

# ANNALES DE L'I. H. P.

C.G. DARWIN

## La Théorie Ondulatoire de la Matière

*Annales de l'I. H. P.*, tome 1, n° 1 (1930), p. 25-51

[http://www.numdam.org/item?id=AIHP\\_1930\\_\\_1\\_1\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1930__1_1_25_0)

© Gauthier-Villars, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# La Théorie Ondulatoire de la Matière

PAR

C. G. DARWIN

---

Le problème de la théorie des quanta a été abordé par deux voies distinctes qui nous ont permis d'aboutir à une expression à peu près complète de cette théorie, en partant de points de vue tout-à-fait différents. Au moment où les nouvelles théories ondulatoires ont commencé à se développer, les physiciens, depuis plusieurs années déjà, avaient leur attention tournée vers la dynamique générale des particules ; d'autre part, beaucoup de jeunes savants étaient peu familiers avec la théorie classique des ondes, de telle sorte qu'il leur était plus naturel d'insister sur les analogies dynamiques que sur l'aspect ondulatoire des phénomènes. Au contraire, pour d'autres physiciens, tels que DE BROGLIE et SCHRÖDINGER, cet aspect ondulatoire était la caractéristique la plus importante du modèle proposé.

Le hasard de mes travaux antérieurs m'ayant beaucoup familiarisé avec la théorie des ondes, ma sympathie s'est tout naturellement portée vers l'exposé de DE BROGLIE, plutôt que vers les autres. Je ne veux en aucune façon laisser entendre par là qu'il existe une différence logique quelconque entre les deux aspects de la question : les principes fondamentaux, empruntés aussi bien à l'un qu'à l'autre, sont au-dessus de toute critique. Mais il nous faut bien autre chose que de simples principes fondamentaux : nous devons, en particulier, acquérir des formes de pensée qui nous permettent de prévoir des phénomènes trop compliqués pour qu'on puisse les traiter mathématiquement d'une

façon complète. Je crois que pour forger ces nouvelles formes de pensée, nous devrions tenir compte du fait que l'esprit humain est doué d'une très grande inertie, et aussi, pourrions-nous dire, d'une grande viscosité : il se déplace toujours très paresseusement d'une position d'équilibre à une autre, suivant un mode à peu près calqué sur l'une de ses propres créations : les processus thermodynamiques réversibles. Si nous voulons atteindre plus rapidement l'équilibre, nous devons appliquer pendant un temps très court une force bien supérieure à celle qui est strictement nécessaire pour le réaliser. C'est pourquoi je crois que la meilleure ligne de conduite à adopter à l'heure actuelle est d'insister sur l'aspect ondulatoire de la théorie au détriment de son aspect dynamique, espérant parvenir de cette manière, dans le délai le plus court, à un juste milieu entre les deux.

Je ne vais pas tenter de donner ici un exposé complet des fondements de la théorie des quanta, mon but n'étant pas de fournir un développement logique de cette théorie, mais plutôt de la faire comprendre intuitivement, compréhension à laquelle on parvient par des exemples, beaucoup mieux que par des théorèmes généraux. Je veux également laisser de côté certaines questions d'actualité, extrêmement intéressantes, la question du moment magnétique de l'électron, par exemple, ou la théorie du rayonnement. Je désire insister avant tout sur une dualité essentielle de la théorie des quanta, dualité qui se manifeste par l'emploi de deux langages totalement différents dans les deux aspects de la théorie. Le premier aspect utilise l'analogie avec l'optique géométrique, et le langage des particules ; le second s'appuie sur l'analogie avec l'optique physique et emploie le langage des ondes. On ne peut se passer d'utiliser simultanément ces deux points de vue : celui qui dérive de l'optique physique est indispensable parce qu'il nous donne les éléments mathématiques de la solution ; le point de vue tiré de l'optique géométrique, de son côté, nous fournit le seul moyen de trouver un langage qui puisse décrire les événements. La méthode des matrices tend à cacher, dans une certaine mesure le côté physique des questions traitées, en les coulant dans un moule mathématique de forme peu familière : le sens physique y est masqué, car ce sont les longueurs et les moments, par exemple, qui sont accessibles à notre intuition, et non pas les matrices à partir desquelles on peut déduire, par des règles formelles, ces longueurs ou ces moments.

Voici comment nous pourrions utiliser les principes fondamen-

taux <sup>(1)</sup> : d'après certaines règles établies une fois pour toutes nous écrivons, pour traduire un phénomène donné, une certaine équation différentielle. Si le problème correspondant de la mécanique classique est décrit par un hamiltonien  $H(q, p)$  nous posons comme équation :

$$(1) \quad H\left(q, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}\right) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Dans certains cas l'ordre de  $p$  et de  $q$  dans  $H$  peut laisser subsister un doute sur la forme de l'équation (1). Ce doute ne subsiste plus quand nous traitons le problème des particules ; il semble n'avoir en fait qu'une importance secondaire, parce qu'il est généralement facile de voir comment on passe de  $H(q, p)$  à (1). Dans le cas ordinaire nous pouvons prendre pour (1) une équation de la forme :

$$(2) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Cette équation doit être résolue en tenant compte des conditions aux limites imposées et de la condition que  $\Psi$  soit partout fini. C'est habituellement la recherche de cette solution qui présente la plus grosse difficulté et paraît en conséquence la plus importante partie du problème ; cependant elle n'en constitue que la moitié : il nous reste encore en effet à relier le  $\Psi$  ainsi obtenu aux observations expérimentales. Il nous faut franchir là un pas tout à fait étranger à la suite logique des raisonnements, puisqu'il implique l'introduction du langage entièrement nouveau des corpuscules. Je reviendrai plus loin sur ce point qui est le plus important de toute la théorie des quanta. Partant de la quantité complexe  $\Psi$ , nous formons l'expression réelle  $|\Psi|^2$  qui est une fonction de  $q$  et de  $t$ . Nous l'appelons *intensité* et nous la normalisons d'une façon convenable. L'expression primitive de  $\Psi$  contient en facteur une constante arbitraire sans intérêt.  $|\Psi|^2 dq$  doit représenter la probabilité pour qu'on trouve un électron dans la région  $dq$ , et, comme nous savons que l'électron se trouve certainement quelque part, nous choisirons cette constante arbitraire de façon que  $\int |\Psi|^2 dq = 1$ . L'expression  $|\Psi|^2 dq$  représentera alors la probabilité de trouver l'électron dans la région  $dq$ .

Ce sont là les conditions générales que doit remplir la solution d'un problème quelconque. Mais il y a deux points qui ont besoin

(1) Les méthodes ci-dessous sont discutées dans les *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 117, p. 258, 1928

d'être discutés : d'une part le passage critique de la quantité  $\Psi$  aux éléments accessibles à l'expérience ; d'autre part l'absence de conditions restrictives à la forme de la solution de l'équation (2). Avant d'entamer cette discussion, il sera commode de donner un exemple de solution calculée d'après les indications générales qui précèdent.

Prenons un problème aussi simple que possible, le mouvement d'une particule libre dans l'espace en l'absence de toute force. Simplifions encore en ne considérant que le problème à une dimension. L'équation est alors :

$$(3) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Il est inutile d'insister sur la méthode de calcul, qui dans ce cas est immédiate. La forme la plus simple de la solution est :

$$(4) \quad \Psi(x, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right].$$

Si nous formons  $|\Psi|^2$  nous obtenons la valeur 1 et l'intégrale que l'on utilise pour normaliser la fonction serait alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot dx.$$

Il y a donc une même probabilité élémentaire pour que la particule se trouve n'importe où, résultat vraiment peu intéressant. Nous choisissons donc une solution plus féconde en prenant

$$(5) \quad \Psi = \int \Phi(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right] dp$$

Pour  $t = 0$ , on peut, en appliquant directement le théorème de FOURIER, représenter par cette formule n'importe quelle fonction  $\Psi$ . Par exemple, si pour  $t = 0$ ,  $\Psi(x, 0) = f(x)$  on a

$$\Phi(p) = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\frac{px}{\hbar}} dx.$$

La valeur de  $\Psi$  à n'importe quel autre moment  $t$  est donnée par (5). La probabilité de trouver la particule entre  $x$  et  $x + dx$  est donc

$$|\Psi(x, t)|^2 dx = dx \int \Phi(p) e^{\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)} dp \times \int \Phi^*(p') e^{-\frac{i}{\hbar}\left(p'x - \frac{p'^2}{2m}t\right)} dp'$$

où le symbole  $\Phi^*$  signifie la quantité imaginaire conjuguée à  $\Phi$ .

En intégrant pour tout l'espace, cela donne :

$$\int |\Psi(x, t)|^2 dx = 2\pi h \int |\Phi|^2 dp$$

valeur indépendante du temps, ce qui exprime la conservation de la matière.

En général, il n'est pas possible d'éviter l'emploi des intégrales de FOURIER dont on se représente mal le sens physique. Pour mieux illustrer la méthode nous allons choisir la seule fonction  $\Phi$  qui nous conduise à des intégrales toutes calculables : la fonction d'erreurs de GAUSS. Nous prendrons :

$$\Phi = \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{h^2} (p - mV)^2 \right].$$

En effectuant l'intégration  $\Psi$  devient égal à :

$$\Psi = \frac{h\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma^2 + i\frac{ht}{m}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x - Vt)^2}{\sigma^2 + i\frac{ht}{m}} + i\frac{mV}{h} \left( x - \frac{1}{2} Vt \right) \right]$$

qui, comme nous pouvons facilement vérifier, satisfait à l'équation (3),

L'intensité est :

$$|\Psi|^2 = \frac{2\pi h^2}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{m\sigma}\right)^2}} \exp \left[ -\frac{(x - Vt)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{m\sigma}\right)^2} \right]$$

et nous pouvons la caractériser grossièrement en disant qu'elle n'existe que dans le domaine :

$$Vt \pm \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{m\sigma}\right)^2}.$$

Nous avons ainsi la représentation d'un paquet d'ondes ramassé à l'instant initial dans l'intervalle  $\mp\sigma$ , se propageant avec la vitesse  $V$  et s'étalant au fur et à mesure. Nous pouvons expliquer ce résultat de la manière la plus simple en disant qu'il existe une indétermination initiale de  $\sigma$  sur la position de la particule et de  $\frac{h}{m\sigma}$  sur sa vitesse ;

ces valeurs se combinent par leurs carrés suivant les règles ordinaires du calcul des probabilités. Notons encore *que si nous identifions  $p$  avec la quantité de mouvement*, nous obtenons la relation d'indétermination d'HEISENBERG <sup>(1)</sup>  $\Delta x. \Delta p = h$ . A vrai dire, le  $p$  que nous avons introduit n'est évidemment pas une quantité de mouvement, mais simplement la variable d'intégration d'une intégrale de FOURIER. L'identification de  $p$  avec une quantité de mouvement implique le passage de l'optique physique à l'optique géométrique, c'est-à-dire justement la transition critique dont nous avons parlé plus haut.

En examinant  $\Psi$ , nous voyons que la vitesse des ondes est  $1/2 V$ ,  $V$  étant la vitesse de groupe. Ceci est évidemment un cas particulier du théorème général de RAYLEIGH sur la vitesse de groupe :

$$V = \frac{dv}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\left(\frac{1}{2} \frac{mV^2}{h}\right)}{d\left(\frac{mV}{h}\right)}.$$

Cette valeur de la vitesse diffère beaucoup de la forme de DE BROGLIE ; cela tient à ce que par un changement approprié dans la forme de l'équation des ondes (1) nous avons omis dans l'expression de l'onde, le facteur  $\exp\left[-i\frac{mc^2}{h}t\right]$ .

Il est à remarquer que nous n'avons imposé à la solution  $\Psi$  de l'équation des ondes aucune forme particulière. Quand la théorie mathématique fut proposée pour la première fois par SCHRÖDINGER, le second membre de l'équation (1) était remplacé par  $W\Psi$  et les seules solutions admissibles étaient les fonctions « caractéristiques ». Mais le temps fut introduit comme variable indépendante ; dès lors la théorie suggéra qu'une solution quelconque de l'équation (1), comportant une somme arbitraire de fonctions caractéristiques — chacune multipliée par une exponentielle du temps, — devait être regardée comme tout aussi légitime qu'une solution caractéristique simple.

Je considère ce résultat comme un des traits caractéristiques les plus importants de la nouvelle théorie. Il est vrai qu'à l'heure actuelle une grande partie des résultats obtenus dans ce domaine sont exprimés dans le langage des fonctions caractéristiques. Mais en réalité, cela doit être attribué au génie de DIRAC <sup>(2)</sup> qui a développé une méthode

<sup>(1)</sup> *Zts. f. Physik*; vol. 43, p. 172, 1927.

<sup>(2)</sup> *Proc. Roy. Soc.*, vol. 113, p. 621, 1927.

de calcul extrêmement féconde, permettant de transformer l'équation des ondes de telle façon qu'une fonction quelconque, arbitrairement choisie, peut devenir fonction caractéristique. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet. Mais plaçons-nous à un point de vue plutôt physique que mathématique ; une importante constatation s'impose alors : les seules restrictions que nous puissions imposer à la solution choisie concernent son aptitude plus ou moins grande à traduire nos observations expérimentales. Dans l'étude des spectres par exemple, nous choisirons les fonctions associées à une valeur définie de l'énergie à cause des facteurs  $e^{-i \frac{Wt}{\hbar}}$ , puisque c'est ainsi que nous obtiendrons l'analyse en fréquences donnée par le spectroscopie. Mais dans beaucoup de cas nous avons une dégénérescence, plusieurs fonctions caractéristiques ayant la même énergie. Dans ce cas nous pouvons éviter une des difficultés sérieuses qui se présentaient dans l'ancienne théorie des quanta.

On avait en effet l'habitude de supposer qu'à l'instant où un atome doué d'un moment magnétique pénétrait dans un champ, si faible fût-il, il se plaçait instantanément soit parallèlement, soit antiparallèlement au champ ; c'était là un processus contraire à toutes nos conceptions habituelles de continuité et même en contradiction avec la stricte conservation de l'énergie. Au demeurant, c'était ce qu'on pouvait faire de mieux en se limitant à un atome dans un état unique. On formulait ainsi correctement la conception de l'existence de fonctions caractéristiques appropriées, pour l'atome dans le champ, mais on insistait sans nécessité sur la restriction qu'à l'atome ne devait être attachée qu'une seule de ces fonctions à la fois.

Aujourd'hui nous pouvons admettre que l'atome qui pénètre dans le champ possède simultanément les deux caractéristiques et nous trouvons qu'il décrit simplement un mouvement de précession, exactement comme l'envisage le théorème de LARMOR. De cette façon nous éliminons complètement ce qu'il y avait d'artificiel, mais il faut reconnaître qu'au fond nous n'avons fait que reculer la difficulté. En effet, si le champ n'est pas uniforme, nous avons une expérience de STERN et GERLACH et les fonctions caractéristiques s'écarteront peu à peu l'une de l'autre ; cela ne signifie cependant pas que l'atome soit coupé en deux morceaux. Il faut nous rappeler que nous ne devons envisager des atomes isolés que dans le cas où nous sommes en état de



C. G. DARWIN

les identifier par certaines expériences et que toute expérience de ce genre empêchera la vérification de l'effet STERN-GERLACH.

L'un des meilleurs exemples pour illustrer les raisonnements précédents est fourni par la théorie de la radioactivité de GAMOW. Dans cette théorie le noyau de l'atome est conçu comme l'analogie d'un mur sphérique qui réfléchit l'onde  $\alpha$  comme dans le phénomène de la réflexion totale interne de la lumière. Si le mur était d'une épaisseur infinie, l'onde resterait toujours à l'intérieur de l'enceinte et ne pourrait pas en sortir ; mais comme cette épaisseur est finie une petite partie de l'onde le traverse ; ceci correspond à une probabilité d'émission

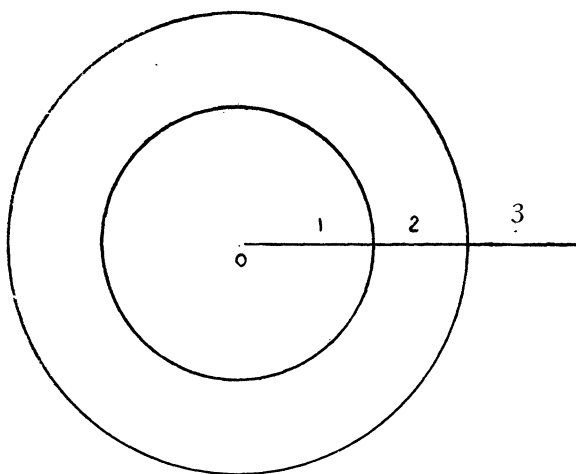


Fig. 1.

sion très faible pour la particule  $\alpha$ . Le calcul est analogue à celui de l'interféromètre en optique.

Dans les régions 1 et 3 nous avons :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

et dans 2 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

LA THÉORIE ONDULATOIRE DE LA MATIÈRE

Prenons  $V = \text{constante}$  ; en raison de la symétrie sphérique nous pouvons choisir pour solution :

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{1}{r} A \sin kr e^{-i\frac{W}{h}t} \\ \Psi_2 &= \frac{1}{r} \{ B \cosh k'r + C \sinh k'r \} e^{-i\frac{W}{h}t} \\ \Psi_3 &= \frac{1}{r} D e^{i(kr - \frac{W}{h}t)}\end{aligned}$$

avec

$$k^2 = \frac{2Wm}{h}, \quad k'^2 = \frac{2(V - W)m}{h}$$

en supposant  $V > W$  ;  $\Psi$  et  $\frac{\partial\Psi}{\partial r}$  sont continus sur les surfaces de séparation. Cette solution représente un  $\Psi$  fini en  $r$  et des ondes qui s'éloignent dans 3 ; nous pouvons déterminer les rapports entre ABCD par les conditions de continuité de  $\Psi$ .

Ces conditions ne peuvent être satisfaites que si l'on suppose que  $k$ , et donc  $W$ , ont une partie imaginaire. La partie imaginaire de  $W$  fournit la constante de désintégration. Il est tout-à-fait possible de traiter ces fonctions comme fonctions caractéristiques, mais ceci n'est qu'une conception purement mathématique sans utilité physique ; en effet cela exige que l'énergie soit en partie imaginaire, ce qui est difficilement conciliable avec l'idée habituelle que nous nous faisons de cette grandeur.

Nous arrivons maintenant à la question plus importante de toutes, *l'interprétation des résultats* au moyen de laquelle s'effectue la transition entre ce que j'ai appelé optique physique et optique géométrique.

Depuis le début même de la théorie des quanta on a constaté la présence inévitable d'une sorte de discontinuité logique dans la suite des idées. Au début, cet état de choses paraissait provenir simplement d'une incompatibilité des notions utilisées, d'une faute de logique inexcusable. Mais on s'est aperçu, à la suite des développements récents et principalement sous l'influence des idées de BOHR (1), que

(1) Conférence sur l'état actuel de la théorie des quanta, faite à Côme le 16 septembre 1927, à l'occasion des fêtes jubilaires en l'honneur de Volta.

les deux aspects des phénomènes qui paraissaient incompatibles sont en réalité complémentaires. En regardant les choses d'un peu plus près, nous constatons effectivement que deux propositions A et B seraient incompatibles si elles devaient être vraies simultanément, mais que la vérification de A exclut automatiquement la vérification simultanée de B. L'exemple le plus célèbre de cet état de choses est formulé dans le principe d'indétermination de HEISENBERG. Nous avons montré comment ce principe se déduit d'une façon toute naturelle de l'aspect ondulatoire des phénomènes, mais nous avons indiqué en même temps que cet aspect particulier ne nous permettait qu'une analyse incomplète. Nous étions obligé d'ajouter à ce que nous avons établi, une hypothèse nouvelle, celle que  $p$  était « réellement » une quantité de mouvement, au lieu d'être simplement la variable d'intégration d'une intégrale de FOURIER.

L'idée fondamentale de cette dualité est cependant beaucoup plus profonde que celle qui nous conduirait à associer simplement les variables par paires pour en faire des variables dynamiques conjuguées. Il est impossible d'exprimer un phénomène quelconque relevant de la dynamique atomique sans faire intervenir ces deux aspects. Les conceptions qui s'y rattachent ne doivent pas être mélangées, mais le passage des unes aux autres peut se faire à des moments très différents. Nous devons poser le problème dans le langage de l'optique géométrique, parce que celle-ci est analogue à la dynamique macroscopique, la seule accessible à notre intuition ; le calcul doit être poursuivi dans le langage de l'optique physique ; mais les résultats doivent être de nouveau exprimés dans celui de l'optique géométrique. Cependant les points où se font les passages entre les deux optiques sont largement arbitraires. Par exemple, nous pouvons dire que  $\Psi$  appartient au domaine de l'optique physique et  $|\Psi|^2$  à celui de l'optique géométrique, séparation qui convient, par exemple, à l'étude de l'effet STERN-GERLACH ; comme on le voit cela constitue une bifurcation très différente de la précédente et qui démontre la grande généralité des choix qu'il est possible de faire.

Dans une question aussi générale et avec une telle étendue d'arbitraire il n'est pas facile — ni peut-être souhaitable — d'être très précis ; il ne peut y avoir cependant de doute sur l'importance et la beauté des conceptions de BOHR.

\* \* \*

Les notions de quantité de mouvement, d'énergie, etc., jouent un rôle très important en dynamique ; elles ont également trouvé leur place dans la théorie des quanta telle qu'elle a été construite par HEISENBERG et plus particulièrement dans la forme que lui a donné DIRAC. Dans l'exposé précédent, ces mêmes notions ne jouaient aucun rôle et pourtant dans chaque exemple, nous avons eu effectivement quelque chose à dire sur les moments, l'énergie, etc. Je me propose maintenant de montrer d'une façon plus générale la manière dont les grandeurs de ce genre apparaissent dans l'aspect ondulatoire de la théorie.

On comprendra mieux le principe général de cette explication si on considère l'analogie suivante avec la théorie classique. Étant donné un champ électromagnétique arbitraire, comment calculons-nous l'énergie électromagnétique contenue dans chaque élément de volume ? Pour cela nous prenons un domaine fermé et nous exprimons l'énergie totale qu'il contient et qui est une quantité parfaitement définie ; ensuite nous transformons cette quantité en une intégrale de volume dont la valeur est

$$\int \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dx dy dz.$$

Nous disons alors que par définition  $\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$  est l'énergie contenue dans l'élément de volume  $dx dy dz$ .

Supposons maintenant que nous voulions analyser un rayonnement en fixant notre attention sur la fréquence, comme nous avons à le faire, par exemple, en thermodynamique. Dans ce cas nous transformons notre énergie *totale* en l'exprimant au moyen d'une intégrale de FOURIER de la forme  $\int u_\nu d\nu$ , où  $\nu$  est la fréquence ;  $u_\nu$  est alors *par définition* l'intensité pour une fréquence comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ .

Cette analogie nous indique la marche à suivre. En partant de la règle fondamentale qui donne l'intensité,  $|\Psi|^2 dq$  sera pour nous la probabilité pour que l'atome se trouve aux environs du point  $q$ .  $\int |\Psi|^2 dq$  sera alors la probabilité totale que nous poserons égale à 1, exprimant par là que l'atome se trouve certainement dans le domaine considéré.

Si maintenant nous transformons cette intégrale par un changement de variable, elle restera égale à l'unité et la quantité sous le signe  $\int$  de la deuxième intégrale donnera par définition la distribution de probabilités relative à la nouvelle variable. Nous en avons donné déjà un exemple particulier pour le passage des coordonnées aux moments ; nous n'avons rien fait d'autre que d'introduire une intégrale de FOURIER.

Par exemple, pour un seul degré de liberté :

$$\Psi(q, t) = \int \Psi(p, t) e^{\frac{iqp}{h}} dp$$

définit une fonction  $\Psi(p, t)$  qui peut être évaluée par inversion. On a alors d'après le théorème de FOURIER

$$\begin{aligned} \int |\Psi(q, t)|^2 dq &= \int dq \int dp \int dp' \Psi(p, t) \Psi^*(p', t) e^{\frac{iq}{h}(p-p')} \\ &= 2\pi h \int dp |\Psi(p, t)|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que la probabilité pour que le moment soit compris entre  $p$  et  $p + dp$  est égale à

$$|\Psi(p, t)|^2 \times 2\pi h.$$

Un exemple plus important est celui de l'énergie ; cherchons des solutions de la forme de SCHRODINGER.

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n(q) e^{-i \frac{W_n}{h} t}$$

le nombre de degrés de liberté étant quelconque, et les  $\Psi_n$  satisfaisant aux conditions d'orthogonalité

$$\int \Psi_n \Psi_m^* dq = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int |\Psi|^2 dq &= \int \sum_n C_n \Psi_n(q) e^{-i \frac{W_n}{h} t} \times \sum_m C_m^* \Psi_m^*(q) e^{i \frac{W_m}{h} t} dq \\ &= \sum_n |C_n|^2 \int |\Psi_n|^2 dq. \end{aligned}$$

Par définition nous pouvons dire alors que le  $n^{\text{me}}$  terme représente la probabilité pour que l'atome se trouve dans le  $n^{\text{me}}$  niveau d'énergie.

Un autre cas important apparaît quand on introduit les coordonnées polaires ou leurs conjuguées ; pour deux dimensions, par exemple, nous pouvons exprimer directement  $\Psi(x, y, t)$  en coordonnées polaires par  $\Psi(r, \theta, t)$ , mais la nouvelle fonction doit avoir une valeur unique et bien déterminée dans tout l'espace. Elle ne peut donc être une fonction de  $\theta$  tout à fait arbitraire. On en déduit immédiatement que la probabilité pour que les coordonnées se trouvent aux environs des valeurs  $r, \theta$ , est donnée par l'expression

$$|\Psi(r, \theta, t)|^2 r dr d\theta.$$

Il est cependant beaucoup plus intéressant de considérer le développement conjugué. Celui-ci s'obtient simplement en reconnaissant que  $\Psi(r, \theta, t)$  doit être périodique en  $\theta$  et en développant la fonction périodique en une somme de sinus et de cosinus :

$$\Psi(x, y, t) = \sum_m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) \Psi_m(r, t).$$

Dans ce cas

$$\int |\Psi|^2 dx dy = \pi \sum_m (|a_m|^2 + |b_m|^2) \int |\Psi_m|^2 r dr$$

et nous pouvons dire que  $|a_m|^2 + |b_m|^2$  est la probabilité pour que l'atome se trouve dans l'état caractérisé par le nombre quantique azimutal  $m$ . Il est évident qu'entre  $m$  et  $\theta$  il y a une relation du type de celle qui existe en dynamique entre deux variables conjuguées ; cependant on ne voit pas directement pourquoi nous sommes obligés d'associer la variable  $m$  à la notion de moment de quantité de mouvement.

De même si nous examinons le problème pour l'espace à trois dimensions, nous sommes conduits à exprimer  $\Psi(x, y, z, t)$  par

$$\sum_{l,m} \int a_{lm} P_l^m(\theta, \varphi) \Psi_{lm}(r, t) r^2 dr$$

où  $P_l^m(\theta, \varphi)$  sont les polynômes de LEGENDRE, expressions fastidieuses ayant un grand nombre de propriétés simples qu'il n'est jamais possible de se rappeler entièrement. Dans ce cas il est encore plus diffi-

cile de reconnaître la relation qui existe entre les nombres  $l$ ,  $m$  et les moments angulaires.

Nous pouvons transformer l'expression  $|\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$  en un grand nombre d'intégrales variées contenant, par exemple,  $x$  et  $p_y$ ,  $p_x$  et  $p_y$ ,  $r$  et  $\theta$ ,  $r$  et  $m$ ,  $p$  et  $m$ ,  $p_r$  et  $\theta$ , mais cela n'est pas absolument arbitraire ; nous ne pouvons pas par exemple, utiliser en même temps  $r$  et  $p_x$ . L'impossibilité de l'existence d'une telle transformation, est plutôt d'ordre mathématique, mais peut être associée avec un des traits caractéristiques les plus importants du calcul d'HEISENBERG. Pour préciser, nous ne pouvons transformer  $\int |\Psi|^2 dq_1 dq_2$  en une autre intégrale  $\int |\Psi|^2 dQ_1 dQ_2 \dots$  que si les variables  $Q_1 Q_2$  sont permutable entre elles quand elles sont exprimées en fonctions de  $q_1 q_2$ . Il est facile d'en voir la raison. Par exemple,  $r$  et  $p_x$  ne sont pas permutable ; il est clair alors que nous ne pouvons pas parler de probabilités simultanées pour  $r$  et  $p_x$ , puisque nous obtiendrons des valeurs différentes si nous fixons notre attention d'abord sur  $r$  et ensuite sur  $p_x$  ou réciproquement.

La méthode générale pour trouver les variables qui conviennent à la transformation de l'expression  $\int |\Psi|^2 dx dy dz$  a été donnée par DIRAC, sous une forme différente de celle qui est présentée ici. DIRAC insiste sur les analogies dynamiques et décrit cette transformation comme passage d'un système où  $q$  est une matrice diagonale  $q(q'q'') = q'\delta(q' - q'')$  à une autre dans lequel c'est  $F(q, p)$  qui devient matrice diagonale. Dire que  $q$  est une matrice diagonale revient à dire que  $q$  est la variable indépendante de l'équation des ondes. Nous voulons donc faire une transformation aboutissant à une équation où  $P = F(q, p)$  sera pris comme variable indépendante.

La règle de DIRAC prescrit d'écrire l'équation différentielle

$$F\left(q, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}\right)\chi = P\chi$$

et de la résoudre en regardant  $P$  comme constante. La solution sera une fonction  $\chi(q, P)$  et il est facile de prouver que pour des fonctions  $F$  d'un type très général les  $\chi$  forment un système orthogonal, tel que

$$\int \chi^*(q, P)\chi(q, P')dq = 0$$

pour  $P \neq P'$ . Il est alors facile de trouver une fonction  $\Psi(P, t)$  telle que

$$\Psi(q, t) = \int \Psi(P, t) \chi(q, P) dP$$

au moyen de laquelle nous pouvons exprimer que

$$\int |\Psi(q, t)|^2 dq = \int |\Psi(P, t)|^2 dP.$$

C'est justement ce qui nous était nécessaire pour calculer la probabilité pour que la particule possède un  $P$  compris entre  $P$  et  $P + dP$ .

Considérons quelques exemples :

(1) *Un seul degré de liberté*,  $P = p$ .

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \chi = P \chi, \quad \chi = e^{i \frac{Pq}{\hbar}}$$

comme auparavant

$$\Psi(q, t) = \int e^{i \frac{Pq}{\hbar}} \Psi(P, t) dP$$

(2) *Moment angulaire*, deux degrés de liberté.

$$P = x p_y - y p_x$$

en coordonnées polaires.

$$\left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi = \frac{i}{\hbar} P \chi = \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

$$\chi = e^{i \frac{P\theta}{\hbar}}.$$

Mais ici toutes les valeurs de  $P$  ne sont pas admissibles car  $\chi$  doit être une fonction unique et bien définie de  $x$  et  $y$ . Par conséquent nous devons avoir  $P = m \hbar$ , où  $m$  est entier, ce qui nous donne une démonstration directe de la nécessité de la quantification azimutale.

$$\Psi(x, y, t) = \sum_m e^{im\theta} \Psi_m(r, t).$$

Quoique nous puissions toujours former cette expression impliquant la quantification azimutale, elle ne nous est souvent d'aucune utilité. Par exemple si le problème dynamique ne comporte pas une



intégrale des aires, nous ne faisons autre chose que remplacer une équation différentielle en  $\theta$  par une équation aux différences finies en  $m$ . Il est aussi intéressant de noter que même dans le cas où une telle intégrale existe, il peut arriver que la transformation mentionnée ne nous aide en rien. Par exemple, dans un champ magnétique uniforme, les électrons décrivent des cercles et il est parfaitement légitime de quantifier ces cercles. Autant que je sache, personne ne l'a encore fait, pour la raison bien simple que ce serait inutile ; en effet, nos expériences ne séparent jamais les orbites quantifiées individuellement, elles ne concernent que le mouvement de la particule qui fait intervenir la vitesse de groupe et non pas la vitesse des ondes.

(3) *Energie*

$$P = H(q, p) = W$$

donc

$$H\left(q, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}\right)\chi = W\chi$$

et  $\chi$  est la solution même de l'équation de SCHRÖDINGER. Nous avons alors

$$\Psi(q, t) = \sum_w \Psi(W, t)\chi_w(q)$$

et nous voyons que

$$\Psi(W, t) = e^{-i\frac{Wt}{\hbar}}$$

résultat banal.

Nous constatons une grande analogie entre la méthode de transformation exposée et le procédé utilisé en dynamique classique pour découvrir les variables canoniques. En dynamique, le choix d'une seule variable canonique fixe en général toutes les autres, ou du moins limite leurs possibilités d'existence. Il en est de même ici. Nous pouvons, par exemple, prendre pour variable canonique soit  $M_x$  (moment angulaire autour de l'axe  $x$ ) soit  $M_y$ , mais en aucun cas les deux à la fois. Pour avoir une combinaison renfermant deux moments angulaires, nous devons prendre l'un d'eux égal à  $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ . Nous utilisons ensuite l'opérateur de LAPLACE pour poser

$$- \hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \chi = P\chi$$

et nous remplaçons  $P$  par ses valeurs caractéristiques  $l(l + 1)\hbar^2$ .

La manière dont DIRAC attaque le problème le conduit à traiter l'équation de SCHRÖDINGER sur le même plan que n'importe quelle équation en  $\chi$ . C'est là un des traits caractéristiques les plus attrayants de la méthode de DIRAC, qu'on ne retrouve plus dans l'exposé que j'ai donné ; en effet j'ai justement basé mon procédé sur l'équation de SCHRÖDINGER au lieu de partir directement des principes de l'algèbre non commutative.

Je ne sais s'il est plus avantageux de rechercher une plus grande symétrie par l'emploi de la méthode de DIRAC, ou de considérer que certaines variables dynamiques, l'espace et le temps, sont plus intuitives que les autres et de fonder ainsi la théorie sur une base plutôt dissymétrique, comme je l'ai fait dans ce qui précède.

\* \* \*

Je me propose d'examiner maintenant, sur quelques exemples, un certain nombre de difficultés qui semblent se présenter dans l'étude du conflit ondes-particules.

L'exposé général qui précède nous a montré comment nous devons aborder le problème suivant les idées de la dynamique, puis changer de voie et le traiter au moyen du  $\Psi$  et enfin, pour décrire le phénomène résultant, interpréter de nouveau les fonctions d'ondes dans le langage des particules.

Supposons maintenant que nous observions une suite d'événements, par exemple, la trajectoire d'une particule  $\beta$  dans une chambre de WILSON. Nous voyons ici une suite de gouttelettes, dont chacune doit être regardée comme le résultat d'une observation individuelle ; pour parler quelque peu naïvement, l'onde se transforme continuellement en particule et *vice-versa*. Mais si par hasard nous interceptons une partie du champ de vision, nous ne pouvons plus faire d'observation dans cette partie ; ici l'onde reste telle qu'elle était et nous ne la transformons plus en particule. Nous cherchons à comprendre comment il sera possible d'obtenir les mêmes résultats avec ces deux interprétations différentes.

Pour mieux mettre en lumière la difficulté, je vais préciser l'exemple choisi. Prenons une source de radium émettant des rayons  $\beta$ , qui traversent des fentes, des champs électriques et magnétiques, des cristaux qui les diffractent, etc. (fig. 2). Plaçons trois chambres de WILSON,

peu absorbantes de façon à ne pas arrêter les particules, en trois endroits déterminés, en sorte que tous les rayons  $\beta$  que l'on voit dans la deuxième et la troisième chambre aient déjà traversé la première ; l'expérience consistera à compter le nombre des particules dans chacune de ces chambres. Supposons que s'il y en a 10 dans la première chambre, il y en ait 5 dans la deuxième et 3 dans la dernière. Si maintenant nous couvrons la première de façon à ne plus la voir, nous trouvons toujours  $5/3$  comme rapport des particules dans les deux autres chambres, mais dans ce cas nous devons

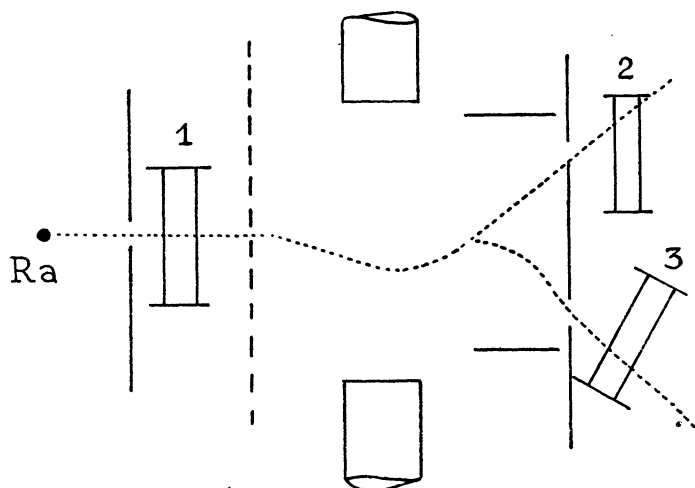


Fig. 2.

être en mesure de prendre le  $\Psi$  correct pour la première chambre sans l'interpréter, c'est-à-dire sans passer au langage des particules.

Notez que pour arriver à cela nous devons en tout cas tenir compte de la petite absorption qui a lieu dans la première chambre. On peut le faire en considérant comme système vibrant non seulement la particule  $\beta$  mais aussi les atomes qu'éventuellement elle pourrait ioniser ; de cette façon le système redevient conservatif et nous pouvons plus tard prendre la moyenne pour toutes les ionisations possibles en calculant les probabilités  $|\Psi_2|^2 : |\Psi_3|^2$  des observations dans la deuxième et troisième chambre.

La résolution directe de ce problème ne serait pas facile ; je vais

examiner cependant un problème simplifié (1), du même type, relatif à une « expérience à résultats inobservés » et montrer comment l'équation des ondes nous conduira à des résultats qui, si l'on se fiait seulement à notre intuition, ne pourraient s'obtenir qu'à partir de la conception corpusculaire.

Nous décrirons d'abord notre expérience dans le langage des particules, ensuite nous l'envisagerons au point de vue ondulatoire et nous verrons que l'intuition suggère que les résultats doivent être tout à fait différents dans les deux cas. Enfin nous montrerons le caractère fallacieux de cette argumentation et nous prouverons que la théorie ondulatoire possède toutes les qualités requises pour pouvoir décrire complètement les résultats de l'expérience.

Considérons le choc d'une particule de masse  $M$ , avec une autre de masse  $m$  initialement au repos ; après le choc les deux particules se meuvent de telle façon que si l'on se donne la direction de l'une d'entre elles, la direction de l'autre, ainsi que leurs vitesses respectives sont complètement déterminées par les principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Nous appellerons « couple cohérent » un tel couple de particules, et l'un de nos buts sera d'exprimer cette propriété dans la théorie des ondes. La cohérence peut être vérifiée expérimentalement par deux observateurs convenablement placés qui signaleront, toujours simultanément, l'apparition sur des écrans de scintillations dues à  $M$  et à  $m$ .

Modifions ensuite l'expérience de façon à mettre en évidence la propriété de cohérence, sans être obligés de l'observer directement (fig. 3). Plaçons en B, un miroir qui va réfléchir la particule  $M$ . Nous aurons alors en C deux flots de particules arrivant suivant les directions AC et BC. Dans le cas ordinaire, les particules  $m$  et  $M$  passeront par C à des moments quelconques et indépendants les uns des autres : il en sera de même quand  $m$  et  $M$  seront cohérents. Mais il y a un cas exceptionnel.

Il peut arriver que les directions AC, AB correspondent à un couple cohérent de particules, et aussi que les vitesses soient telles que le temps mis par  $M$  pour parcourir le trajet ABC soit le même que celui employé par  $m$  pour se déplacer de A en C. Dans ce cas, les particules se rencontreront de nouveau et seront diffusées encore une fois ; si

(1) Ce problème est discuté avec plus de détails dans les *Proc. Roy. Soc. A.*, vol, 124, p. 375, 1929

nous plaçons un écran au delà de C, nous observerons des scintillations en des endroits qui ne seront ni sur le prolongement de AC, ni sur celui de BC. L'expérience que nous envisageons ici est constituée justement par l'observation de ces scintillations.

Appliquons maintenant brutalement la théorie des ondes. L'élément incident M est une onde sinusoïdale et l'élément M après la diffusion par choc, est une autre onde sinusoïdale, de longueur d'onde variable avec la direction de propagation ; de même pour l'onde diffusée correspondant à  $m$ . La réflexion modifiera la direction de l'onde M, mais n'y apportera aucun autre changement. Les deux ondes

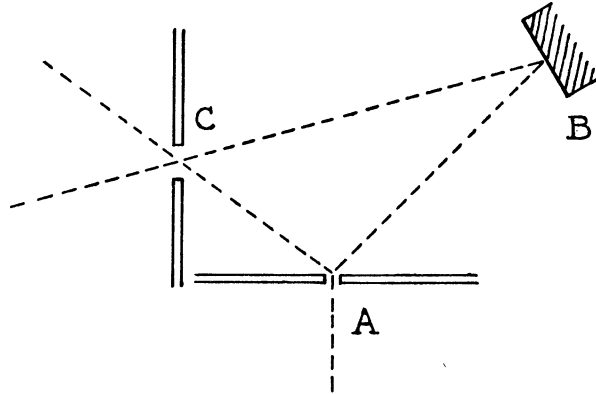


Fig. 3.

se propagent d'une manière continue ; il semble impossible d'exprimer, au moyen de ces ondes continues, la discontinuité qu'on introduit implicitement quand on admet que M et  $m$  subissent une seconde collision en parcourant leurs trajectoires respectives ABC et AC dans le même intervalle de temps. Comme nous le verrons, cette difficulté est illusoire parce qu'il n'y a pas en fait une onde M et une onde  $m$  dans l'espace ordinaire, mais *une onde M plus  $m$*  dans l'espace de configuration à six dimensions.

Réolvons maintenant notre problème. Pour formuler la loi de choc, nous supposons que les particules ont la même charge électrique  $e$ . L'équation est alors :

$$(1) \quad \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_x - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + \frac{e^2}{r} \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

LA THÉORIE ONDULATOIRE DE LA MATIÈRE

$\mathbf{X}$  et  $x$  représentant chacune trois coordonnées et  $r = |\mathbf{X} - x|$ . Résolvons d'abord cette équation suivant le procédé habituel, en cherchant ses fonctions caractéristiques. Ce qui suit est une adaptation d'une des méthodes que GORDON (1) a données pour le problème du passage d'un électron dans le voisinage d'un noyau au repos.

Prenons deux vecteurs vitesse  $\mathbf{U}$  et  $u$  et posons

$$(2) \quad \zeta = r - \frac{(\mathbf{U} - u, \mathbf{X} - x)}{|\mathbf{U} - u|}$$

et

$$(3) \quad \Psi = F(\zeta) \exp \frac{h}{i} \left\{ M(\mathbf{U}, \mathbf{X}) + m(u, x) - \frac{1}{2}(M\mathbf{U}^2 + mu^2)t \right\}$$

En substituant ceci dans (1) nous voyons que l'équation peut être satisfaite, à condition que  $F$  soit une solution de l'équation différentielle ordinaire du type hypergéométrique :

$$\zeta F'' + F' - \frac{i}{h} \frac{|\mathbf{U} - u| Mm}{M + m} \zeta F' - \frac{e^2}{h^2} \frac{Mm}{M + m} F = 0.$$

La solution finie à l'origine s'exprime au moyen de deux séries asymptotiques

$$F_1(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{b}\right)^{i\beta} + \dots$$

$$F_2(\zeta) = e^{i\frac{\zeta}{b}} \left(\frac{\zeta}{b}\right)^{-1-i\beta} + \dots$$

où

$$b = \frac{h(M + m)}{Mm|\mathbf{U} - u|} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{e^2}{h|\mathbf{U} - u|}.$$

La solution finie à l'origine est alors

$$F_1 + i\beta \frac{\Gamma(i\beta)}{\Gamma(-i\beta)} F_2.$$

Nous allons éliminer, dès le début un certain nombre de facteurs de proportionnalité et de facteurs de phase donnés par la puissance complexe  $\zeta^{i\beta}$  et, au lieu de dire que la solution convenable est une somme de termes  $F_1$  et  $F_2$ , nous dirons que l'onde incidente

$$\Psi_{\text{inc}} = \exp \frac{i}{h} \left\{ M(\mathbf{U}, \mathbf{X}) + m(u, x) - \frac{1}{2}(M\mathbf{U}^2 + mu^2)t \right\}$$

(1) *Z. f. Physik*, vol. 48, p. 180, 1928.

C. G. DARWIN

donne une onde diffusée proportionnelle à

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{dif}} &= \Psi_{\text{inc}} \frac{1}{\zeta} \cdot e^{i \frac{\zeta}{\hbar}} \\ &= \exp \frac{i}{\hbar(M+m)} \left\{ rMm |U-u| + (MX+mx, MU+mu) \right\} \left\{ \frac{1}{r - \frac{(X-x, U-u)}{|U-u|}} \right\} \end{aligned}$$

Cette expression est valable partout sauf dans la direction de propagation où .

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 > x_3.$$

Nous devons maintenant adapter cette solution générale à notre problème particulier. Dans la théorie ondulatoire la notion de particule au repos n'existe pas ; en effet les relations d'indétermination montrent qu'une particule située en un point donné ne peut pas avoir une vitesse bien déterminée. Nous pouvons représenter l'état initial de  $m$  par

$$\Psi_m = \exp - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} ;$$

l'étalement dû à l'indétermination initiale se fera avec une vitesse représentée par une longueur d'onde de l'ordre de  $\sigma$ . La simplification que nous avons faite pour  $F_2$  est équivalente à la supposition que l'indétermination de la vitesse est beaucoup plus petite que  $V$ , vitesse de l'onde incidente  $M$ .

La valeur de  $\Psi_m$  aux instants ultérieurs sera

$$\Psi_m = \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (m(ux) - \frac{1}{2} mu^2 t) - \frac{1}{2} \frac{m^2 \sigma^2}{\hbar^2} (u^2) \right\} du.$$

$m$  étant maintenant confiné dans le voisinage de  $A$ , nous pouvons prendre comme expression de l'onde  $M$  :

$$\Psi_M = \exp \frac{i}{\hbar} (MVX_3 - \frac{1}{2} MV^2 t)$$

et par conséquent

$$\Psi_{\text{inc}} = \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left\{ m(ux) + MVX_3 - \frac{1}{2} (mu^2 + MV^2) t \right\} - \frac{1}{2} \frac{m^2 \sigma^2}{\hbar^2} u^2 \right] du.$$

Nous pouvons alors écrire aisément l'expression de l'onde diffusée. Il faut remarquer qu'approximativement  $(U-u) = V$  au dénomina-

teur, mais qu'on doit cependant le prendre égal à  $V - u_3$  dans le terme exponentiel. Dans ce cas

$$\Psi_{\text{diff}} = \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar(M+m)} \left\{ rMm(V - u_3) + (MX + mx, MV + mu) \right\} - \frac{1}{2} \frac{m^2 \sigma^2 u^2}{\hbar^2} - \frac{i}{\hbar} (mu^2 + MV^2)t \right] \frac{du}{r - X_3 + x_3}$$

et en négligeant les facteurs qui ne sont pas essentiels, on a

$$\exp - \left[ \frac{1}{2\sigma'^2} \left\{ \left( \frac{MX_1 + mx_1}{M+m} \right)^2 + \left( \frac{MX_2 + mx_2}{M+m} \right)^2 + \left( \frac{MX_3 + mx_3 - Mr}{M+m} \right)^2 \right\} + \frac{iMm}{\hbar(M+m)} \left\{ MX_3 + mx_3 + mr - \frac{1}{2}(M+m)Vt \right\} \right] \frac{1}{r - X_3 + x_3}$$

où

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + \frac{i\hbar t}{m}$$

comme auparavant.

On obtient l'intensité en multipliant par l'expression imaginaire conjuguée ; on a :

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{(r - X_3 + x_3)^2} \exp - \frac{1}{\sigma_1^2} \left[ \left( \frac{MX_1 + mx_1}{M+m} \right)^2 + \left( \frac{MX_2 + mx_2}{M+m} \right)^2 + \left( \frac{MX_3 + mx_3 - Mr}{M+m} \right)^2 \right]$$

où

$$\sigma_1^2 = \sigma^2 + \left( \frac{\hbar t}{M\sigma} \right)^2$$

comme dans notre première leçon.

Ceci montre que pratiquement nous sommes certains d'obtenir des scintillations simultanées aux points définis par

$$\begin{aligned} MX_1 + mx_1 &= 0 \\ MX_2 + mx_2 &= 0 \\ MX_3 + mx_3 &= Mr \end{aligned}$$

ou dans le voisinage immédiat de ces points.

Il est facile de prouver que ces équations sont les conséquences des principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. La manière la plus rapide d'arriver à ce résultat consiste à ajouter une quatrième équation  $r = Vt$  ; on reconnaît alors que les quatre équations expriment la conservation non seulement de la quantité de mouve-



ment mais aussi de l'énergie, cette dernière condition exigeant que les particules se rapprochent et s'éloignent avec la même vitesse relative.

Nous avons vu comment la théorie ondulatoire fournit des résultats exacts dans le cas où nous pouvons observer directement le choc. Nous devons maintenant introduire le miroir réfléchissant et analyser la deuxième diffusion en C. Il est inutile de discuter cela en détail. Nous devons remplacer

$$\Psi(Xx) \quad \text{par} \quad \Psi(Xx) - \Psi(X'x) - \Psi(Xx') + \Psi(X'x')$$

(X' étant le point image de X, etc.), de façon que  $\Psi$  s'annule à la surface du miroir pour les deux coordonnées. Le terme  $\Psi(X'x)$  représente la partie de l'onde correspondant à la particule M après réflexion, c'est-à-dire à la situation avec M sur BC et  $m$  sur AC. Il est inutile de calculer en détail l'effet du deuxième choc ; il nous suffira de reconnaître qu'il a lieu effectivement. Pour cela considérons  $\Psi(X'x)$  comme une nouvelle onde incidente et cherchons les régions pour lesquelles  $\Psi$  a une valeur appréciable et pour lesquelles on a en même temps  $X = x$  ; dans ces régions en effet le terme  $\frac{e^2}{\gamma} \Psi$  devient important, ce qui décèle l'existence d'un second choc. Les régions considérées se trouvent dans le voisinage des points définis par

$$\begin{aligned} MX_1' + mx_1 &= 0 & X_1 &= x_1 \\ MX_2' + mx_2 &= 0 & X_2 &= x_2 \\ MX_3' + mx_3 &= Mr' & X_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Pour prouver que ces régions sont justement celles qui résulteraient de la théorie corpusculaire, il nous suffira d'ajouter aux précédentes l'équation  $r' = Vt$  ; il est évident alors que les 7 équations sont les mêmes que celles qui sont fournies par la théorie des particules. Nous voyons donc que dans notre « expérience non directement observée », la méthode ondulatoire donne précisément les résultats dont nous aurions dit, il y a quelques années, qu'ils prouvaient indubitablement l'existence des particules et condamnaient la conception des ondes.

Le problème que nous avons traité est banal parce que sa solution ne faisait aucun doute. Mais le même problème ne paraît plus banal du tout si nous le posons dans les mêmes termes pour l'effet COMPTON, où la solution devrait cependant être la même ; c'est même une question très intéressante de voir si des méthodes analogues à celles que

nous avons employées peuvent être utilisées dans ce cas, et de quelle manière.

La méthode de SCHRÖDINGER développée par KLEIN <sup>(1)</sup> pour son application à l'effet COMPTON est absolument incapable de mettre en évidence le deuxième choc, ou même seulement la cohérence ; la seule méthode dont nous disposons actuellement est celle de DIRAC, qui constitue une discussion complète du problème, mais d'un caractère tout à fait différent et qui entraîne des difficultés d'un autre ordre. Je ne saurais dire si l'on peut résoudre cette question au moyen des procédés que j'ai indiqués ; mais dans l'affirmative je crois que cela pourrait permettre de présenter la théorie du rayonnement sous une forme nouvelle et, je l'espère, plus simple.

Mais, — à moins que cela soit possible, — nous sommes conduits actuellement à constater un fait curieux : pour les problèmes concernant les particules (ou ce que nous pensions être des particules) nous devons employer les méthodes de la théorie des ondes, tandis que pour la lumière, qui nous semble avoir un caractère ondulatoire indéniable, nous sommes obligés d'utiliser la théorie des particules.

En nous aidant de l'exemple exposé plus haut, nous sommes plus ou moins en mesure de voir comment il faut expliquer la formation des trajectoires dans la chambre de WILSON. L'onde émergente (l'onde  $\beta$ ) est une onde sphérique, comme nous l'avons déjà vu. Mais si nous voulons trouver la solution sans observer la première partie de la trajectoire, nous ne devons pas simplement considérer cette onde comme sphérique ; nous devons envisager l'ensemble de l'onde dans un espace pluri-dimensionnel tel que l'onde posséderait le caractère sphérique uniquement dans un sous-espace à trois dimensions.

Si l'on juge d'après le cas d'un choc unique, nous devons supposer qu'après les rencontres avec les premiers atomes, il s'introduira dans l'expression de l'onde un facteur de phase de la forme

$$aX + bx + cx' + dx'' + \dots + lr + mr' + mr''.$$

Sans entrer dans les détails, nous pouvons facilement nous imaginer que cette phase présente quelque particularité, — celle de s'annuler par exemple — quand  $X$ ,  $x'$ ,  $x''$  sont colinéaires. C'est ainsi que nous arriverons à comprendre comment la fonction d'onde peut expri-

(1) *Z. f. Physik*, vol. 52, p. 853, 1928.

mer la notion de ligne droite dans l'espace ordinaire. En fait cette fonction d'onde ne précise pas quelle est cette droite dans l'espace mais fournit simultanément toutes les droites possibles ; le choix n'est fait qu'au moment de l'observation. Cette observation elle-même sera décrite d'une façon exacte au moyen de notre fonction  $\Psi$  ; mais si nous le désirons, nous pouvons revenir en arrière et en tirer des conclusions sur la première partie de la trajectoire qui n'a cependant pas été observée ; nous pouvons faire ce retour en arrière, exactement comme nous aurions pu induire des renseignements sur le premier choc des particules  $m$  et  $M$ , à partir d'une observation concernant le deuxième.

Il est intéressant de poursuivre plus loin cette idée.

Quand l'observation directe des résultats d'une expérience nous manque, nous pouvons toujours tenir compte de la perturbation qu'elle a introduite dans notre système en y incorporant aussi les appareils d'observation. Nous différons l'interprétation de notre expérience, en agrandissant le système considéré. Quand HEISENBERG utilise son microscope pour observer un électron, il trouble le mouvement de celui-ci ; cependant nous pouvons toujours prédire le mouvement ultérieur, — avec le degré d'incertitude correspondant, — en enfermant ensemble microscope et électron dans une enceinte et en n'indiquant pas les résultats de l'observation. Jusqu'à quel point pouvons-nous aller dans cette voie ?

Considérons l'exemple suivant. Pour nous rendre compte de la présence d'une particule  $\alpha$  nous observons dans certains cas la scintillation qu'elle produit. Mais nous pourrions prendre comme résultat de l'observation, non pas cette scintillation elle-même, mais l'émission du photoélectron produite sur la rétine par la lumière émise ; nous pourrions encore prendre à sa place l'effet produit sur le nerf optique, mais il y a un point où nous devrions absolument nous arrêter : c'est la transition du cerveau à l'esprit.

Nous pouvons ainsi imaginer un monde caractérisé par un certain  $\Psi$ , un monde inanimé, dans lequel il ne se passe jamais rien, mais qui contient en puissance tout ce qui pourrait advenir. Il ne nous indique ni l'endroit ni le moment où une scintillation apparaît, ni quelle est la partie de la rétine qui l'enregistre. Mais notre esprit possède une catégorie de connaissances tout à fait différentes des précédentes, pour lui les événements existent, les probabilités  $|\Psi|^2$  sont trans-

## LA THÉORIE ONDULATOIRE DE LA MATIÈRE

formées en réalités ; de là on peut revenir en arrière et se rendre compte de tous les événements antérieurs. C'est là une conception possible de l'univers ; mais le  $\Psi$  qui lui est associé est si incroyablement compliqué qu'il me serait pénible d'admettre une telle conception de l'univers comme celle qui convient pratiquement le mieux.

Je pense qu'il est néanmoins utile de voir comment les propriétés corpusculaires les plus caractéristiques peuvent être expliquées par les méthodes de la théorie ondulatoire si le processus d'explication est finalement éclairé par une donnée de tout autre catégorie, l'observation .

(Traduit par Al. PROCA et G. FOURNIER).