette de calculer le coefficient d'absorption interne, il sera naturel de nous adresser tout d'abord à celui qui réussit à représenter l'absorption ordinaire dans un atome éloigné. Nous prendrons donc un atome hydrogénoïde, et nous le perturberons par le champ électromagnétique

d'un doublet de HERTZ situé dans le noyau, qui remplacera le champ électromagnétique d'une onde plane de lumière, qu'on utilise pour l'étude de l'effet photoélectrique ordinaire. Telle est la méthode employée par Miss SWIRLES. Elle donne des valeurs pour le coefficient d'absorption interne, qui varient en fonction de l'énergie du rayon γ, à peu près de la même façon que le coefficient d'absorption ordinaire. La valeur absolue ainsi calculée du coefficient d'absorption interne, est environ dix à douze fois trop petite pour le RaB ; ce résultat vaut également, *en moyenne*, pour le RaC. Mais pour le rayon γ singulier, ce coefficient peut être jusqu'à mille fois trop petit, par rapport aux résultats de l'expérience. Cet écart indique qu'une nouvelle discussion est indispensable. M. ROSSELAND, et plus récemment M. AUGER ont indiqué, que ce modèle du processus d'absorption interne (ou d'absorption normale) est un modèle possible mais ne s'impose nullement. On peut tout aussi bien considérer ce processus comme la réaction, selon les lois de la mécanique quantique, d'un certain système qui se trouve dans le noyau, sur un autre (par exemple, l'électron K) situé dans la partie extérieure de l'atome ; cette réaction induit des transitions entre des états variés, la quantité d'énergie restant la même dans le système complet, mais se trouvant diversement répartie. Supposons que les forces, agissant sur l'électron, soient des forces électromagnétiques, provenant d'un système chargé qui oscille dans le noyau ; nous avons alors un champ exactement semblable au champ de rayonnement d'un doublet de HERTZ. Les deux modèles sont alors identiques, et les deux points de vue nous conduisent naturellement au même résultat, pourvu cependant qu'une condition particulière, et qu'on avait négligée jusqu'ici, soit remplie. Il est en effet indispensable de supposer que le noyau soit infiniment petit. Cette supposition est un élément essentiel du modèle que nous avons imaginé, mais on peut s'en dispenser si l'on envisage le processus d'absorption comme une réaction. C'est pour me rendre compte si aucun trait essentiel n'avait échappé à Miss SWIRLES, que j'ai entrepris avec M. ELLIS le présent travail.

Nous n'avons pas découvert tout ce que nous avions espéré découvrir, mais nous avons pu donner une explication plausible du rayon γ singulier de 14.26×10^5 volts ; je vais l'exposer dans ce qui suit.

3. — *Description du modèle de noyau adopté ; interaction avec l'électron* K. — Considérons à l'intérieur du noyau un système quantique chargé, possédant une série d'états stationnaires, et ne se trouvant pas nécessairement dans son état d'énergie minima au moment de l'émission des rayons γ ; c'est le cas, par exemple, du noyau de RaC′ après le départ du corpuscule β nucléaire qui crée le RaC′ à partir du RaC. Admettons aussi que les transitions d'un état à un autre dans ce système nucléaire soient la source des rayons γ. Pour diverses raisons, il est probable qu'on devrait considérer, ce système comme constituant une particule α, mais il est absolument inutile d'aller si loin. Simplifions le système atomique extérieur, en le réduisant à un seul électron dans le champ de COULOMB d'une charge $+ Z\varepsilon$. Cet électron, qui peut être un électron K, L_{II}, etc., est d'abord dans son éta d'énergie minima ; mais, en particulier, si c'est un électron L_{II}, ilt sera toujours effectivement dans son état normal, puisque le niveau K est occupé. Ceci représentera notre modèle en première approximation. Pour aller plus loin, et préciser la deuxième approximation, il faut tenir compte de la réaction entre la partie oscillante du noyau et l'électron, réaction qui dépend du temps, et qui conduit à un changement d'état du système total. La forme la plus simple de réaction qu'on puisse admettre est

$$Q\varepsilon^2 / R,$$

R désignant la distance entre l'électron et le système oscillant du noyau, et $Q\varepsilon$ la charge de ce système. En adoptant cette forme nous négligeons le champ magnétique du système dans le noyau, et l'effet des potentiels retardés, mais ces simplifications affecteront à peine les résultats de notre tentative, qui ne vise qu'à obtenir des ordres de grandeur. Miss SWIRLES ne s'en est pas servie. Soit r_e la distance de l'électron au centre du noyau ; décomposons la réaction $\frac{Q\varepsilon^2}{R}$ en deux parties ; la première, $Q\varepsilon^2/r_e$, ne dépend pas du temps, et nous l'avons déjà comprise dans l'effet de la charge nucléaire $Z\varepsilon$; il ne reste plus donc à discuter que l'influence de la seconde partie, qui a la forme

$$Q\varepsilon^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_e} \right).$$

4. — *La théorie quantique de l'interaction.* — Nous allons rappeler maintenant, d'après Born, la théorie quantique générale de la réaction de deux systèmes couplés, l'énergie de couplage étant de la forme précédente, en supposant d'abord que tous les états non perturbés forment une série dénombrable. Nous allons ensuite éliminer cette restriction par un passage à la limite.

Nous allons caractériser les deux systèmes (noyau, électron) par les indices n, e. En première approximation, les fonctions de SCHRÖDINGER du système entier sont des solutions de l'équation de SCHRÖDINGER.

$$\left[\mathrm{H}_n + \mathrm{H}_e + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right]\Psi = 0.$$

où H_n, H_e sont des opérateurs dérivés des fonctions de HAMILTON. Ces solutions sont de la forme

$$\Psi = \Psi_n\Psi_e,$$

et elles forment une suite dénombrable

$$(\Psi_n\Psi_e)_1, \qquad (\Psi_n\Psi_e)_2, \cdots, \qquad (\Psi_n\Psi_e)_p, \cdots$$

La solution la plus générale est de la forme

$$\sum\nolimits_p a_p(\Psi_n\Psi_e)_p,$$

a_p étant constant.

La deuxième approximation satisfait à l'equation plus exacte

$$\left[\mathrm{H}_n + \mathrm{H}_e + \mathrm{Q}\varepsilon^2\left\{\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{r_e}\right\} + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right]\Psi = 0.$$

Employons la méthode de variation des constantes, et essayons de résoudre cette équation par une expression de la forme

$$\Psi = \sum\nolimits_p a_p(t)\ (\Psi_n\Psi_e)_p.$$

Puisque

$$\left[\mathrm{H}_n + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right]\Psi_n = 0, \qquad \left[\mathrm{H}_e + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right]\Psi_e = 0,$$

nous trouvons en faisant la substitution

$$\frac{h}{2\pi i}\sum\nolimits_p \dot{a}_p(t)\ (\Psi_n\Psi_e)_p + \mathrm{Q}\varepsilon^2\left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{r_e}\right)\sum\nolimits_p a_p(t)\ (\Psi_n\Psi_e)_p = 0.$$

Multiplions par $(\Psi_n\Psi_e)_q^*$ et intégrons ensuite dans tout l'espace (L'astérisque représente la grandeur imaginaire conjuguée). Si les fonctions de SCHRÖDINGER sont normalisées de façon que

$$\iint (\Psi_n\Psi_e)_p\,(\Psi_n\Psi_e)_p^*\,d\omega_n\,d\omega_e = 1,$$

nous trouverons comme résultat

$$\frac{h}{2\pi i}\dot{a}_q(t) = -\sum\nolimits_p a_p(t)\iint (\Psi_n\Psi_e)_q^*\,Q\varepsilon^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_e}\right)(\Psi_n\Psi_e)_p\,d\omega_n\,d\omega_e.$$

Partant de $t = 0$ avec le système entier dans un certain état, $p = 1$, nous avons les conditions initiales suivantes

$$a_1(0) = 1, \qquad a_p(0) = 0, \qquad p \neq 1.$$

Il faut donc résoudre les dernières équations, en admettant ces conditions initiales. Nous pouvons supposer que la solution existe, et qu'elle est unique. En outre, puisque pour commencer $a_p(0) = 0$, $a_p(t)$ sera petit pour des petits intervalles de temps, et l'on peut calculer ainsi des valeurs approximatives de $a_q(t)$, en se servant seulement des valeurs initiales de a_p. Nous obtenons ainsi la première approximation usuelle

$$-\frac{h}{2\pi i}\dot{a}_q(t) = \iint (\Psi_n\Psi_e)_q^*\,Q\varepsilon^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_e}\right)(\Psi_n\Psi_e)_1\,d\omega_n\,d\omega_e.$$

Nous allons maintenant examiner explicitement la nature de cette équation, en étudiant sa dépendance par rapport à t. Nous avons

$$(\Psi_n\Psi_e)_p = (\psi_n\psi_e)_p\,e^{-\frac{2\pi i}{h}W_p t},$$

lorsque ψ_n dépend *seulement* des coordonnés du système nucléaire, et ψ_e des coordonnées de l'électron ; W_p désignant l'énergie totale du système entier dans son $p^{\text{ième}}$ état. On a

$$-\frac{h}{2\pi i}\dot{a}_q(t) = e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_1-W_q)t}\,I_q,$$

lorsque I_q ne dépend pas du temps, et satisfait à

$$I_q = \iint (\psi_n\psi_e)_q^*\,Q\varepsilon^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_e}\right)(\psi_n\psi_e)_1\,d\omega_n\,d\omega_e.$$

Nous pouvons maintenant intégrer l'équation pour $a_q(t)$, et nous obtenons alors

$$a_q(t) = \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_1 - W_q)t} - 1}{W_1 - W_q} I_q.$$

Il faut maintenant nous rappeler l'interprétation générale des coefficients $a_q(t)$ dans une expression du type

$$\sum_q a_q(t)\,(\Psi_n \Psi_e)_q.$$

$|a_q(t)|^2$ désigne la probabilité pour que le système entier soit dans l'état q, au moment t. Puisqu'au moment $t = 0$ le système était dans l'état 1, $|a_q(t)|^2$ désignera la probabilité pour que la transition $1 \to q$ se produise au moment t.

Cette probabilité, $A_{1\to q}(t)$ est alors

$$A_{1\to q}(t) = 4\,|I_q|^2 \left[\frac{\sin \pi(W_1 - W_q)t/h}{(W_1 - W_q)}\right]^2.$$

Cette quantité (rapidement variable) n'a aucune importance physique ; l'état particulier q ne nous intéresse en aucune façon. Ce qui importe, c'est de savoir s'il y a eu une transition de l'état, à n'importe quel autre état q dans lequel l'électron soit libre, c'est-à-dire à un état d'énergie positive. Nous n'avons donc besoin que de :

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \sum_q A_{1\to q}(t) \\ &= \frac{4\pi^2}{h^2} t^2 \sum_q |I_q|^2 \left[\frac{\sin \pi(W_1 - W_q)t/h}{\pi(W_1 - W_q)t/h}\right]^2. \end{aligned}$$

Or, nous avons supposé que les états d'énergie positive de l'électron forment une série dénombrable, en imposant une borne artificielle sur une sphère de rayon D. Mais si D est grand, ces états seront très rapprochés, de sorte que l'on peut remplacer ε_q par une intégrale avec une erreur très petite, qui tend vers zéro lorsque $D \to \infty$. On peut s'arranger pour que la *variable* q, au moyen de laquelle on a numéroté les états prenne des valeurs entières successives, de façon qu'on puisse écrire

$$A_1(t) = \frac{4\pi^2 t^2}{h^2} \int_0^\infty dq\,|I_q|^2 \left[\frac{\sin \pi(W_1 - W_q)t/h}{\pi(W_1 - W_q)t/h}\right]^2.$$

Or, W_q est une fonction de q, donc

$$dq = \lambda'(W_q)\,dW_q.$$

Laissons de côté l'indice de W_q, et souvenons-nous que I_q est aussi une fonction de W ; l'équation pour $A_1(t)$ devient

$$A_1(t) = \frac{4\pi^2 t^2}{h^2} \int_0^\infty |\, I(W) \,|^2 \lambda'(W) \left[\frac{\sin \pi(W_1 - W)t/h}{\pi(W_1 - W)t/h} \right]^2 dW.$$

On aperçoit immédiatement, sur cette formule, que la contribution la plus importante à la valeur de l'intégrale (pour des intervalles de temps qui sont grands à l'échelle atomique) sera fournie par la région $W = W_1$; la conservation de l'énergie est ainsi assurée.

Posons

$$\frac{\pi}{h}(W - W_1)t = x ;$$

il vient

$$A_1(t) = \frac{4\pi t}{h} \int_{-\frac{\pi t W_1}{h}}^\infty |\, I\left(W_1 + \frac{hx}{\pi t}\right) |^2 \lambda'\left(W_1 + \frac{hx}{\pi t}\right) \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

Suivant un théorème bien connu on a

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-\frac{\pi t W}{h}}^\infty |I\left(W_1 + \frac{hx}{\pi t}\right)|^2 \lambda'\left(W_1 + \frac{hx}{\pi t}\right) \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = |I(W_1)|^2 \lambda'(W_1) \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx,$$

$$= \pi\, |I(W_1)|^2 \lambda'(W_1),$$

dans des conditions convenables, qui sont d'ailleurs remplies dans notre cas. Nous avons donc

$$A = \lim_{t \to \infty} \frac{A_1(t)}{t} = \frac{4\pi^2}{h} |I(W_1)|^2 \lambda'(W_1).$$

A désigne la probabilité de transition que nous cherchons. Elle représente la chance par unité de temps pour que la transition se produise pendant un temps « très long », c'est-à-dire grand par rapport à $\frac{h}{\pi W_1}$, qui est de l'ordre 10^{-20} secondes. Pour appliquer cette théorie à notre problème, ou à n'importe quel autre problème semblable, il n'y a qu'à déterminer les fonctions de SCHRÖDINGER normalisées, et s'en servir pour évaluer $I(W_1)$ et $\lambda'(W_1)$.

5. — *Fonctions d'ondes du noyau.* — Nous allons choisir maintenant un noyau déterminé, dont le schéma se rapproche le plus possible

de celui d'un noyau réel, et nous allons calculer les fonctions de SCHRÖDINGER pour ses divers états.

Le noyau le plus simple qu'on puisse imaginer satisfait aux conditions suivantes. Sa partie principale est statique, une partie oscillante plus petite peut circuler dans son champ d'énergie potentielle. La distribution de potentiel possède la symétrie sphérique, et elle consiste essentiellement en une variation brusque à la surface d'une sphère de rayon a :

$$\begin{aligned} V &= 0, \qquad r_n < a \\ V &= C, \qquad r_n > a. \end{aligned}$$

Le système oscillant à la masse m_n, et la charge $-Q\varepsilon$. (Dans ce qui suit nous ne nous occuperons que du noyau, donc nous laisserons de côté l'indice n). Dans les applications les plus simples nous supposerons $C = \infty$. Un tel modèle de noyau peut se ramener à celui de GAMOW, en modifiant V au-delà de $r = a$; mais de telles modifications n'affecteront que légèrement la forme des fonctions de SCHRÖDINGER du système oscillant à l'intérieur, et l'on peut ainsi les omettre en calculant ces fonctions.

En négligeant les modifications relativistes, nous aurons l'équation de SCHRÖDINGER suivante pour le système oscillant.

$$\left\{ -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]+V+\frac{h}{\partial\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\Psi=0.$$

Posons

$$\Psi = e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}\Psi, \quad \psi = \frac{1}{r}Y_l^m\chi(r),$$

lorsque Y_l^m désigne une fonction harmonique sphérique, convenablement normalisée, de la suite

$$(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^m P_l(\mu)\right]e^{\pm im\varphi} \quad (m = 0, 1, \cdots, l).$$

Alors

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}+\left\{\varkappa^2(W-V)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\chi=0, \qquad \varkappa^2=\frac{8\pi^2 m}{h^2}.$$

Puisque l est un nombre entier ou nul, et V est constant, cette équation équivaut à l'équation de BESSEL d'ordre $l+\frac{1}{2}$. L'équation de BESSEL

d'ordre $l + \frac{1}{2}$, modifiée de sorte que les solutions soient

$$\theta = z^{\frac{1}{2}} J_{\pm\left(l+\frac{1}{2}\right)}(z)$$

est

$$\theta'' + \left\{ 1 - \frac{l(l+1)}{z^2} \right\} \theta = 0.$$

Posons

$$z = \varkappa \sqrt{W - V}\, r,$$

nous verrons que les solutions de l'équation de SCHRÖDINGER pour χ sont

$$[\varkappa \sqrt{(W - V)}\, r]^{\frac{1}{2}} J_{\pm\left(l+\frac{1}{2}\right)}(\varkappa \sqrt{(W - V)}\, r).$$

Ce n'est donc qu'une question de pure algèbre que de considérer n'importe quelle valeur de C et de l. Mais puisque nous ne ferons d'applications que pour $l = \infty$ et pour $l = 0$, nous allons concentrer notre attention uniquement sur ces deux cas particuliers.

Cas I, $C = \infty$. L'équation à résoudre est :

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left\{ \varkappa^2 W - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \chi = 0,$$

les conditions initiales étant $\chi(0) = 0$, $\chi(a) = 0$. Pour les valeurs $r > a$, $\chi(r) \equiv 0$. Donc

$$\chi = (\varkappa r \sqrt{W})^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa r \sqrt{W}),$$

avec les valeurs d'énergie caractéristiques fixées par l'équation

$$\varkappa a \sqrt{W} = \alpha_n,$$

lorsque α_n, désigne la racine $n^{\text{ième}}$ positive de l'équation

$$J(z) = 0.$$

Nous avons ainsi construit une fonction de SCHRÖDINGER

$$\psi = \frac{A}{r} Y_l^m(\theta, \varphi)\, (\varkappa r \sqrt{W})^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa r \sqrt{W}),$$

et il reste à fixer A par la condition de normalisation. Si nous normalisons le Y_l^m de façon que

$$\iint (Y_l^m)\,(Y_l^m)^* \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi,$$

il faut déterminer les A pour que

$$4\pi A^2 \varkappa \sqrt{W} \int_0^a r J^2_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa r \sqrt{W})\, dr = 1,$$

où, puisque

$$\int_0^a r J^2_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa r \sqrt{W})\, dr = \frac{1}{2} a^2 J'^2_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa a \sqrt{W}),$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi a^2 \varkappa \sqrt{W}\, J'^2_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa a \sqrt{W})}.$$

Cas II, C borné, $l = 0$. Il faut résoudre

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \varkappa^2 W \chi = 0, \qquad (r < a)$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} - \varkappa^2 (C - W)\chi = 0, \qquad (r > a,\ C > W).$$

Les solutions doivent être de la forme

$$\chi = A \sin(\varkappa r \sqrt{W}), \qquad r < a,$$

$$\chi = B e^{-\varkappa (r-a)\sqrt{(C-W)}}, \qquad r > a,$$

χ et $d\chi/dr$ étant tous les deux continus pour $r = a$. Il faut donc que

$$A \sin(\varkappa a \sqrt{W}) = B,$$

$$A \sqrt{W} \cos(\varkappa a \sqrt{W}) = -B \sqrt{(C - W)}.$$

Les énergies caractéristiques sont les racines de l'équation

$$\operatorname{tg}(\varkappa a \sqrt{W}) = -\sqrt{\frac{W}{C - W}},$$

ou bien

$$\varkappa a \sqrt{W} = s\pi - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{W}{C - W}} \qquad (s = 1, 2, 3, \cdots),$$

et

$$B = (-)^{s-1} A \sqrt{\frac{W}{C}}.$$

Il n'y a aucune racine possible pour $s = 0$, et la série de racines s'arrête quand on atteint une valeur de s pour laquelle $W \geqq C$.

La fonction de SCHRÖDINGER complète peut maintenant s'écrire ainsi

$$\psi = \frac{A}{r} \sin(\varkappa r \sqrt{W}), \qquad (r < a)$$

$$\psi = (-)^{s-1} \sqrt{\left(\frac{W}{C}\right)} \frac{A}{r} e^{-\varkappa(r-a)\sqrt{(C-W)}}, \qquad (r > a).$$

On normalise en posant

$$4\pi \int_0^\infty |\psi|^2 r^2 dr = 1,$$

que l'on réduit facilement à

$$A^2 = \frac{1}{2\pi \{ a + 1/\{ \varkappa \sqrt{(C - W)} \}}.$$

6. — *Les fonctions d'onde pour l'électron.* — Je vais maintenant donner les fonctions de SCHRÖDINGER hydrogénoïdes pour l'électron, qui sont de la forme ordinaire et bien connue. Je représenterai cependant la fonction de SCHRÖDINGER appartenant aux états d'énergie positive, par les intégrales de BARNES et MELLIN qui utilisent les fonctions Γ de la variable d'intégration. C'est une représentation qui me semble la plus appropriée à notre but. Nous concentrerons notre attention uniquement sur les électrons dont les niveaux initiaux sont K — L_I — M_I —, pour lesquels le nombre quantique azimutal $l = 0$. De plus nous n'écrivons pas pour le moment l'indice distinctif e, puisqu'aucune confusion n'est possible.

On a

$$(\psi_e)_1 = \tau_1(r),$$

$$(\psi_e)_q^* = \left[Y_{l_q}^{m_q}(\theta, \varphi)\right]^* \tau_q^*(r).$$

Pour un électron K

$$\tau_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_o}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-Zr/a_o},$$

normalisé, lorsque a_0 désigne le rayon de la plus petite orbite de l'atome d'*hydrogène* de BOHR. Les autres τ_1, sont pareils, et il n'est pas pour le moment nécessaire de les écrire en détail.

Le facteur fonction de r, dans l'état q d'énergie positive, est la solution de l'équation de SCHRÖDINGER,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tau_q}{dr}\right)+\left\{\kappa^2\left(\frac{Z\varepsilon^2}{r}+E'\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\tau_q=0$$

$$\left(\kappa^2=\frac{8\pi^2 m}{h^2}\right),$$

qui est régulière aux environs de $r = 0$. Pour commencer, cette solution normalisée sur une sphère de rayon D, doit s'annuler sur cette même sphère. Posons

$$\rho = 2i\kappa r\sqrt{E'} = i\alpha r,$$
$$k = -i\kappa Z\varepsilon^2/(2\sqrt{E'}) = -i\beta\ ;$$

nous trouvons que $\tau_q(r)$ est de la forme

$$\tau_q(r)=\frac{1}{r}W(\rho),$$

lorsque $W(\rho)$ satisfait à l'équation, appelée quelquefois celle de WHITTAKER,

$$\frac{d^2W}{d\rho^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)W=0.$$

Ceci n'est en fait, qu'une forme de l'équation à laquelle satisfont les fonctions hypergéométriques généralisées du type ${}_1F_1(\lambda\,|\,\mu\,|\,\rho)$. Employons les intégrales de BARNES et MELLIN, et la notation du Traité de WHITTAKER et WATSON, *Modern Analysis* ; deux solutions indépendantes de cette équation sont

$$W_{k,l+\frac{1}{2}}(\rho)$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^k}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(-s-k-l)\,\Gamma(-s-k+l+1)}{\Gamma(-k-l)\,\Gamma(-k+l+1)}\rho^s\,ds,\quad |\arg\rho|<\frac{3}{2}\pi,$$

$$W_{k,l+\frac{1}{2}}(e^{-\pi i}\rho)$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{2}\rho}e^{\pi ik}\rho^{-k}}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{\Gamma(s)\Gamma(-s+k-l)\Gamma(-s+k+l+1)}{\Gamma(k-l)\,\Gamma(k+l+1)}e^{-\pi is}\rho^s\,ds,\ |\arg\rho-\pi|<\frac{3}{2}\pi.$$

Les chemins d'intégration peuvent être des parallèles quelconques à l'axe imaginaire de s, modifiés, s'il est nécessaire, de sorte que tous les pôles de $\Gamma(s)$ soient laissés à gauche, et tous les autres à droite. On obtient immédiatement les expressions asymptotiques pour une grande valeur de ρ, en faisant en sorte que les chemins passent de

l'autre côté des pôles de $\Gamma(s)$. On prouve facilement par les méthodes ordinaires que

$$\frac{(-)^{l+1}W_{k,l+\frac{1}{2}}(\rho)}{\Gamma(1+l+k)}+\frac{W_{-k,l+\frac{1}{2}}(e^{-\pi i}\rho)}{\Gamma(1+l-k)}=\frac{e^{\frac{1}{2}\rho}}{2\pi i}\frac{e^{\pi ik}}{\Gamma(1+l+k)}$$
$$\times\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{\Gamma(s+k)\,\Gamma(-s+l+1)}{\Gamma(s+1+l)}\rho^s\,ds \qquad |\arg\rho|<\tfrac{1}{2}\pi.$$

Le chemin d'intégration doit séparer les pôles de $\Gamma(s+k)$ et de $\Gamma(-s+l+1)$. En recourbant le chemin de façon à entourer seulement les pôles de $\Gamma(-s+l+1)$ sur l'axe positif réel, on prouve facilement que cette combinaison des fonctions W peut se représenter par une série de puissances de ρ qui converge pour toutes les valeurs de ρ, et qui commence par le terme ρ^{l+1} ; elle représente donc la solution qui est régulière près de $\rho=0$, dont nous avons besoin pour τ_q. En discutant un peu plus complètement les valeurs *asymptotiques* des fonctions Γ, nous pouvons démontrer, que pour un k purement imaginaire, avec $l\geq 0$, le chemin d'intégration peut être la ligne droite $\frac{3}{4}-\infty\, i \to \frac{3}{4}+\infty\, i$, et qu'il est possible d'employer cette intégrale pour toute la gamme de valeurs.

$$|\arg\rho|\leqslant\tfrac{1}{2}\pi,$$

et donc pour le ρ purement imaginaire de notre fonction de SCHRÖDINGER. On peut ainsi écrire

$$\tau_q(r)=\frac{A}{r}\frac{e^{\pi\beta+\frac{1}{2}i\alpha r}}{2\pi i\,\Gamma(1+l-i\beta)}\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i}\frac{\Gamma(s-i\beta)\,\Gamma(-s+l+1)}{\Gamma(1+s+l)}(i\alpha r)^s\,ds.$$

Pour r grand, c'est-à-dire pour un grand ρ, nous trouvons que

$$W_{k,l+\frac{1}{2}}(\rho)\sim e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^k, \qquad W_{-k,l+\frac{1}{2}}(e^{-\pi i}\rho)\sim e^{\frac{1}{2}\rho}e^{\pi ik}\rho^{-k}.$$

Donc

$$\tau_q(r)\sim\frac{A}{r}\left\{\frac{(-)^{l+1}}{\Gamma(1+l-i\beta)}e^{-\frac{1}{2}i\alpha r}(\alpha r)^{-i\beta}e^{\frac{1}{2}\pi\beta}+\frac{1}{\Gamma(1+l+i\beta)}e^{\frac{1}{2}i\alpha r}(\alpha r)^{i\beta}e^{\frac{1}{2}\pi\beta}\right\},$$
$$=\frac{2A}{r}\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\beta}}{|\Gamma(1+l-i\beta)|}\cos\left(\tfrac{1}{2}\alpha r+\beta\log\alpha r+\mu\right),$$

lorsque μ est une constante. $\tau_q(r)$ doit également être normalisé

$$4\pi \int_0^D | \tau_q(r) |^2 r^2 dr = 1.$$

On a donc

$$\frac{16\pi A^2 e^{\pi\beta}}{| \Gamma(1 + l + i\beta) |^2} \int_0^D \cos^2 \left(\frac{1}{2}\alpha r\right) dr \sim 1,$$

d'où il s'ensuit que

$$| A | \sim \frac{| \Gamma(1 + l + i\beta) | e^{-\frac{1}{2}\pi\beta}}{\sqrt{(8\pi D)}}.$$

Finalement l'expression de $\tau_q(r)$, convenablement normalisé, sera donnée par

$$\tau_q(r) = \frac{e^{\frac{1}{2}\pi\beta}}{\sqrt{(8\pi D)}} \frac{1}{r} \frac{e^{\frac{1}{2}i\alpha r}}{2\pi i} \int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} \frac{\Gamma(s - i\beta)\,\Gamma(-s + l + 1)}{\Gamma(1 + s + l)} (i\alpha r)^s ds.$$

Il ne reste qu'à déterminer la fonction $\lambda'(W_q)$ d'après la relation fonctionnelle entre W_q et q, en s'arrangeant pour que $\tau_q(D) = 0$. W_q ne diffère de E' que par une constante. Il résulte de la forme *asymptotique* de $\tau_q(r)$ que

$$\frac{1}{2}\alpha D \sim \frac{1}{2}(2q + 1)\pi \sim q\pi,$$

et puisque

$$\alpha = 2\varkappa\sqrt{E'}$$

$$q \sim \varkappa D \sqrt{E'}/\pi,$$

$$dq \sim \frac{\varkappa D}{2\pi\sqrt{E'}} dE' = \frac{\varkappa D}{2\pi\sqrt{E'}} dW_q.$$

Donc

$$\lambda'(W_q) \sim \frac{\varkappa D}{2\pi\sqrt{E'}}.$$

Il est maintenant possible d'écrire la formule principale pour la probabilité de transition A, en y incorporant ce dernier résultat, sous la forme :

$$\boxed{A = \frac{4\pi^2}{h^2} \sqrt{\frac{2m_e}{E'}}\, D \mid I(W_1) \mid^2}$$

7. — *Calcul de l'intégrale d'interaction.* — Il faut maintenant revenir au *calcul de l'* « *intégrale de réaction* » $I(W_1)$,

$$I(W_1) = [I_q]_{W_q = W_1} = [I_q]_{E' = h\nu - E_o},$$

$h\nu$ désignant la diminution d'énergie dans le système nucléaire, représente aussi, bien entendu, l'énergie du rayon γ qui peut être émis lorsque le même changement a lieu dans le noyau sans affecter les électrons extérieurs. Nous sommes obligés maintenant d'insérer les indices n, e, pour distinguer les coordonnées du système nucléaire et de l'électron. I_q s'exprime par la formule

$$I_q = Q\varepsilon^2 \int (\psi_e)^*_q (\psi_e)_1 d\omega_e \int (\psi_n)^*_q (\psi_n)_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_e} \right) d\omega_n.$$

Deux fonctions de SCHRÖDINGER nucléaires quelconques étant *orthogonales*, on peut laisser de côté le terme $\frac{1}{r_e}$.

Dans l'expression précédente R est donné par

$$R^2 = r_n + r_n^2 - 2 r_e r_n \cos \theta,$$

où

$$\cos \theta = \cos \theta_e \cos \theta_n + \sin \theta_e \sin \theta_n \cos (\varphi_e - \varphi_n).$$

Lorsque $r_n > r_e$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_e} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(r_n)^t}{(r_e)^{t+1}} P_t(\cos \theta) ;$$

P_t est le $t^{\text{ième}}$ *polynome* de LEGENDRE. Lorsque $r_n > r_e$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_n} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(r_e)^t}{(r_n)^{t+1}} P_t(\cos \theta).$$

Dans l'intégrale intérieure de I_q, on a :

$$d\omega_n = r_n^2 dr_n \sin \theta_n d\theta_n d\varphi_n,$$

et l'intégration selon les coordonnées *angulaires* est donc de la forme

$$\iint P_t(\cos(\theta)) Y_{l_1}^{m_1}(\theta_n, \varphi_n) \left[Y_{l_q}^{m_q}(\theta_n, \varphi_n) \right]^* \sin \theta_n d\theta_n d\varphi_n.$$

Ce serait trop compliquer la question que d'essayer de considérer le cas général. Nous ferons ainsi uniquement attention aux cas dans

lesquels un l est zéro ; pour préciser, posons $l_q = 0$, de façon que $[Y_{l_q}^{m_q}]^* \equiv 1$. Physiquement, cela veut dire que nous nous bornons aux transitions pour lesquelles le moment de quantité de mouvement est nul dans l'état final du système *nucléaire*. Il s'ensuit alors, d'après une règle bien connue, que

$$\iint P_t(\cos\Theta) Y_{l_1}^{m_1}(\theta_n, \varphi_n) \sin\theta_n d\theta_n d\varphi_n = \frac{4\pi}{2l_1+1} Y_{l_1}^{m_1}(\theta_e, \varphi_e) \qquad (t = l_1)$$

$$= 0 \qquad (t \neq l_1)$$

Ainsi l'intégrale intérieure dans I_q se réduit à

$$\frac{4\pi}{2l_1+1}\left\{\frac{1}{r_e^{l_1+1}}\int_0^{r_e}\chi_q(r_n)\chi_1(r_n) r_n^{l_1} dr_n + r_e^{l_1}\int_{r_e}^{\infty}\chi_q(r_n)\chi_1(r_n)\frac{dr_n}{r_n^{l_1+1}}\right\} Y_{l_1}^{m_1}(\theta_e, \varphi_e),$$

que l'on peut écrire pour abréger :

$$\frac{4\pi}{2l_1+1} X(r_e) Y_{l_1}^{m_1}(\theta_e, \varphi_e).$$

En y insérant les fonctions électroniques

$$I_q = \frac{4\pi}{2l_1+1} Q\varepsilon^2 \int_0^{\infty} X(r_e)\tau_1(r_e)\tau_q^*(r_e) r_e^2 dr_e \iint \left[Y_{l_q}^{m_q}(\theta_e,\varphi_e)\right]^* Y_{l_1}^{m_1}(\theta_e,\varphi_e)\sin\theta_e d\theta_e d\varphi_e,$$

cette expression s'annule à moins que

$$\left[Y_{l_q}^{m_q}\right] = Y_{l_1}^{m_1},$$

c'est-à-dire à moins que

$$l_1 = l_q \qquad m_1 = m_q,$$

et dans ce cas elle se réduit à :

$$I_q = \frac{16\pi^2}{2l_1+1} Q\varepsilon^2 \int_0^{\infty} X(r_e)\tau_1(r_e)\tau_q^*(r_e) r_e^2 dr_e,$$

Après développement, I_q devient

$$I_q = \frac{16\pi^2}{2l_1+1} Q\varepsilon^2 \int_0^{\infty} \tau_1(r_e)\tau_q^*(r_e)$$

$$\times \left\{\frac{1}{r_e^{l_1-1}}\int_0^{r_e}\chi_q(r_n)\chi_1(r_n) r_n^{l_1} dr_n + r_e^{l_1+2}\int_{r_e}^{\infty}\chi_q(r_n)\chi_1(r_n)\frac{dr_n}{r_n^{l_1+1}}\right\} dr_e.$$

Les conditions

$$l_1 = l_q \qquad m_1 = m_q.$$

nous donnent les règles de sélection nécessaires pour que le moment de quantité de mouvement obéisse à une loi de conservation. Dans la transition à laquelle appartient I_q, nous trouvons les changements suivants

Noyau	Électron
Nombres quantiques radiaux et azimutaux : $(n_1, l_1) \rightarrow (n_q, 0)$	Nombres quantiques radiaux et azimutaux : $(n_1', 0) \rightarrow (\text{Libre}, l_1)$

Ces changements sont assez généraux pour le but que nous nous proposons. Arrivé à cette étape du calcul, on peut se rendre compte de l'effet de l'approximation que nous avons faite lorsque nous avons supposé que *le noyau était petit*. Cela signifie que l'on peut laisser de côté les contributions à I_q de toutes les régions pour lesquelles $r_n > r_e$. Les fonctions propres nucléaires s'annulent dans cette région.

On a donc le droit de négliger complètement la seconde intégrale, et de prendre comme intervalle d'intégration de la première tout l'intervalle de zéro à l'infini. I_q prend alors la forme simple du produit de deux fonctions, l'une électronique, l'autre nucléaire

$$I_q = \frac{16\pi^2}{2l_1 + 1} Q\varepsilon^2 \int_0^\infty \tau_1(r_e)\tau_b^*(r_e) \frac{dr_e}{r_e^{l_1 - 1}} \times \int_0^\infty \chi_q(r_n)\chi_1(r_n) r_n^{l_1} dr_n.$$

Lorsque $l = 0$, le second facteur s'annule, à cause de l'orthogonalité des fonctions de SCHRÖDINGER radiales. Cet I_q approximatif s'annule, tandis que l'I_q exacte ne s'annule pas. Lorsque $l = 1$, le second facteur représente la polarisation du système nucléaire. Quand $l_1 \geqslant 2$ le facteur de la polarisation ne s'annule pas, mais donne des moments électriques d'un ordre plus élevé, sans importance pratique. Avec l'approximation ordinaire, c'est seulement pour la transition $\Delta l_1 = \pm 1$ que le système nucléaire sera polarisé, et qu'il émettra du rayonnement. La théorie ancienne comprend donc uniquement de telles transitions. Les autres transitions, particulièrement celle qui correspond à $\Delta l_1 = 0$, forment l'élément nouveau de la théorie. Elles ne sont pas associées à l'émission de rayons γ, mais nous verrons plus loin

qu'elles peuvent expliquer l'existence du rayon γ singulier de 1,426 $\times$ 10^6 volts.

8. — *Valeurs numériques.* — Précisons maintenant quelques valeurs numériques dont nous aurons besoin plus loin pour évaluer I_q. On a, pour un électron

$$\varkappa_e^2 = \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} = 1{\cdot}664 \times 10^{27}, \qquad \varkappa_e = 4{\cdot}08 \times 10^{13},$$

$$\sqrt{E'} = 1{\cdot}261 \times 10^{-6}\sqrt{V}, \qquad \text{V en volts}$$

$$\alpha = 2\varkappa_e\sqrt{E'} = 1{\cdot}03 \times 10^{8}\sqrt{V}\ cm^{-1}.$$

$$\beta = \varkappa_e Z\varepsilon^2/(2\sqrt{E'}) = 3{\cdot}09 \times 10^{2} V^{-\frac{1}{2}} \qquad (Z = 84)$$

$$a_0 = 5.28 \times 10^{-9} cm.$$

Pour le rayon de la sphère nucléaire nous prendrons la valeur

$$a = 2 \times 10^{-12} cm.$$

Si le système oscillant est un corpuscule α :

$$\varkappa_n = 3{\cdot}5 \times 10^{13}.$$

La valeur de a ci-dessus conduit à :

$$\alpha a = 2 \times 10^{-4}\sqrt{V},$$

Pour un électron de V = 10^6 volts environ, αa = 0.2. Cela nous montre qu'il est parfaitement légitime de considérer r_e comme petit dans les expressions $\tau_q^*(r_e)$ et $\tau_1(r_e)$, lorsque $r_e < a$, c'est-à-dire à l'intérieur du noyau. Les différences d'énergie entre les niveaux du noyau sont telles que

$$\Delta W = 5{\cdot}11 \times 10^{5} \frac{\Delta(s^2)}{(10^{12}a)^2} \text{ volts.}$$

9. — *Calcul de l'intégrale d'interaction* (suite). — Evaluons I_q pour C = ∞ et pour la transition o $\rightarrow$ o. Dans ce cas particulier, l_1 = o, et les fonctions de SCHRÖDINGER nucléaires $\chi(r_e)$ sont toutes nulles lorsque $r > a$. Nous avons

$$I_q = 16\pi^2 Q\varepsilon^2 \int_0^a \tau_1(r_e)\tau_q^*(r_e)dr_e \left\{ r_e \int_0^{r_e} \chi_q(r_n)\chi_1(r_n)dr_n + r^2 \int_{r_e}^a \chi_q(r_n)\chi_1(r_n)\frac{dr_n}{r_n} \right\}$$

$$+ 16\pi^2 Q\varepsilon^2 \int_a^\infty \tau_1(r_e)\tau_q^*(r_e)dr_e \left\{ r_e \int_0^a \chi_q(r_n)\chi_1(r_n)dr_n \right\}.$$

Le second terme est égal à zéro, parce que l'intégrale intérieure s'annule à cause de la condition d'*orthogonalité*. Nous avons ainsi

$$I_q = 16\pi^2 Q\varepsilon^2 \int_0^a \tau_1(r_e)\tau_q^*(r_e) r_e^2 dr_e \int_{r_e}^a \chi_q(r_n)\chi_1(r_n) dr_n \left\{ \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_e} \right\}.$$

Introduisons dans cette équation les valeurs de χ_q et χ_1, que nous avons déjà calculées, à savoir

$$\chi_q(r_n) = \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \sin\left(\varkappa_n r_n \sqrt{(W_n)_q}\right), \qquad \chi_1(r_n) = \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \sin\left(\varkappa_n r_n \sqrt{(W_n)_1}\right).$$

Considérons r_e comme petit dans τ_q^* et τ_1 de sorte que ceux-ci se réduisent à leurs termes premiers. Laissons de côté les facteurs de valeur absolue égale à l'unité. Nous trouverons alors que l'on a, approximativement :

$$|I_q| = \frac{8\pi}{a} Q\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{8\pi D}} e^{\frac{\pi}{2}\beta} \sqrt{\frac{\pi\beta}{\sin h\, \pi\beta}} \int_0^a r_e^2 dr_e \int_{r_e}^a \sin\left(\varkappa_n r_n \sqrt{(W_n)_q}\right)$$
$$\times \sin\left(\varkappa_n r_n \sqrt{(W_n)_1}\right) \left\{ \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_n} \right\} dr_n.$$

L'intégrale double se réduit par une intégration par partie, à

$$\frac{1}{6} \int_0^a r_n^2 \sin\left(\varkappa_n r_n \sqrt{(W_n)_q}\right) \sin\left(\varkappa_n r_n \sqrt{(W_n)_1}\right) dr_n.$$

et devient facile à calculer. Sa valeur est

$$\pm \frac{a}{6\varkappa_n} \left[\frac{1}{\left\{ \sqrt{(W_n)_q} - \sqrt{(W_n)_1} \right\}^2} - \frac{1}{\left\{ \sqrt{(W_n)_q} + \sqrt{(W_n)_1} \right\}^2} \right].$$

L'événement le plus probable est un changement d'une unité dans le nombre quantique radial du noyau : le second terme sera alors au moins neuf fois plus petit que le premier, et l'on peut ainsi le laisser de côté. La valeur de

$$e^{\frac{1}{2}\pi\beta} \sqrt{\frac{\pi\beta}{\sin h\, \pi\beta}}.$$

tend vers l'unité, lorsque $\beta \to 0$, et tend vers $(2\pi\beta)^{\frac{1}{2}}$ lorsque $\beta \to \infty$. La valeur de $\pi\beta$ dans nos applications sera voisine de l'unité. L'approximation $(2\pi\beta)^{\frac{1}{2}}$ est assez bonne pour une telle valeur. Nous

pouvons donc écrire

$$I_q = \frac{8\pi Q\varepsilon^2(2\pi\beta)^{\frac{1}{2}}}{6\varkappa_n(\sqrt{(W_n)_q} - \sqrt{(W_n)_1})^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{(8\pi D)}}.$$

En substituant cette valeur dans l'expression de A on trouve :

$$A = \frac{2\pi\alpha^2\beta}{9h^2}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3\sqrt{\left(\frac{2m_e}{E'}\right)}\frac{8\pi^2Q^2\varepsilon^4a^4}{\varkappa_n^4(\sqrt{(W_n)_q} - \sqrt{(W_n)_1})^4a^4}.$$

Cela nous donne la probabilité de réaction avec un seul électron de la couche K. On doit la multiplier par deux pour avoir l'effet de l'ensemble des deux électrons K.

Si nous utilisons les valeurs numériques déjà données, ainsi que les valeurs connues des énergies caractéristiques W_n, nous trouvons en multipliant A par deux :

$$\boxed{A_{0\to 0} = \frac{4\times 10^{10}}{(\Delta s)^4}}$$

Cette formule correspond à la transition nucléaire $l = 0 \to 0$, transition qui ne peut pas être produite par l'émission d'un rayon γ.

Après avoir franchi cette étape de notre raisonnement, il devient évident que ces transitions auxquelles n'est attaché aucun rayonnement nous permettent en principe d'expliquer l'apparition, dans le spectre de rayons β, de certaines raies qui ne sont accompagnées par aucun rayon γ observable au moyen de son action sur un atome éloigné. Elles peuvent aussi s'associer à un rayon γ anormalement faible, lequel donnerait lieu, bien plus souvent que les autres, au phénomène d'absorption interne. Mais avant de discuter numériquement en détail de ce résultat, il est nécessaire d'étudier de plus près le problème ordinaire d'émission de rayons γ, et de leur absorption interne, pour lequel on a $\Delta l = -1$, $l = 1 \to 0$.

Les mêmes formules nous donnent ,bien entendu, le nombre d'électrons K expulsés, mais elles prennent ici une forme plus simples. Il est inutile d'entrer dans les détails, mais il suffira de remarquer que lorsque le facteur

$$\int_0 \chi_q(r_n)\chi_1(r_n)r_n^{l_1}dr_n,$$

ne s'annule pas, on peut laisser de côté la région $r_n > r_e$ pour ne tenir compte que de la région $r_n < r_e$. On peut alors prendre

$$I_q = \frac{16\pi^2}{2l_1 + 1} Q\varepsilon^2 \int_0^\infty \tau_1(r_e)\tau_q^*(r_e) \frac{dr_e}{r_e^{l_1+1}} \times \int_0^\infty \chi_q(r_n)\chi_1(r_n) r_n^{l_1} dr_n.$$

Pour la transition $l_1 = 1 \rightarrow 0$, on peut écrire

$$I_q = \frac{16\pi^2}{3} Q\varepsilon^2 P_e P_n,$$

où

$$P_e = \int_0^\infty \tau_1(r_e)\tau_q^*(r_e) dr_e,$$

$$P_n = \int_0^\infty \chi_q(r_n)\chi_1(r_n) r_n dr_n.$$

Alors

$$\underset{1 \rightarrow 0}{A} = \frac{4\pi^2}{h^2} \sqrt{\left(\frac{2m_e}{E'}\right)} D \frac{256\pi^4 Q^2 \varepsilon^4}{9} |P_e|^2 |P_n|^2.$$

10. — *Calcul de la probabilité d'émission du rayonnement.* — A représente la probabilité par unité de temps pour qu'un électron K soit expulsé ; elle ne présente pas un grand intérêt par elle-même. Il est plus important de connaître le rapport entre cette probabilité et la probabilité par unité de temps d'émission d'un rayon γ, par le même système nucléaire ; en effet ce rapport donne directement la probabilité d'absorption interne.

Or, en mécanique quantique, le rayonnement émis par unité de temps sous forme de quanta $h\nu$, ayant leur vecteur électrique parallèle à l'axe x, est donné par

$$\frac{32\pi^4 \nu^3}{3hc^3} \overline{|M_x(n, m)|^2}.$$

pour chacun des systèmes envisagés

Dans cette formule M_x désigne la composante suivant l'axe des x du moment électrique du système, correspondant aux deux états n, m, si la transition qui émet $h\nu$ est $n \rightarrow m$. Nous trouvons après des calculs simples que chacun de nos systèmes émettra les quanta $h\nu$

à raison de

$$\frac{64\pi^4 Q^2\varepsilon^2\nu^3}{9hc^3}\,\frac{\left[\int_0^\infty r_n\chi_q(r_n)\chi_1(r_n)dr_n\right]^2}{\left[\int_0^\infty \chi_q^2(r_n)dr_n\right]\left[\int_0^\infty \chi_1^2(r_n)dr_n\right]}.$$

par unité de temps

D'après les conditions de normalisation :

$$\int_0^\infty \chi_q^2(r_n)dr_n = \int_0^\infty \chi_1^2(r_n)dr_n = \frac{1}{4\pi}.$$

Donc la probabilité d'émission par unité de temps sera

$$\frac{1024\pi^6 Q^2\varepsilon^2\nu^3}{9hc^3}\,P_n^2.$$

et la probabilité d'absorption interne

$$\frac{c^3\varepsilon^2}{h\nu^3}\sqrt{\frac{2m_e}{E'}}\,D|P_e|^2.$$

Il faut maintenant calculer $|P_e|^2$. En substituant pour τ_1 et τ_q^*, nous trouvons que

$$P_e = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\beta}}{\pi\sqrt{8D}}\int_0^\infty e^{-r\left(\frac{Z}{a_0}+\frac{1}{2}i\alpha\right)}\frac{dr}{r}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty}\frac{\Gamma(s+i\beta)\Gamma(2-s)}{\Gamma(2+s)}(-i\alpha r)^s ds.$$

On peut renverser l'ordre d'intégration ; la première intégrale devient alors

$$\int_0^\infty e^{-r\left(\frac{Z}{a_0}+\frac{1}{2}i\alpha\right)}r^{s-1}dr = \frac{\Gamma(s)}{\left(\frac{Z}{a_0}+\frac{1}{2}i\alpha\right)^s},$$

et par conséquent

$$P_e = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\beta}}{\pi\sqrt{8D}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i}\frac{\Gamma(s+i\beta)\Gamma(2-s)\Gamma(s)}{\Gamma(2+s)}\left(\frac{-i\alpha}{\frac{Z}{a_0}+\frac{1}{2}i\alpha}\right)^s ds.$$

L'intégrale se présente ici sous une forme simple. On l'évalue en développant suivant les puissances de la quantité μ :

$$\mu = \frac{i\alpha}{\frac{Z}{a_0}+\frac{1}{2}i\alpha}.$$

et en intégrant le long d'un chemin qui entoure les pôles de $\Gamma(2s)$ sur l'axe positif réel. On trouve ainsi que

$$P_e = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2}\pi\beta}}{\pi\sqrt{8D}}\,\Gamma(-1+i\beta)\left\{\frac{2}{\mu}\left[1-(1-\mu)^{1-i\beta}\right]+(i\beta-1)\left[1+(1-\mu)^{-i\beta}\right]\right\}$$

Ce développement en série, et l'évaluation de ces séries, ne sont valables, bien entendu, que lorsque $|\mu|>1$. Cependant la dernière égalité est vraie pour toutes les valeurs de μ qu'on peut atteindre par prolongement analytique des deux expressions, c'est-à-dire pour toutes les valeurs pour lesquelles

$$|\arg(-\mu)|<\pi.$$

$\alpha\, a$ est égal à 0,2 pour des rayons γ, d'environ un million de volts $a = 2\times 10^{-12}$; $\frac{a_0}{Z}$ environ 6×10^{-11}, et finalement $\alpha\frac{a_0}{Z}$ est environ égal à 6, donc assez grand par rapport à l'unité. Pour des rayons γ de l'ordre de 10^6 volts nous avons donc approximativement

$$-\mu = 2e^{-i(\pi-\delta)}. \qquad (\delta \text{ petit})$$

Donc

$$(1-\mu)^{1-i\beta} = e^{-i\pi(1-i\beta)} = -e^{-\pi\beta},$$
$$(1-\mu)^{-i\beta} = e^{-\pi\beta},$$

et

$$P_e = \frac{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{+\frac{1}{2}\pi\beta}}{\pi\sqrt{8D}}\,\frac{(1+e^{-\pi\beta})\Gamma(1+i\beta)}{(-1+i\beta)},$$

$$|P_e|^2 = \frac{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 e^{+\pi\beta}}{8\pi^2 D}\,\frac{(1+e^{-\pi\beta})^2}{1+\beta^2}\,\Gamma(1+i\beta)\Gamma(1-i\beta),$$

$$= \left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{e^{\pi\beta}}{8\pi^2 D}\,\frac{(1+e^{-\pi\beta})^2}{1+\beta^2}\,\frac{\pi\beta}{\sinh\pi\beta},$$

$$= \frac{Z^3}{4a_0^3\pi^2 D}\,\frac{\pi\beta\coth\left(\frac{1}{2}\pi\beta\right)}{1+\beta^2}.$$

La probabilité B d'absorption interne est

$$\underset{1\to 0}{B} = \frac{c^3\varepsilon^2}{h\nu^3}\sqrt{\left(\frac{2m_e}{E'}\right)}\,\frac{Z^3}{4a_0^3\pi^2}\,\frac{\pi\beta\coth\left(\frac{1}{2}\pi\beta\right)}{1+\beta^2}.$$

Cette formule ne prétend qu'à une exactitude très limitée. En y introduisant des valeurs numériques pour les constantes atomiques, on trouve pour un rayon γ de $h\nu = 1.426 \times 10^6$ volts un coefficient d'absorption interne, à peu près égal à 0,0001. Cette valeur est environ dix fois plus petite que 0,0014, valeur observée pour des fréquences de cet ordre ; ce résultat est d'accord avec le calcul de Miss SWIRLES analogue au nôtre, mais plus exact.

11. — *Discussion des résultats théoriques.* — Passons maintenant à la discussion générale de nos résultats et ensuite à leur interprétation physique. Nous avons vérifié que, lorsque la transition dans le noyau est normale, c'est-à-dire quand par exemple $l_1 = 1 \rightarrow 0$, on peut interpréter l'émission des raies β aussi bien comme une réaction directe de cette transition que comme résultat de l'émission et l'absorption interne d'un rayonnement ondulatoire. En outre, nous avons constaté que la théorie quantique conduit à une valeur numérique du coefficient d'absorption environ dix fois plus petite que la valeur observée. Cela reste probablement vrai pour une transition nucléaire $\Delta l_1 = \pm 1$, laquelle émet elle aussi du rayonnement. Il serait intéressant d'entreprendre un calcul direct pour le cas le plus général. Le facteur $|P_n|^2$ entre d'une certaine façon tant dans la formule du taux d'émission du rayonnement que dans celle de la vitesse d'expulsion des électrons du niveau K. La manière dont il intervient dans ces deux formules nous permet de déduire que le calcul du coefficient d'absorption n'est pas affecté si l'on change le modèle de noyau, pourvu qu'on puisse encore négliger les éléments pour lesquels $r_n > r_e$. Nous reviendrons plus loin sur le cas où cela n'est plus possible. Supposons pour le moment que cette approximation soit légitime. Dans ce cas l'écart d'avec l'expérience ne peut être attribué qu'à l'une des trois erreurs théoriques suivantes :

1. Le principe sur lequel nous nous sommes basés pour calculer la vitesse d'expulsion des électrons peut être erroné. Cela paraît très improbable. Ce calcul est pareil à beaucoup d'autres, pour lesquels ce même principe s'est avéré correct, quoiqu'il faille tout de même mentionner que ces derniers calculs ne s'appliquaient pas au noyau. Nous allons cependant faire un peu plus loin une application de ce principe à un système nucléaire, qui conduira à des résultats très satisfaisants.

2. La valeur numérique de la vitesse d'expulsion peut être erronée à cause de l'emploi des fonctions de SCHRÖDINGER hydrogénoïdes. Cela est possible, mais assez peu probable, parce que la région de l'espace des coordonnées qui fournit la contribution la plus importante à la réaction est constituée par le voisinage du noyau, et que dans cette région les fonctions de SCHRÖDINGER sont très sensiblement pareilles à celles d'un atome hydrogénoïde. Ce point pourrait être éclairci, en poussant plus loin les calculs, mais ceux-ci sont fastidieux.

3. Le calcul de l'énergie émise par unité de temps par notre système nucléaire peut être erroné, la vitesse de réaction restant cependant correcte. Cela semble possible, bien que nous n'ayons aucune raison précise qui justifie cette hypothèse.

Seule une théorie plus complète du rayonnement que celle que nous possédons actuellement, pourrait l'infirmer ou la confirmer. De toute façon, cette hypothèse rejette l'idée d'une équivalence quelconque entre les deux processus imaginables d'émission de l'électron K : émission par effet du rayonnement ou par réaction.

Il ne semble vraiment pas probable qu'une quelconque de ces trois erreurs soit suffisamment grande pour expliquer les divergences observées. Cela étant, nous admettrons dans ce qui suit qu'elles n'ont effectivement aucune importance.

Cependant si nous considérons maintenant l'effet des transitions nucléaires du type $l_1 = 0 \rightarrow 0$, la question se présente de manière tout à fait différente. Le système nucléaire peut ne pas émettre de rayonnement γ du tout, ou cette émission peut être très faible, et ne provenir que de moments quadrupôles ou d'ordre encore plus élevé. Dans ces conditions, malgré que la vitesse d'émission du rayonnement s'annule au premier ordre, la vitesse d'émission de rayons β du niveau K et des autres niveaux, c'est-à-dire la vitesse $A_{0 \rightarrow 0}$, peut très bien ne pas s'annuler ; elle peut même prendre une valeur exceptionnellement importante, par rapport à celle de la radiation γ correspondante. Ce sont là des faits que l'on peut interpréter comme correspondant en gros à l'existence des coefficients anormaux d'absorption interne. Mais la véritable interprétation physique de ces rayons β est tout à fait différente, et apparaît maintenant comme tout à fait

évidente. Cet effet vient entièrement de la région $r_n \to r_e$, c'est-à-dire qu'il correspond au cas où l'*électron est dans le noyau*. Le phénomène élémentaire peut très bien être considéré comme une collision entre l'électron et le système nucléaire.

Cherchons maintenant si l'on peut se servir de cette théorie pour interpréter le rayon γ anormal de $h\nu = 1.426 \times 10^6$ volts de RaC'.

Il a été déjà indiqué, par Feather par exemple, que l'énergie $1{,}426 \times 10^6$ volts est presque égale à la différence d'énergie entre les rayons α normaux de 7 centimètres et le groupe principal de rayons α plus longs, de 9.2 centimètres environ. Il est difficile de faire une comparaison exacte, car on n'a pas encore mesuré, par la méthode de déviation, l'énergie du groupe 9.2 cm. D'après RUTHERFORD, la manière la plus correcte de faire le calcul est la suivante :

Les rayons α de Thorium C' ont un parcours extrapolé de 8,61 cm., et une énergie de $8{,}764 \times 10^6$ volts ; récemment M. ROSENBLUM a trouvé 8.81×10^6. Le parcours des rayons de 9.2 cm. de RaC', ainsi extrapolé, est rigoureusement égal à 9.16 cm. Dans mon mémoire j'ai utilisé par erreur un parcours de 9.25 cm. Dans cette gamme de vitesses le parcours et la vitesse sont probablement liées par la loi de RUTHERFORD

$$R \sim V^{3\cdot3}.$$

Nous commençons probablement à quitter la région où la loi cubique ordinaire est valable, et il faut passer à une loi biquadratique pour des vitesses plus élevées. Employons cette loi pour extrapoler ; nous trouvons que l'énergie d'un rayon α de parcours 9.16 cm. est

$$9{\cdot}101 \times 10^6 \text{ volts.}$$

L'énergie du rayon α de parcours 7 cm. est	7.683×10^6
ajoutons	1.426×10^6
nous trouvons	9.109×10^6

L'écart n'est que de $8/9$ $^0/_{00}$ seulement.

En réalité la concordance est trop parfaite. L'énergie 1.426×10^6 volts est l'énergie $h\nu$ des rayons γ, ou la différence d'énergie de deux niveaux nucléaires. Avant de faire la comparaison avec les énergies des rayons α il faut ajouter à celles-ci les énergies de recul du noyau. Le rayon

α de 7 cm. représente un système d'énergie interne égale à

$$7{\cdot}683 \times 10^6\left[1 + \frac{4}{210}\right] \text{ volts,}$$

et le rayon α de 9.16 cm. une énergie de

$$9{\cdot}101 \times 10^6\left[1 + \frac{4}{210}\right] \text{ volts.}$$

La différence est

$$1{\cdot}418 \times 10^6\left[1 + \frac{4}{210}\right] = 1{\cdot}445 \times 10^6,$$

au lieu de . . . . . $1{\cdot}426 \times 10^6$.

Cet accord est lui aussi assez frappant. L'accord est parfait si le parcours est effectivement 9.12 cm, et il est tout à fait possible qu'il le soit en réalité.

Supposons que le niveau nucléaire inférieur dans cette transition soit l'état normal du noyau de RaC'. Supposons aussi que le système *nucléaire* soit le *corpuscule* α émis selon la théorie de GAMOW-GURNEY-CONDON, avec une durée moyenne de 10^{-5} secondes environ. Le corpuscule α sera émis plus vite encore à partir de l'état supérieur, où il pourra aussi réagir avec un électron K. Dans ce cas, il tombera ainsi au niveau inférieur, d'où il sera émis plus lentement. Supposons que, par exemple, $l = 0$ pour les deux niveaux, de sorte qu'aucune transition accompagnée de rayonnement ne soit possible, et que le niveau inférieur soit l'état normal du noyau ; dans cet état aucun autre changement ne peut avoir lieu sauf l'émission d'une particule α. Ceci fournit un modèle possible, pourvu que les vitesses relatives de transformation et de réaction pour l'état supérieur soient correctes. Les observations montrent que la proportion de rayons β correspondant à $h\nu = 1.426 \times 10^6$ volts est égale à vingt-cinq particules par dix mille atomes désintégrés, tandis que pour la particule α de 9.2 cm. elle n'est que vingt-huit par million. Ceci correspond à une seule particule α de 9.2 cm. pour 90 rayons β.

M. GAMOW a calculé sur ma demande la probabilité par unité du temps pour qu'une particule soit émise à partir de l'état supérieur, et a trouvé $\frac{10^3}{4}$. L'incertitude principale dans ces calculs concerne l'évaluation de la durée du niveau normal du Ra*C*'. La théorie que

nous avons exposée jusqu'ici nous donne pour la probabilité par seconde $\underset{o\to o}{A}$ de l'émission d'un rayon β du niveau K

$$\frac{10^{11}}{2\cdot 5},$$

si nous admettons que $a = 2 \times 10^{-12}$ cm et $\Delta s = 1$
ou bien

$$\frac{10^{11}}{40},$$

si nous admettons que $a = 1 \times 10^{-12}$ cm. Nous discuterons plus loin ces hypothèses concernant la valeur de a. Les deux valeurs indiquées nous donnent, l'une 160 fois plus de rayons β que de particules α, l'autre seulement 10 fois. La valeur observée, 90, se trouve comprise entre ces deux limites. On peut suggérer comme conclusion que *ce rayon β singulier provient d'un état excité du noyau de* RaC′, *qui est presque incapable de rayonner, que cette émission résulte de la collision entre l'électron* K *et les corpuscules α dans le noyau, et que c'est également cet état excité qui émet les corpuscules α de 9.2 cm.* D'autres rayons β semblables (s'il en existe) peuvent très bien avoir une origine analogue.

Considérons maintenant la question de la valeur de a. On devrait peut-être la calculer en imposant la condition de retrouver la valeur correcte de la différence d'énergie $h\nu$ pour la transition considérée. Si $s = 2 \to 1$, on a $\Delta(s^2) = 3$, et on obtient une valeur correcte pour la différence d'énergie pourvu que $a = 10^{-12}$ cm. En effet,

$$\nu = 1.511 \times 10^6.$$

Si l'on prend cette valeur de a, on la trouvera en bon accord avec les autres grandeurs nucléaires, mais elle rend décidément trop petites la proportion entre les rayons β et les particules α émis. Arrivés à ce point, nous pouvons avantageusement renoncer à notre supposition que les discontinuités de potentiel soient infiniment grandes. Je ne donnerai pas les détails des calculs, qu'on peut facilement retrouver en étudiant les fonctions de SCHRÖDINGER que nous avons déjà indiquées. Si nous prenons une hauteur finie, les fonctions de SCHRÖDINGER restent finies un peu au-dehors de $r_n = a$, mais les valeurs caractéristiques de l'énergie sont à peine changées. Ainsi nous avons une valeur effective de a, a_{eff}, à utiliser pour le calcul de $\underset{o\to o}{A}$,

plus grande que celle qu'on emploie pour calculer $h\nu$. Il est à peine probable que a_{eff} puisse être comparable à $a\sqrt{3}$, valeur qui donnerait un accord parfait ; mais je ne doute guère que l'on puisse ainsi faire disparaître la plus grande partie de l'écart, en conservant toutefois l'accord général qu'on peut attendre d'un calcul si approximatif que le précédent.

En terminant cette théorie du rayon γ anormal, de

$$h\nu = 1.426 \times 10^6 \text{ volts},$$

il ne faut pas oublier un moyen qui nous reste pour vérifier la théorie. Car, outre les rayons β venants du niveau K, on observe aussi des raies β provenant des niveaux L_{II} et M_I ; on a également observé les intensités relatives de ces raies, et on peut les calculer sans nouvelles intégrations. [Les raies provenant des niveaux électroniques avec $l \neq 0$ sont plus faibles, et une étude théorique demanderait des calculs poussés très loin]. Désignons par $\underset{o\to o}{A}\,(K)$ la probabilité que nous avons calculée, pour le niveau K. Pour calculer, $\underset{o\to o}{A}\,(L_{II})$ et $\underset{o\to o}{A}\,(M_I)$ on n'a qu'à remplacer $\tau(r_e)$, dans l'intégrale de réaction I_q, par les fonctions de Schrödinger correspondantes pour les états $2s$ et $3s$. Mais puisque l'on peut supposer $r_e = 0$ dans ces fonctions, il est nécessaire seulement de comparer leurs valeurs à celle de la première, $\tau(r_e)$, à l'origine. Nous avons

$$\tau_K(0) : \tau_{L_I}(0) : \tau_{M_I}(0) = 1 : \frac{1}{2\sqrt{2}} : \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

et

$$\underset{o\to o}{A}\,(K) : \underset{o\to o}{A}\,(L_{II}) : \underset{o\to o}{A}\,(M_I) = 1 : \frac{1}{8} : \frac{1}{27},$$

Ces nombres sont en remarquable accord avec l'observation.

Ellis a en effet trouvé

$$K : L_{II} = 100 : 14 \qquad \left(\text{théoriquement } 100 : 12\frac{1}{2}\right).$$

La proportion $L_{II} : M_I$ n'a pas été bien observée pour ces raies ; pour les autres, les valeurs observées sont généralement dans le rapport d'environ 4 : 1. Pour des raies normales le rapport $K : L_{II}$ est environ 5.5 : 1 ; ceci n'est nullement en désaccord avec la théorie, car pour de

pareilles raies les valeurs importantes du $\tau(r_e)$ ne sont pas limités à $r_e = 0$.

Pour conclure, demandons-nous à quelles conséquences nous conduisent les résultats de ces calculs, et l'échec de nos diverses tentatives pour interpréter les valeurs théoriques trop faibles du coefficient d'absorption interne. Je dois reconnaître que ces tentatives n'étaient pas très convaincantes. Des calculs poursuivis récemment par M. CASIMIR, à Copenhague, peuvent nous apporter des indications complémentaires. Il a repris tous ces raisonnements de la manière la plus complète possible, en introduisant un électron de Dirac, et une action électromagnétique retardée entre le noyau et cet électron. Il retrouve le même désaccord pour les rayons γ ordinaires ; mais il obtient, pour $r_n > r_e$, une fréquence de collision sensiblement plus grande qu'on ne pouvait s'y attendre. Ceci tient à ce que la fonction d'onde pour l'électron de Dirac tend lentement vers l'infini pour $r_e = 0$, ce qui augmente évidemment la contribution à l'intégrale de réaction de la région pour laquelle $r_e < a$. Je ne pense pas que ce résultat soit de nature à infirmer notre interprétation du rayon γ singulier $h\nu = 1{,}426 \times 10^6$ volts, bien qu'il diminue l'exactitude de l'accord numérique. Il suggère plutôt que la plus grande partie de l'absorption interne provient, *pour tous les rayons* γ, de collisions avec $r_n > r_e$, plutôt que de réabsorptions, lorsque $r_e > r_n$, c'est-à-dire dans les conditions où se trouve ordinairement l'électron K. Je crois que c'est là que doit se trouver notre conclusion, bien que nous ne voyions guère actuellement le moyen de construire un modèle satisfaisant pour le noyau, et d'indiquer la loi d'interaction du noyau et de l'électron.

Il est nécessaire que la fréquence de collision entre l'électron K et le système intérieur au noyau puisse devenir quelquefois très grande. Ceci n'a rien d'impossible. Nous avons vu, par exemple, qu'une hauteur finie de la barrière de potentiel permet à la fonction d'onde nucléaire de s'étendre à l'extérieur du noyau de manière importante, et d'augmenter ainsi la fréquence de collision. En outre, il n'est nullement nécessaire de représenter par une seule particule α le système oscillant nucléaire. Nous devons peut-être faire intervenir plutôt l'une quelconque des cinquante particules présentes dans le noyau. Mais ces considérations n'ont pas grande importance pour le moment, nos idées sur la structure du noyau étant encore trop vagues. On peut seulement dire qu'une solution semblable à celle que nous proposons

peut-être acceptable pour le radium C′, dont elle interprète la variation singulière d'absorption interne avec la fréquence des rayons γ, mais paraît peu satisfaisante pour le radium B, où la variation avec la fréquence se présente comme normale. La difficulté concernant l'ordre de grandeur de l'absorption reste cependant la même pour les deux atomes.

II. Sur quelques problèmes de la théorie du ferromagnétisme.

Nous allons examiner dans ce chapitre trois contributions apportées récemment à la théorie du ferromagnétisme par certains de mes amis de Cambridge.

Je ne reprendrai pas ce qui concerne la théorie générale du ferromagnétisme qui doit tant à LANGEVIN, à WEISS et à CURIE. Je supposerai connue, en outre, la belle interprétation que la mécanique quantique a permis à HEISENBERG de donner au champ moléculaire de WEISS. Je rappellerai ces résultats de HEISENBERG lorsque j'en aurai besoin.

Avant de préciser la nature de ces quelques contributions, je rappellerai en quelques mots l'idée ordinairement admise pour l'état normal d'une substance ferromagnétique, que nous supposerons pour simplifier prise sous forme d'un cristal unique. Au-dessus de la température du point de Curie, l'état normal est non aimanté, mais au-dessous de cette température l'état normal correspond à la saturation magnétique, par régions et non dans l'ensemble du cristal. Les éléments aimantés à saturation doivent être des microcristaux, dont les axes magnétiques sont orientés au hasard dans toutes les directions, ou tout au moins dans un nombre suffisant de directions pour que l'aimantation résultante de notre cristal macroscopique soit nulle. Il est très vraisemblable, d'après ZWICKY, que tous les cristaux individuels, même les plus parfaits, présentent une microstructure de ce genre pour presque toutes les substances, cette microstructure pouvant ne pas être toujours exactement la même que dans le cas du ferromagnétisme.

Par refroidissement au-dessous du point de Curie, la substance passe d'un état d'équilibre non aimanté à des états aimantés en microcristaux, états que nous pouvons appeler micromagnétiques.

L'aimantation, au sens ordinaire du mot, d'une substance ferromagnétique au-dessous du point de Curie, correspond au passage d'un état micromagnétique à un état d'aimantation plus homogène, que nous appellerons holomagnétique.

Nous devons, à propos d'aimantation, distinguer l'un de l'autre les deux changements :

Changement A d'un état non magnétique à un état micromagnétique.

Changement B d'un état micromagnétique à un état holomagnétique.

Les grands effets de variation de dimensions et de chaleur spécifique accompagnent le changement A. Ces changements d'état physique liés au changement A sont généralement désignés comme « phénomènes au point de Curie », bien qu'ils puissent se produire dans un grand intervalle de température, limité au point de Curie ou au voisinage de celui-ci. Les modifications qui accompagnent le changement B sont généralement beaucoup plus petites.

Je puis maintenant préciser les trois contributions sur lesquelles je désire appeler l'attention ; je passerai rapidement sur deux d'entre elles, pour insister davantage sur la troisième. Il s'agit des travaux suivants :

1) *Perfectionnement dans la théorie des changements de dimensions d'une substance ferromagnétique au point de Curie.*

F. C. POWELL. Proceedings of the Physical Society of London, t. 42, p. 390.

2) *Etude des courbes d'aimantation des cristaux isolés pour l'aimantation dans diverses directions d'axes cristallins, et de leurs relations avec la magnétostriction pendant le changement* B, *ainsi qu'avec les changements de résistance électrique par aimantation.*

W. L. WEBSTER: Proc. Physical Society of London, t. 42, p. 431.

3) *Théorie des relations entre la direction d'aimantation et la direction du champ magnétisant effectif dans les états holomagnétiques complets, pour les cristaux cubiques et non cubiques.*

F. C. POWELL. Proc. Roy. Soc. A. 130, 1930, p. 167.

4) *Direction d'aimantation des cristaux ferromagnétiques uniques.*

I. — *Perfectionnement de la théorie des changements de dimension au point de Curie.* — Ce nouveau travail a pour but de corriger de sérieuses erreurs commises par M. KAPITZA et moi-même dans une

tentative antérieure, où nous avions utilisé des données expérimentales inexactes. Voici tout d'abord des évaluations, probablement correctes, du changement de longueur au point de Curie, qui se superpose à la dilatation thermique ordinaire :

Fer $\qquad \frac{\partial l}{l} = + (1{,}1 \pm 0{,}4) 10^{-4}$

Nickel $\qquad \frac{\partial l}{l} = - (0{,}9 \pm 0{,}3) 10^{-4}.$

Le signe *plus* indique un accroissement de longueur quand l'état micromagnétique s'établit par refroidissement au-dessous du point de Curie. L'ordre de grandeur de ces variations est trop élevé pour qu'on puisse en rendre compte par le seul effet des forces magnétiques. Pour les deux métaux, il n'y a aucun changement brusque de longueur au point de Curie ou dans son voisinage, mais le coefficient de dilatation thermique varie au point de Curie d'une façon anormale et assez brusque. Ce coefficient revient lentement à la valeur normale lorsque la température diminue de quelques centaines de degrés centigrades.

La théorie que j'ai donnée avec M. KAPITZA doit utiliser ces données numériques. Nous avons montré que le changement de dimensions au point de Curie peut s'exprimer au moyen de $\frac{\partial J_0}{\partial V}$ ou de $\frac{\partial J_0}{\partial a}$, où J_0 est l'intégrale d'interaction de Heisenberg, et a la distance entre deux systèmes actifs dans le réseau. Nous avons essayé de montrer que la théorie était conciliable avec les valeurs expérimentales que nous pensions correctes, bien qu'elles soient dix fois plus grandes que les nombres exacts. Nos considérations étaient cependant difficilement acceptables, et ne sont plus nécessaires avec les nouvelles valeurs, qui concordent très bien avec la théorie. Nous pouvons utiliser les valeurs observées pour T_c, température du point de Curie, et de $\frac{\partial l}{l}$, pour évaluer à la fois zJ_0 et $z\frac{\partial J_0}{\partial a}$; z est le nombre z, de Heisenberg, nombre de systèmes voisins d'un système donné dans le réseau. On trouve ainsi :

Fer $\qquad zJ_0 = 5{,}7 \times 10^{-14} \qquad z\frac{\partial J_0}{\partial a} = 2{,}1 \times 10^{-6} \qquad (y = 3)$

Nickel $\qquad zJ_0 = 1{,}8 \times 10^{-13} \qquad z\frac{\partial J_0}{\partial a} = - 4{,}7 \times 10^{-6} \qquad (y = 1)$

y représente le nombre d'électrons participant à l'aimantation par atome. J'utilise ici la théorie d'Heisenberg, sous la forme développée dans le *Sommerfeld Festschrift* (1).

Pour obtenir une évaluation directe de $\frac{\partial J_0}{\partial a}$, nous pouvons raisonner de la manière suivante : HEITLER et LONDON obtiennent pour deux atomes d'hydrogène à la distance a :

$$J_0 = \sum_{n=-1}^{3} A_n \left(\frac{a}{a_0}\right)^n e^{-\frac{2a}{a_0}}.$$

Les coefficients A_n sont tous du même ordre de grandeur, et a_0 est le rayon de l'orbite de Bohr pour l'atome d'hydrogène normal. Admettons ici une expression de même forme pour J_0 ; $\frac{a_0}{a}$ est probablement entre 1 et 2 ; il en résulte que $\frac{a}{J_0}\frac{\partial J_0}{\partial a}$ est de l'ordre de l'unité, mais peut avoir un signe ou l'autre. Les valeurs observées sont 0,9 pour le Fer et — 0,6 pour le Nickel, ce qui est parfaitement acceptable.

II. — *Etude des courbes d'aimantation par Webster.* — WEBSTER a montré qu'on peut obtenir beaucoup de renseignements importants et intéressants, en comparant les courbes d'aimantation en fonction du champ magnétisant effectif pour les directions des axes quaternaires (100), binaires (110) et ternaires (111) du cristal. Voici ces courbes pour le fer et pour le nickel.

C'est un fait bien connu que des champs effectifs différents sont nécessaires pour produire une même aimantation dans des directions différentes d'un cristal isolé. Ceci apparaît immédiatement sur les figures. La direction de facile aimantation est (100) pour le fer et (111) pour le nickel. Il est naturel de supposer qu'un cristal micromagnétique est composé d'un grand nombre de microéléments, aimantés chacun dans une des directions de facile aimantation. Pour le fer, il y a six directions de ce genre qui sont : ($\pm$ 1,0,0) (0, $\pm$ 1,0) (0, 0, $\pm$ 1), et l'aimantation des éléments se répartit également entre elles, de manière à ne donner aucun holomagnétisme, et à constituer à l'intérieur du métal de petits circuits magnétiques

(1) *Probleme der modernen Physik.* S. Hirzel, Leipzig.

fermés. Le passage pour un élément d'une direction de facile aimantation à une autre peut se produire aisément sous l'action d'un champ extérieur de quelques gauss, suffisant pour ouvrir ces circuits magnétiques fermés. Plus la structure du cristal est parfaite, et plus doit être faible le champ coercitif, et la perte par hystérésis liée à ces changements discontinus de direction d'aimantation.

Si cette conception est correcte, la saturation holomagnétique doit pouvoir s'obtenir, dans une direction de facile aimantation, pour un

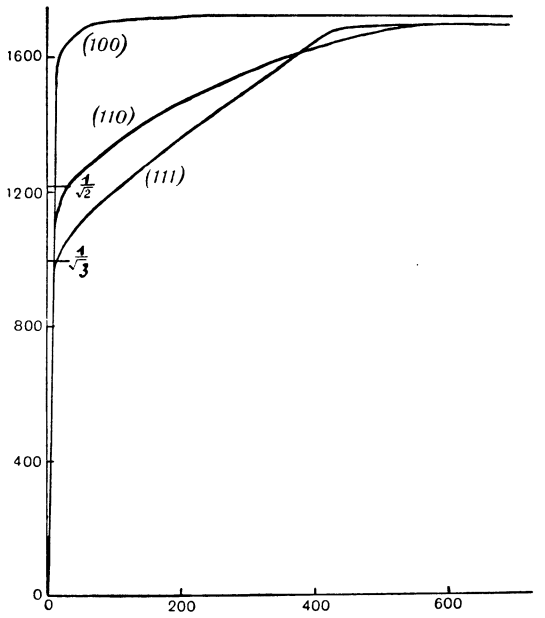

Fig. 1. — Courbe d'aimantation du fer.

champ magnétisant de quelques gauss. Le passage à l'état holomagnétique exige seulement que l'aimantation des microcristaux passe d'une direction de facile aimantation à une autre. C'est précisément ce que l'expérience donne pour une direction (100) dans le fer et (111) dans le nickel.

Au contraire, la saturation holomagnétique dans la direction d'autres axes correspond à un processus tout différent, qui comporte deux étapes. Dans la première, l'aimantation des microcristaux passe aisément

à la direction de facile aimantation la plus voisine de celle du champ magnétisant. Ceci se produit pour des valeurs faibles du champ, et ne diffère pas de ce qui se passe au début de l'aimantation holomagnétique dans une direction de facile aimantation. Mais ces changements cessent lorsque tous les microcristaux remplissent cette condition, c'est-à-dire longtemps avant que la saturation holomagnétique soit obtenue dans la nouvelle direction. Pour le fer soumis à un champ extérieur dans la direction d'un axe binaire (110), ils cessent lorsque

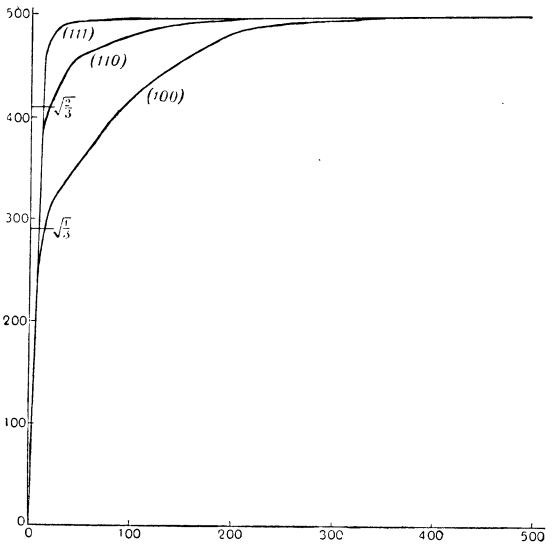

Fig. 2. — Courbe d'aimantation du nickel.

les aimantations des microcristaux sont orientées, par moitié dans la direction (100) et par moitié dans la direction (010), c'est-à-dire à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de la saturation complète. Pour le fer aimanté dans la direction d'un axe ternaire (111), cette étape s'arrête lorsqu'un tiers des microcristaux est orienté suivant chacune des directions de facile aimantation (100), (010) et (001), c'est-à-dire à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de la saturation. Ces prévisions sont exactement d'accord avec les faits, comme le montrent les figures.

Pour le nickel, l'arrêt se produit pour la direction (110) lorsque les aimantations microcristallines sont orientées, moitié suivant (111) et moitié suivant (11 — 1), à $\sqrt{\frac{2}{3}}$ de la saturation complète. Pour le nickel aimanté suivant l'axe quaternaire (100), le même résultat est obtenu avec un quart des micromagnétismes orientés suivant chacune des directions (1, 1, 1) (1, — 1, 1) (1, 1, — 1) (1, — 1, — 1), à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de la saturation. C'est encore exactement ce que donne l'expérience. La

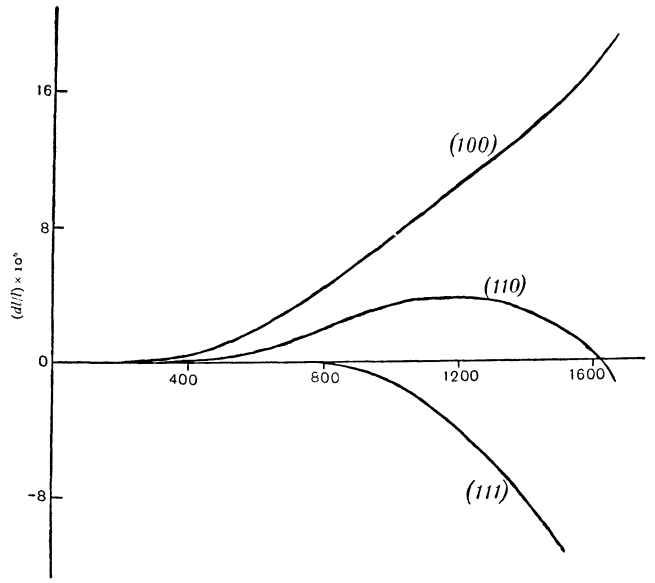

Fig. 3. — Magnétostriction du fer.

seconde étape de l'aimantation commence ensuite, où le champ magnétisant doit faire sortir les aimantations microcristallines de leurs directions spontanées, en surmontant l'action directrice du champ, cristallin, ce qui exige des champs magnétisants beaucoup plus intenses, de sorte que la saturation ne peut être atteinte que lentement. C'est toujours ce que montrent les courbes expérimentales. On doit s'attendre, de plus, à ce que l'effet Barkhausen ne se manifeste qu'au cours de la première étape, en plein accord avec l'observation.

Ayant maintenant dans l'esprit cette image du mécanisme de l'ai-

mantation, nous pouvons essayer de comprendre en quoi consiste la magnétostriction au cours du changement B, c'est-à-dire pendant l'établissement de l'holomagnétisme. La variation de longueur avec l'intensité de cet holomagnétisme suivant la direction longitudinale du cristal est représentée par les figures suivantes pour des cristaux isolés de fer et de nickel.

Dans les deux métaux, et pour la direction de facile aimantation, il y a un changement graduel de longueur (+ pour le fer et — pour le nickel) qui commence à apparaître pour de très faibles intensités d'aimantation. Ces changements sont de même signe que ceux qui

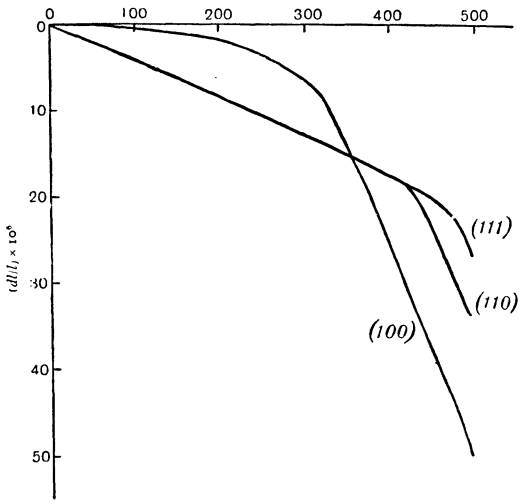

Fig. 4. — Magnétostriction du nickel.

apparaissent au point de Curie, mais la coïncidence est probablement fortuite. Dans la direction la plus éloignée de celle-ci, il n'y a aucun changement appréciable de longueur jusqu'à ce que l'aimantation ait atteint la moitié environ, ou peut-être la fraction $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de la saturation, une *contraction* se produit ensuite rapidement pour les deux métaux. Dans une direction intermédiaire, l'effet est intermédiaire, bien entendu.

AKULOW a montré, dans sa théorie de la magnétostriction holomagnétique, comment et pourquoi les dimensions du cristal changent,

sous l'action des forces entre les dipôles magnétiques, lorsqu'on écarte l'aimantation des directions où elle s'établit spontanément. Il ne considère pas explicitement les états non aimantés, mais il résulte de sa théorie qu'un petit cube de fer, supposé complètement dépourvu d'aimantation, se déforme légèrement lorsqu'il devient spontanément holomagnétique dans la direction (100), avec allongement dans cette direction. De la même manière, le nickel aimanté suivant (111) se raccourcit légèrement dans cette direction.

Un cristal isolé micromagnétique de fer serait ainsi constitué par des microcristaux aimantés et déformés suivant les diverses directions de facile aimantation. Pour le fer, l'aimantation suivant (100) rend cette direction trop longue, et dans le nickel l'aimantation suivant (111) rend cette direction trop courte. Par compensation, entre les microcristaux il n'existe naturellement aucune aimantation résultante, et la symétrie cubique n'est pas appréciablement troublée.

Considérons maintenant ce qui se passe dans le fer lorsqu'on produit la saturation holomagnétique dans la direction (100). Puisque tous les axes magnétiques, qui correspondent à la plus grande longueur, viennent dans la même direction, nous obtenons un accroissement continu de longueur, effectivement observé, avec une contraction dans les directions perpendiculaires, conservant le volume.

Supposons maintenant l'aimantation produite dans la direction (110). Il y a, au début, accumulation des axes magnétiques dans les directions (100) et (010), au détriment de (001), ce qui produit une dilatation initiale jusqu'à épuisement de (001). Ensuite, l'accroissement de l'aimantation correspond au passage des axes magnétiques de (100) et (010) à la direction (110), ce qui produit, comme l'a montré AKULOW, une forte contraction.

Enfin, aimantons dans la direction (111). Au début, les directions d'axes magnétiques s'accumulent suivant (100), (010) et (001) aux dépens des directions opposées, sans qu'il en résulte aucun changement dans les dimensions. Ensuite, l'effet de déviation s'accompagne d'une forte contraction. Dans les deux derniers cas, la contraction débute brusquement, comme le prévoit la théorie, dans la région du coude de la courbe d'aimantation.

Le nickel donne des résultats analogues, à ceci près que les directions (111) et (100) permutent leurs rôles, et que la direction de facile aimantation correspond à la plus petite et non à la plus grande lon-

gueur. La contraction supplémentaire, liée à la déviation à partir de la direction de facile aimantation, se produit ici encore dans la région du coude des courbes d'aimantation.

WEBSTER a étudié aussi, avec beaucoup de succès, les applications de cette théorie aux changements de résistance électrique par aimantation. Le temps me manque cependant pour faire plus que d'appeler votre attention sur l'existence de ce travail.

Une dernière remarque : j'ai suivi WEBSTER en utilisant de manière très générale la théorie d'AKULOW. Je crois que cette théorie est probablement exacte dans l'ensemble, mais en essayant de la développer de manière plus précise, je n'ai pas réussi jusqu'à présent à la trouver satisfaisante dans le détail, spécialement en ce qui concerne la concordance numérique avec les faits. Je crois, par conséquent, que nous ne possédons pas encore une synthèse générale de tous ces effets, mais il ne semble pas que nous en soyons très éloignés ; elle promet dès maintenant d'être pleine d'intérêt.

III. Théorie des relations entre la direction d'aimantation et le champ magnétisant dans les états holomagnétiques complets.

Examinons maintenant la relation entre la direction d'aimantation et celle du champ magnétisant effectif, aussi bien pour les cristaux cubiques que pour les autres. Pour abréger, nous désignerons le phénomène dont il s'agit ici sous le nom d'*effet de déviation*. M. MAHAJANI a donné une théorie qui représente une partie des faits, mais qui doit être remaniée, pour cette raison au moins, qu'il est difficile d'associer les quadrupôles qu'elle utilise avec l'électron pivotant. Il y a encore une autre insuffisance dans la théorie de MAHAJANI. Bien qu'il ait obtenu, en calculant l'énergie d'un réseau de dipôles magnétiques, une expression de forme satisfaisante pour l'effet de déviation dans les cristaux non cubiques, il n'a pas abordé la comparaison quantitative avec les faits. Cette comparaison est devenue possible pour le cobalt, qui a un réseau cristallin hexagonal de densité maximum ; on trouve que la théorie de MAHAJANI prévoit dans ce cas un effet de déviation beaucoup trop faible.

Je voudrais développer ici l'idée que l'effet peut être expliqué,

pour les cristaux cubiques comme pour les autres, en tenant compte de l'action entre l'électron ou les électrons magnétiques, dont l'orientation donne lieu au ferromagnétisme, et le reste de l'atome auquel ils appartiennent. Une action de ce genre a déjà dû être introduite dans les atomes isolés, pour interpréter la séparation entre les termes d'un même multiplet. Son introduction dans la théorie du ferromagnétisme est due à M. POWELL.

Admettons, pour simplifier, que cette action puisse être représentée par un champ magnétique $\vec{G}$ lié au cristal, et que nous appellerons le champ cristallin. Cela revient à supposer que la partie non orientable du moment de quantité de mouvement de l'atome ne peut prendre que certaines directions fixées par le réseau. Nous supposerons l'aimantation complètement saturée, en négligeant l'effet de l'agitation thermique, de sorte que notre théorie concerne seulement la température du zéro absolu ; elle reste cependant applicable avec une bonne approximation pour la température ordinaire. Il est naturellement essentiel que la grandeur du champ $|\vec{G}|$ soit compatible avec les données de la spectroscopie.

Nous nous proposons de calculer l'aimantation au zéro absolu d'un cristal de $2n$ atomes, dont chacun contient y électrons effectivement susceptibles de s'orienter tous à la fois sous l'action superposée du champ magnétique extérieur H, et du champ cristallin $\vec{G}$ dans lequel les électrons sont placés. Ce champ $\vec{G}$ peut varier en direction d'un atome à l'autre, et nous supposerons que ceux-ci peuvent être partagés en p groupes égaux, a, b, ... auxquels correspondent respectivement des champs cristallins $\vec{G}_a$, $\vec{G}_b$ ... ayant des directions différentes et une même valeur absolue $|\vec{G}|$.

HEISENBERG a montré qu'en l'absence de champ magnétisant, l'énergie moyenne des états stationnaires pour lesquels le moment résultant de pivotement des électrons correspond à s quanta, a pour valeur :

$$\overline{E_s} = -\frac{zJ_0}{2n}s^2 + \text{Const.}$$

Lorsque l'aimantation est sensiblement saturée, comme on le suppose ici, les fluctuations des valeurs de l'énergie autour de leur

moyenne $\overline{E}$ sont faibles ; $\overline{\Delta E^2}$ est petit, et on peut admettre que les valeurs individuelles de l'énergie coïncident avec $\overline{E}$, sans commettre une erreur importante. Le système étant placé dans un champ magnétisant uniforme H, et le moment résultant de pivotement ayant une composante dans cette direction égale à m quanta, HEISENBERG a montré que la valeur de l'énergie devient :

$$\overline{E_{s,m}} = -\frac{zJ_0}{2n}s^2 - \frac{\varepsilon h}{2\pi\mu c}m\mathrm{H} + \text{Const.}$$

Cette expression représente une approximation suffisante d'une théorie quantique exacte, s et m étant de véritables nombres quantiques, constantes du mouvement pour l'ensemble du système. Par son intermédiaire, nous pouvons construire la fonction de répartition $\Sigma g e^{-\frac{E}{kT}}$ pour cet ensemble. Nous pouvons remarquer que cette même fonction de répartition doit s'obtenir en vertu du principe de correspondance, n étant grand, en remplaçant la sommation de la théorie quantique par une intégration classique par rapport aux variables continues correspondantes. Nous devons naturellement conserver les poids g de la théorie quantique. Ceci nous autorise, pour notre problème actuel, plus compliqué que celui d'Heisenberg en raison de l'introduction du champ cristallin, à utiliser le procédé semi-classique suivant :

Soit $\vec{\sigma}$ le vecteur de pivotement d'un électron particulier ; on a :

$$\mathrm{H}m = \left(\sum \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathrm{H}}\right).$$

Ici, les électrons ne sont pas soumis au seul champ $\vec{\mathrm{H}}$, mais aussi au champ cristallin variable d'un groupe d'atomes a, b... à l'autre, de sorte qu'on doit remplacer le produit scalaire $(\vec{\Sigma\sigma}\cdot\vec{\mathrm{H}})$ par :

$$\sum_{a,b\ldots}\left(\sum_a \vec{\sigma}\cdot\left\{\vec{\mathrm{H}}+\vec{\mathrm{G}}_a\right\}\right).$$

Bien que s et m ne soient plus des constantes du mouvement, et par conséquent des nombres quantiques, on peut supposer que

l'énergie des divers états s'exprime de manière semi-classique correspondant à l'expression :

$$E = -\frac{zJ_0}{2n} s^2 - \sum_{a,b\cdots} \frac{\varepsilon h}{2\pi\mu c}\left(\{ \vec{H} + \vec{G}_a \} \cdot \vec{\sum}_a \sigma \right).$$

Remplaçons par conséquent la somme $\vec{\Sigma}_a \vec{\sigma}$ par le vecteur classique :

$$\frac{yn}{p} \vec{\zeta}_a \qquad |\zeta_a| \leqslant 1$$

et s par le vecteur classique :

$$\frac{yn}{p} \sum_{a,b\cdots} \vec{\zeta}_a.$$

L'analogie entre les deux théories n'est cependant pas complète, puisque $s \neq m$, mais la formule précédente doit donner un ordre de grandeur exact pour la variation de E, tout au moins lorsque les états les plus importants au point de vue de la fonction de répartition sont sensiblement saturés.

Nous sommes ainsi conduits à chercher l'aimantation qui correspond à l'état d'énergie minimum, l'énergie étant donnée par :

$$E_{Class.} = -\frac{zJ_0}{2n}\left(\frac{yn}{p}\right)^2 \left(\sum_{a,b\cdots} \vec{\zeta}_a \right)^2 - 2\mu_B \left(\frac{yn}{p}\right) \times \sum{}'_{a,b\cdots} \left(\{ \vec{H} + \vec{G}_a \} \cdot \vec{\zeta}_a \right) + \text{Const.}$$

μ_B représente ici le magnéton de BOHR.

$E_{Class.}$ doit être minimum pour une variation arbitraire du vecteur $\vec{\zeta}_a$. Considérons tout d'abord les variations soumises à la condition $|\vec{\zeta}_a| = \text{Const.}$ sans autre changement. On a la condition :

$$-\frac{zJ_0}{2n}\left(\frac{yn}{p}\right)^2 \left(\overrightarrow{\sum_{a,b\cdots} \zeta_a \cdot \delta\zeta_a} \right) - \mu_B \left(\frac{yn}{p}\right) \left(\{ \vec{H} + \vec{G}_a \} \cdot \delta\vec{\zeta}_a \right) = 0,$$

soumise à :

$$(\vec{\zeta}_a \cdot \delta\vec{\zeta}_a) = 0.$$

Ces conditions conduisent immédiatement à la conséquence :

$$\vec{\zeta}_a = \lambda_a [Q\vec{\zeta} + \vec{H} + \vec{G}_a],$$

λ_a étant une constante scalaire. Nous avons posé, pour abréger :

$$Q = \frac{yzJ_0}{2\mu_B} = \frac{3kTc}{(y+2)\mu_B},$$
$$\vec{\zeta} = \frac{1}{p}\left(\sum_{a,b\ldots} \vec{\zeta_a}\right).$$

On aura, de même :

$$\vec{\zeta_b} = \lambda_b[Q\vec{\zeta} + \vec{H} + \vec{G_b}] \text{ etc...}$$

En tenant compte de ces conditions, un calcul simple donne :

$$E_{Class.} = -\sum_{a,b\ldots}\lambda_a\left(\left\{Q\vec{\zeta} + \vec{H} + \vec{G_a}\right\}\cdot\left\{Q\vec{\zeta} + 2\vec{H} + 2\vec{G_a}\right\}\right) + \text{Const.}$$

Nous pouvons maintenant admettre que $|\vec{\zeta}|$, qui représente la fraction atteinte de la saturation, est voisine de l'unité, et par conséquent que $Q|\vec{\zeta}|$, qui correspond au champ moléculaire de WEISS, est grand par rapport à $|\vec{H} + \vec{G_a}|$. Il en résulte que le produit scalaire de la formule précédente est positif, et par conséquent que λ_a doit être positif pour donner un minimum d'énergie. En écrivant l'expression de l'énergie sous la forme équivalente :

$$E_{Class.} = -\sum_{a,b\ldots}\frac{1}{\lambda_a}\left(\vec{\zeta_a}\cdot\left\{\vec{\zeta_a} + \lambda_a\overrightarrow{H + G_a}\right\}\right) + \text{Const.}$$

où $\lambda_a|\vec{H} + \vec{G_a}|$ doit être petit par rapport à ζ_a, nous voyons que le minimum de $E_{Class.}$ s'obtient en rendant ζ_a aussi grand que possible, c'est-à-dire en prenant :

$$|\zeta_a| = 1.$$

La condition d'énergie minimum est par conséquent :

$$\vec{\zeta_a} = \frac{Q\vec{\zeta} + \vec{H} + \vec{G_a}}{|Q\vec{\zeta} + \vec{H} + \vec{G_a}|}.$$

Elle signifie, en langage ordinaire, que les moments électroniques pour chaque groupe d'atomes doivent être orientés dans la direction de la résultante des vecteurs $\vec{H}$, $\vec{G}$ et $Q\vec{\zeta}$, ce dernier représentant précisément le champ moléculaire de WEISS. Par sommation, on obtient :

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{p}\sum_{a,b\ldots}\vec{\zeta_a} = \frac{1}{p}\sum_{a,b\ldots}\frac{Q\vec{\zeta} + \vec{H} + \vec{G_a}}{|Q\vec{\zeta} + \vec{H} + \vec{G_a}|}.$$

Enfin, l'aimantation par unité de volume du cristal, $\vec{I}$, est donnée par :

$$V\vec{I} = 2yn\mu_B\vec{\zeta}.$$

Pour évaluer $\vec{\zeta}$ dans le cas des cristaux cubiques, nous procéderons de la manière suivante :

Nous représenterons par $\vec{\alpha}$ le vecteur $Q\vec{\zeta} + \vec{H}$, et nous développerons suivant les puissances de $\vec{G}$, en admettant que $\left|\frac{\vec{G}}{\vec{\alpha}}\right|$ est petit. On a ainsi :

$$\frac{Q\vec{\zeta} + \vec{H} + \vec{G}_a}{|Q\vec{\zeta} + \vec{H} + \vec{G}_a|} = \frac{\vec{\alpha} + \vec{G}_a}{|\vec{\alpha} + \vec{G}_a|}$$

$$= \frac{\vec{\alpha} + \vec{G}_a}{|\alpha|} \times \left\{ 1 - \frac{G}{|\alpha|} P_1(\mu) + \frac{G^2}{|\alpha|^2} P_2(\mu) - \frac{G^3}{|\alpha|^3} P_3(\mu) + \cdots \right\},$$

où

$$\mu = \cos\left(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{G}_a}\right),$$

et les P_n les polynômes de Legendre.

Par rapport à des axes de référence orientés suivant les axes quaternaires du réseau, admettons que $\vec{G}$ puisse prendre la direction déterminée par les cosinus (p, q, r). La symétrie exige que $\vec{G}$ puisse prendre avec une égale probabilité l'une quelconque des 48 orientations obtenues en permutant p, q et r dans $(\pm p, \pm q, \pm r)$.

Chacune de ces orientations correspond à l'un des groupes $a, b, \cdots$ et nous devons prendre la moyenne de ζ_a pour les 48 groupes.

Prenons, par exemple, ce qui concerne les composantes suivant l'axe des x ; on a :

$$\zeta_x = \overline{\frac{\alpha_x + (G_a)_x}{|\alpha|} \left\{ 1 - \left|\frac{G}{\alpha}\right| P_1(\mu) + \left|\frac{G}{\alpha}\right|^2 P_2(\mu) - \left|\frac{G}{\alpha}\right|^3 P_3(\mu) + \cdots \right\}},$$

avec :

$$\overline{\alpha_x} = \alpha_x \qquad \overline{(G_a)_x} = 0$$

$$\overline{P_1(\mu)} = 0 \qquad \overline{(G_a)_x P_1(\mu)} = \frac{1}{3}\frac{|G|\alpha_x}{|\alpha|}$$

$$\overline{P_2(\mu)} = 0 \qquad \overline{(G_a)_x P_2(\mu)} = 0$$

$$\overline{P_3(\mu)} = 0 \qquad \overline{(G_a)_x P_3(\mu)} = |G| \left\{ \frac{\alpha_x^3}{|\alpha|^3} \left[\frac{25}{12}(p^4 + q^4 + r^4) - \frac{5}{4} \right] + \frac{\alpha_x}{|\alpha|}[\cdots] \right\}.$$

D'où :

$$\zeta_x = \frac{\alpha_x}{|\alpha|}\left[1 - \frac{1}{3}\left|\frac{G}{\alpha}\right|^2 + O\left(\left|\frac{G}{\alpha}\right|\right)^4\right] + \left(\frac{\alpha_x}{|\alpha|}\right)^3\left[\frac{1}{2} - \frac{5}{6}(p^4 + q^4 + r^4)\right]\frac{5}{4}\left|\frac{G}{\alpha}\right|^4.$$

Avec une approximation suffisante, on aura :

$$|\zeta| = 1 - \frac{G^2}{3Q^2},$$

et $|\alpha|$ peut être remplacé par Q et $\frac{\alpha_x}{|\alpha|}$ par ζ_x dans les termes complémentaires.

Ces équations sont équivalentes à :

$$\zeta_x = \frac{\alpha_x}{|\alpha|}\left[1 + O\left|\frac{G}{Q}\right|^2\right] + \beta_x.$$

Il en résulte que $\vec{\zeta} - \vec{\beta}$ est parallèle à $\vec{\alpha}$, c'est-à-dire à $\vec{\zeta} + \frac{\vec{H}}{Q}$.

Mais $\zeta \gg \frac{\vec{H}}{Q}$; donc $\frac{\vec{H}}{Q} + \vec{\beta}$ est parallèle à $\vec{\zeta}$. Ceci donne :

$$\frac{H_x}{\zeta_x} + \gamma Q\zeta_x^2 = \frac{H_y}{\zeta_y} + \gamma Q\zeta_y^2 = \frac{H_z}{\zeta_z} + \gamma Q\zeta_z^2,$$

où :

$$\gamma = \frac{5}{2}\left(\frac{G}{Q}\right)^4\left[\frac{1}{2} - \frac{5}{6}(p^4 + q^4 + r^4)\right].$$

Ces résultats montrent, tout d'abord, que l'intensité d'aimantation subit une diminution du second ordre, et que la direction de cette aimantation ne coincide pas, en général, avec celle du champ magnétisant effectif. Quand $\gamma > 0$ la direction d'aimantation est toujours déviée vers l'axe quaternaire le plus rapproché, et quand $\gamma < 0$ elle s'éloigne toujours de cet axe. La déviation s'annule quand le champ magnétisant effectif est dans l'une des directions (100) (110) (111), ou dans les directions des axes analogues à ceux-ci.

La concordance des résultats précédents avec les faits peut se déduire de la comparaison de nos équations donnant la direction de l'aimantation avec celles que l'on obtient en admettant pour l'énergie magnétique du cristal l'expression :

$$E = -2yn\mu_B(\vec{H}\cdot\vec{\zeta}) + c(\zeta_y^2\zeta_z^2 + \zeta_z^2\zeta_x^2 + \zeta_x^2\zeta_y^2),$$

proposée par MAHAJANI, dont il a déduit des résultats d'accord avec l'expérience. En cherchant le minimum de cette dernière expression sous la condition $|\zeta| = 1$, nous trouvons les conditions :

$$-yn\mu_B H_x + c\zeta_x(\zeta_y^2 + \zeta_z^2) + \lambda\zeta_x = 0 \quad \text{etc...}$$

où λ est une constante. D'où :

$$\frac{H_x}{\zeta_x} + \frac{c}{yn\mu_B}\zeta_x^2 = \frac{H_y}{\zeta_y} + \frac{c}{yn\mu_B}\zeta_y^2 = \frac{H_z}{\zeta_z} + \frac{c}{yn\mu_B}\zeta_z^2.$$

Ce sont nos précédents résultats où $\frac{c}{yn\mu_B}$ remplace $Q\gamma$. Il est intéressant de comparer notre théorie, avec quelque détail, aux résultats expérimentaux de KAYA, sur des cristaux isolés de nickel mis sous la forme d'ellipsoïdes de révolution aplatis avec leurs plans équatoriaux normaux à l'une des directions (100), (110) et (1 1 1). Nous ne nous occuperons ici que de ce qui concerne les déviations dans les états holomagnétiques saturés ; les observations de KAYA sur le passage des états micromagnétiques aux états holomagnétiques exigeraient, pour leur comparaison avec la théorie, des considérations plus complexes, telles que celles introduites par WEBSTER que j'ai rappelées dans la conférence antérieure.

Plan équatorial (100). — Le champ magnétisant effectif et l'aimantation sont tous deux dirigés dans le plan équatorial, faisant respectivement des angles φ et ψ avec un axe quaternaire situé dans ce plan. On a alors :

$$H_x, H_y, H_z = H(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$
$$\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z = (\cos\psi, \sin\psi, 0).$$

Les équations d'équilibre conduisent à :

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{\gamma Q}{4H}\sin 4\psi.$$

La période $\frac{\pi}{2}$ de $\varphi - \psi$ est d'accord avec l'expérience, ainsi que la relation :

$$H[\sin(\varphi - \psi)]_{max.} = \text{Const.} = \frac{\gamma Q}{4},$$

comme il résulte du tableau suivant :

$H_{eff.}$	Sin Δ_{max}	Produit
408	0,0572	23,4
501	0,0479	24,0
595	0,0398	23,6

La moyenne du produit est 23,7, qui donne $\gamma Q = -94{,}8$. Le signe — correspond au fait que la déviation éloigne l'aimantation de l'axe quaternaire le plus voisin, et la rapproche de l'axe binaire le plus voisin contenu dans le plan équatorial.

Plan équatorial (110). — Mesurons φ et ψ comme précédemment à partir de l'axe quaternaire contenu dans le plan équatorial :

$$(H_x, H_y, H_z) = H(\cos\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi)$$

$$(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z) = (\cos\psi, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\psi, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\psi).$$

Il en résulte :

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{\gamma Q}{8H}\sin 2\psi(3\cos 2\psi + 1).$$

On obtient une excellente représentation des résultats expérimentaux en utilisant la valeur $\gamma Q = -94{,}8$, déduite des expériences sur l'ellipsoïde de révolution autour d un axe quaternaire.

Plan équatorial (111). — Les résultats concernant l'ellipsoïde de révolution autour d'un axe ternaire exigent un examen plus approfondi de l'action démagnétisante ; nous ne l'aborderons pas ici. Les déviations observées sont, en accord avec la théorie, beaucoup plus petites que dans les deux cas précédents.

Des résultats analogues ont été observés pour le fer, toujours en accord avec la théorie. Les données numériques de HONDA et KAYA sont bien représentées si l'on admet:

$$\gamma Q = +313.$$

Le changement de signe est intéressant.

A partir des valeurs ainsi obtenues pour γQ, nous pouvons évaluer G en adoptant des valeurs probables pour p, q, r. Les valeurs qui correspondent à l'orientation du champ cristallin suivant les axes quaternaires, binaires ou ternaires donnent respectivement :

$$(1,\ 0,\ 0) \qquad \gamma = -\frac{5}{6}\left(\frac{G}{Q}\right)^4$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \qquad \gamma = \frac{5}{24}\left(\frac{G}{Q}\right)^4$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \gamma = \frac{5}{9}\left(\frac{G}{Q}\right)^4.$$

Pour le nickel, γ est négatif, de sorte que (1, 0, 0) est très probable. Si l'on prend

$$y = 1 \qquad T_c = 645^\circ\ K,$$

on obtient :

$$G = 5{,}6 \times 10^5 \text{ gauss}$$
$$Q = 9{,}5 \times 10^6 \text{ gauss.}$$

Pour le fer, γ est positif et nous devons choisir entre deux possibilités d'orientation du champ cristallin suivant les axes binaires ou les axes ternaires. En prenant $y = 3$ $T_c = 1047^\circ K$ il vient :

$$G = \begin{cases} 1{,}05 \times 10^6 \\ \text{ou} \quad 8{,}2 \times 10^5 \end{cases} \text{gauss.}$$
$$Q = 9{,}3 \times 10^6.$$

Ces valeurs justifient notre hypothèse que $\frac{G}{Q}$ est petit.

Les valeurs obtenues pour G sont-elles raisonnables ? En nombre d'ondes par centimètre, les termes spectroscopiques les plus bas du spectre du fer sont :

Type	^5D	^5F	F^3
Termes	0 — 978	6928 — 8155	11976 — 12976

La largeur des multiplets est d'environ 1000 en nombre d'ondes. Ceci correspond à une différence d'énergie pour le fer ($\nu = 3$)

$$6\mu_B G' = 1000\, hc,$$

d'où :

$$G' = 3{,}5 \times 10^6 \text{ gauss},$$

c'est-à-dire environ trois fois plus que le champ cristallin obtenu plus haut. Nous devons prévoir une modification par le réseau cristallin de l'interaction (l, s) entre les moments de circulation et de pivotement, et à peu près sûrement dans le sens d'une diminution, à partir de ce qui correspond à l'atome isolé. Pour le nickel les ordres de grandeur relatifs sont les mêmes que pour le fer. Nous pouvons conclure de cette comparaison que l'hypothèse suivant laquelle l'interaction (l, s) est à l'origine des effets de déviation dans les cristaux cubiques est justifiée par les faits.

Cristaux non cubiques. — Pour évaluer $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$ nous pouvons utiliser la même méthode que dans le cas des cristaux cubiques, mais nous devons abandonner la symétrie cubique dans l'orientation de G. D'un autre côté, l'existence des G ne correspond à aucun moment résultant de quantité de mouvement pour l'ensemble du cristal, de sorte qu'il semble raisonnable de supposer pour le vecteur $\vec{G}$ les orientations :

$$\pm (p_a, q_a, r_a), \qquad \pm (p_b, q_b, r_b) \cdots.$$

Si nous représentons par $\overline{p^2}$ la valeur moyenne de p_a^2 pour l'ensemble des groupes, nous trouvons comme précédemment que :

$$\zeta_x = \frac{\alpha_x}{|\alpha|}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{|G|^2}{|\alpha|^2} + \frac{3}{2}\frac{|G|^2}{|\alpha|^4}(\overline{p^2}\alpha_x^2 + \overline{q^2}\alpha_y^2 + \overline{r^2}\alpha_z^2) - \left|\frac{G}{\alpha}\right|^2 \overline{p^2}\frac{\alpha_x}{|\alpha|} + O\left|\frac{G}{\alpha}\right|^4\right\}.$$

Par un raisonnement analogue au précédent, nous obtenons pour les conditions d'équilibre :

$$\frac{H_x}{\zeta_x} - \frac{G^2}{Q}\overline{p^2} = \frac{H_y}{\zeta_y} - \frac{G^2}{Q}\overline{q^2} = \frac{H_z}{\zeta_z} - \frac{G^2}{Q}\overline{r^2}.$$

Ces équations sont exactement de la forme obtenue par Weiss à partir de l'hypothèse d'un champ moléculaire anisotrope $N_1\zeta_x$, $N_2\zeta_y$,

$N_3\zeta_z$; elles lui ont permis d'interpréter les déviations observeés dans la pyrrhotine. La relation entre les deux théories est donnée par :

$$N_1 = -\frac{G^2}{Q}\overline{p^2}, \quad \text{etc...}$$

Il nous faut encore tenir compte de l'énergie des dipôles magnétiques eux-mêmes, dans le champ magnétique produit par leur orientation, puisque, dans les cristaux non cubiques, cette énergie dépend de l'orientation. Comment calculer cette énergie ?

Nous ne savons jusqu'à présent faire ce calcul qu'en théorie classique, mais l'approximation ainsi obtenue sera certainement suffisante, comme elle semble l'être pour ce qui concerne l'énergie dans le champ cristallin.

Considérons par conséquent un système de $2n$ dipôles de moment individuel $y\mu_B$, l'aimantation ayant pour composantes ζ_x, ζ_y, ζ_z. L'énergie des dipôles est nécessairement une fonction quadratique homogène de ζ_x, ζ_y, ζ_z, et peut se ramener à la forme :

$$E_{dip.} = -yn\mu_B(F_x\zeta_x^2 + F_y\zeta_y^2 + F_z\zeta^2.$$

Le choix des axes nécessaires pour cette réduction dépend naturellement de la symétrie du cristal. Dans le cas de la symétrie cubique, on a $F_x = F_y = F_z$, et l'énergie des dipôles ne dépend pas de l'orientation de l'aimantation. Nous avons tacitement utilisé ce résultat, en négligeant l'énergie réciproque des dipôles dans le cas du réseau cubique. Le champ moyen en un nœud du réseau sous l'action des autres dipôles est, par suite, en moyenne :

$$F_x\zeta_x, \qquad F_y\zeta_y, \qquad F_z\zeta_z,$$

de sorte que la contribution des dipôles est représentée par un champ moléculaire ayant ces composantes. L'ensemble du champ cristallin et de l'action mutuelle des dipôles donne donc un champ moléculaire additionnel, au sens de WEISS, avec les composantes :

$$N_1 = F_x - \frac{G^2}{Q}\overline{p^2}, \qquad N_2 = F_y - \frac{G^2}{Q}\overline{q^2}, \qquad N_3 = F_z - \frac{G^2}{Q}\overline{r^2}.$$

Les équations obtenues pour la déviation sont confirmées de manière très satisfaisante par les résultats de KAYA sur le cobalt qui,

à la température ordinaire, existe sous forme d'un réseau hexagonal de densité maximum. L'effet de déviation ne permet, naturellement, de déterminer que les différences des composantes du champ moléculaire additionnel. On rend complètement compte des mesures de KAYA en admettant :

$$N_1 - N_2 = \quad 0 \text{ relation exigée par la symétrie}$$
$$N_3 - N_1 = 6{,}8 \times 10^3 \text{ Gauss.}$$

Je ne vous donnerai pas les détails de la vérification qui font intervenir la structure du réseau hexagonal, au sujet de laquelle je suis très ignorant.

Si nous voulions essayer de rendre compte de ces faits par la seule intervention des coefficients de l'énergie des dipôles F_x, F_y, F_z, nous trouverions, par une sommation étendue aux dipôles les plus voisins, que le résultat est environ trente fois trop faible. Cette sommation n'est pas très exacte, et le calcul complet concernant la série obtenue n'a jamais été fait, mais il est tout à fait improbable que les valeurs obtenues puissent être assez grandes pour rendre compte d'une partie importante de l'effet observé. Il nous faut, par conséquent, revenir à l'hypothèse du champ cristallin. En négligeant F_x, F_y, F_z, et en admettant $y = 2$, $T_c = 1404^\circ$ K, nous obtenons :

$$(\overline{p^2} - \overline{r^2})G^2 = 1{,}03 \times 10^{11}.$$

La plus grande valeur de $\overline{p^2} - \overline{r^2}$ est $\frac{1}{2}$, qui se trouve réalisée lorsque les G sont orientés dans le plan normal à l'axe hexagonal, de sorte que $\overline{r^2} = 0$. On trouve ainsi :

$$G \geqslant 4{,}5 \times 10^5 \text{ gauss.}$$

Admettons 10^6 gauss. Nous trouvons ainsi un G de même ordre que dans les cristaux cubiques, et d'accord également avec les évaluations déduites de l'examen des séparations de multiplets dans le spectre de l'atome de cobalt.

La concordance des résultats obtenus, à partir des effets de déviation très différents, pour les cristaux cubiques et non cubiques est tout à fait satisfaisante.

IV. **Quelques phénomènes au point de Curie.**

Considérons pour conclure une autre application de la théorie de WEISS-HEISENBERG concernant les phénomènes au point de Curie. Dans cette théorie la condition qui détermine l'état ferromagnétique est

$$\beta\left(1 - \frac{\beta}{yz}\right) > \frac{6}{y+z}, \qquad \beta = \frac{zyJ_0}{kT},$$

où y est le nombre des électrons capables de pivotement par atome, z est le nombre des atomes voisins, J_0 l'intégrale d'interaction, k la constante de BOLTZMANN et T la température absolue. Au point de Curie $T = T_c$ l'inégalité se transforme en égalité.

Nous allons examiner la discontinuité de la chaleur spécifique au point de Curie. D'après les propriétés générales d'une fonction de répartition, la partie de l'énergie qui dépend de l'aimantation est

$$\overline{E_{mag}} = kT^2 \frac{d}{\partial T} \log K_{mag},$$

où $K_{mag.}$ est la fonction de répartition

$$\sum_q g_q e^{-\frac{E_q}{kT}},$$

g_q, E_q, poids et énergie des états magnétiques.

Au voisinage du point de Curie la magnétisation proportionnelle ζ tends vers 0 ; c'est la seule région qui nous intéresse. Nous trouvons là, R étant la constante de BOLTZMANN pour une molécule gramme,

$$\overline{E_{mag}} \sim - RT\left[\frac{1}{4} y\beta\left(1 - \frac{2\beta}{yz}\right)\zeta^2\right].$$

Au-dessus du point de Curie $\zeta = 0$, bien entendu, les termes magnétiques s'annulent, et

$$\overline{E_{mag}} = 0.$$

Au-dessous du point de Curie, puisque $\zeta^2 \to 0$, il est nécessaire de calculer seulement la dérivé $\frac{d\zeta^2}{d\overline{T}}$ pour déterminer la limite de $(C_v)_{mag.}$ $\left(= \frac{d\overline{E_{mag.}}}{d\overline{T}}\right)$. Nous avons alors une molécule gramme approximativement

$$(C_v)_{mag} = \frac{d\overline{E_{mag}}}{d\overline{T}} \sim - RT\left[\frac{1}{4}y^2\left(1 - \frac{2^2}{yz}\right)\right]\left|\frac{d\zeta^2}{d\overline{T}}\right|$$
$$\sim - RT_c \frac{3y}{2(y+2)}\left(\frac{d\zeta^2}{d\overline{T}}\right)_{T \to T_c},$$

La théorie de HEISENBERG nous donne

$$\left(\frac{d\zeta^2}{d\overline{T}}\right) \sim - \frac{2(y+2)}{3T} \frac{A}{Ay - \frac{B}{y+2}}.$$

où

$$A = \sum_{s=-y}^{y}{}' s^2, \qquad B = \sum_{s=-y}^{+y}{}' s^4 :$$

Σ' désigne la sommation sur toutes les valeurs de s entre $+ y$ et $- y$, en procédant par des groupes de deux.

Ainsi

$$\frac{d\zeta^2}{d\overline{T}} \sim - \frac{3}{T} \qquad (y = 1)$$
$$- \frac{8}{3}\frac{1}{T} \qquad (y = 2)$$
$$- \frac{1000}{408}\frac{1}{T} \qquad (y = 3).$$

En s'approchant du point de Curie par des valeurs croissantes :

$$(C_v)_{mag} \to R\left(1 - \frac{B}{y(y+2)A}\right)$$
$$\to \frac{3}{2} R \qquad (y = 1)$$
$$\to 2 R \qquad (y = 3)$$
$$\to \frac{9}{4} R \qquad (y = 3)$$
$$\to \frac{5}{2} R \qquad (y \text{ grand}).$$

Ces valeurs sont toutes trop grandes, car nous avons pris partout

$$1 - \frac{2\beta}{yz} = 1 - \frac{\beta}{yz}.$$

Elles représentent les valeurs théoriques pour la discontinuité en C_v, et l'accord avec les valeurs expérimentales est médiocre. HONDA (*Zeit. für Phys.*, vol. 63, p. 147 (1930)) et WEISS (*Arch. Genève*, vol. 42, p. 378 (1917)) donnent les valeurs suivantes :

	Métal	ΔC(Theory)	ΔC(Honda)	ΔC(Weiss)
	Fe	4·5 ($y = 3$)	4·6	6·8
	Co	4·0 ($y = 2$) 3·8 ($y = 1$)	2·8	—
	Ni	3·0 ($y = 1$)	2·1	1·7
Magnétite	Fe_3O_4	4·5 ($y = 3$)	—	6·1

Toutes ces valeurs sont données en calories par gramme atome du métal. Quelques minéraux magnétiques paraissent subir des discontinuités plus grandes encore.

Il y a très bonne raison pour supposer qu'une théorie plus exacte avec $y = 1$ suffirait pour le nickel, et peut-être aussi pour le cobalt, bien que pour ce dernier la valeur véritable de y soit plus probablement égale à deux. Les observations de HONDA (*loc. cit.*) sont tout à fait fausses. Mais il est évident d'autre part que le fer ne s'accorde pas avec la théorie simple.

Il faudra probablement généraliser la théorie pour le cas des atomes qui contribuent chacun avec y électrons, le pivotement de chacun d'eux étant indépendant de celui des autres. La théorie présente concerne uniquement les atomes dont les électrons tournent en bloc sur eux-mêmes.

Une telle théorie n'existe pas. Mais nous pouvons nous rendre compte qualitativement qu'elle nous conduira à des valeurs plus grandes de $\Delta(C_v)_{mag.}$. Considérons le cas limite des atomes dont les y électrons réagissent les uns sur les autres d'une façon tout à fait identique que sur les électrons, en nombre y, des atomes voisins. Nous avons ainsi un modèle de HEISENBERG avec $y = 1$, mais chaque système a un nombre $zy + y - 1$ de systèmes voisins. Les résultats

de HEISENBERG avec $y = 1$ et [z grand] sont applicables. Un atome gramme d'un tel métal [nombre des atomes, $2n$, $2nk = R$] fournit $2ny$ systèmes. Tous les effets, par conséquent, sont y fois plus grands, et nous aurons

$$\Delta(C_v)_{mag} = \frac{3}{2} yR \text{ calories.}$$

(Conférences faites en Janvier 1930 à l'Institut Henri Poincaré).