

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

ROSE-MARIE HERVÉ

MICHEL HERVÉ

Étude qualitative des solutions réelles d'une équation différentielle liée à l'équation de Ginzburg-Landau

Annales de l'I. H. P., section C, tome 11, n° 4 (1994), p. 427-440

http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1994__11_4_427_0

© Gauthier-Villars, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section C » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpc>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Étude qualitative des solutions réelles d'une équation différentielle liée à l'équation de Ginzburg-Landau

par

Rose-Marie HERVÉ et Michel HERVÉ

Université Paris-VI,
Mathématiques Pures et Appliquées, Tour 45-46,
Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. – Nous étudions l'équation différentielle satisfaite par les fonctions réelles $f(r)$ telles que $u(re^{i\theta}) = f(r)e^{iq\theta}$ ($q \in N^*$) soit solution de l'équation de Ginzburg-Landau $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$. Nous montrons : qu'une telle fonction $f(r)$, si elle est définie sur un voisinage de 0, est analytique et parfaitement déterminée par le nombre $a = f^{(q)}(0)/q!$; qu'une seule valeur de a , soit A , donne une fonction $f(r)$ croissant strictement de 0 à 1 quand r croît de 0 à $+\infty$, et dont nous donnons un développement asymptotique pour $r \rightarrow +\infty$. Nous montrons aussi que toute valeur $a \in]-A, A[\setminus \{0\}$ donne une fonction $f(r)$ oscillant indéfiniment, et que l'écart entre deux zéros consécutifs a pour limite π .

Mots clés : Équations différentielles, développements asymptotiques.

ABSTRACT. – We consider the ordinary differential equation satisfied by the real functions $f(r)$ such that the $u(re^{i\theta}) = f(r)e^{iq\theta}$ ($q \in N^*$) are solutions of the Ginzburg-Landau equation $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$. We show: that such a function $f(r)$, if defined on a neighbourhood of 0, is analytic and uniquely determined by the number $a = f^{(q)}(0)/q!$; that one value of a only, say A , yields a strictly increasing function $f(r)$ running from 0 to 1 as r runs from 0 to $+\infty$, of which we give an asymptotic expansion for $r \rightarrow +\infty$. We also prove that any $a \in]-A, A[\setminus \{0\}$ yields an indefinitely oscillating function $f(r)$, and that the length of the interval between two consecutive zeroes has π as its limit.

Classification A.M.S.: 34 L 30, 35 B 05.

1. INTRODUCTION

L'équation

$$\left. \begin{aligned} r^2 f''(r) + r f'(r) - q^2 f(r) + r^2 f(r) [1 - f^2(r)] = 0, \quad r \geq 0, \quad q \} \\ \text{donné} \in N^*, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

fournit les solutions de la forme $u(re^{i\theta}) = e^{iq\theta} f(r)$ de l'équation $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$ récemment étudiée dans \mathbb{R}^2 par Brézis, Merle et Rivière [1]; elle présente cette particularité remarquable, signalée par Hagan [2], que les solutions de (1) définies sur un voisinage de 0 sont de trois sortes bien distinctes, précisées par le

THÉOREME. — 1) Toute solution réelle de (1) sur un intervalle $[0, R]$ est au voisinage de 0 la somme d'une série entière de la forme

$$f_a(r) = r^q \left[a + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(a) r^{2k} \right], \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Dans la suite, la notation $f_a(r)$ désignera aussi le prolongement analytique de cette somme.

2) Parmi les $a > 0$, il existe une valeur A séparatrice en ce sens que :

— Si $a > A$, $f_a(r)$ croît strictement de 0 à $+\infty$ quand r croît de 0 à une certaine valeur finie.

— $f_A(r)$ croît strictement de 0 à 1 quand r croît de 0 à $+\infty$.

— Si $0 < a < A$, f_a reste strictement comprise entre ± 1 et oscille indéfiniment, de part et d'autre de la valeur 0, sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3) f_A et la solution, dépendant de $R \in]0, +\infty[$, qui croît strictement de 0 à 1 quand r croît de R à $+\infty$, ont un développement asymptotique commun, quand $r \rightarrow +\infty$, suivant les puissances de $1/r^2$ jusqu'à un ordre quelconque : jusqu'à l'ordre 2, ce développement est $f(r) = 1 - q^2/2r^2 - q^2(q^2 + 8)/8r^4 + o(1/r^4)$.

4) Pour $0 < a < A$, les zéros > 0 de f_a sont en fait $> q$; si r_n est le n^e , $r_{n+1} - r_n$ et par conséquent r_n/n ont pour limite π .

Remarques complémentaires. —

1) f_A est l'unique solution réelle du problème aux limites sur $[0, +\infty[$ formé de l'équation (1), $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$.

2) $\forall R \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation (1) a aussi une solution réelle unique sur $[0, R]$ valant 1 pour $r = R$: c'est une f_a avec $a > A$, donc croissant indéfiniment de 0 à $+\infty$ quand r croît de 0 à une certaine valeur finie $> R$.

3) Les solutions réelles de (1) définies sur tout \mathbb{R}_+ sont exactement les f_a , $|a| \leq A$, et sont toutes strictement comprises entre ± 1 .

Variantes de l'équation (1) utilisées dans les preuves. -

$$r \frac{d}{dr} [r f'(r)] = (q^2 - r^2) f(r) + r^2 f^3(r) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^{2q-1}} \frac{d}{dr} (r^q f(r)) \right] = r^{1-q} f(r) [f^2(r) - 1] \quad (4)$$

$$\varphi''(t) = [q^2 + e^{2t} (\varphi^2(t) - 1)] \varphi(t) \quad \text{pour } \varphi(t) = f(e^t) \quad (5)$$

De (3) résulte que, si l'intervalle ouvert I a pour borne inférieure $R > 0$ (resp. : supérieure $R < +\infty$), une solution f bornée sur I se prolonge à gauche (resp. : droite) de R : en effet, $r f'(r)$ a une limite finie quand $r \rightarrow R$, comme primitive d'une fonction bornée, donc $f'(r) \rightarrow y'$ fini, $f(r) \rightarrow y$ fini, et f se prolonge en la solution qui, pour $r = R$, vérifie les conditions initiales y, y' . De son côté, (5) entraîne la propriété invoquée dans la suite sous le nom de convexité logarithmique : φ est convexe > 0 ou concave < 0 sauf si son graphe se trouve dans la région $\Omega = \{(t, \tau) : \tau^2 < 1 - q^2 e^{-2t}\}$.

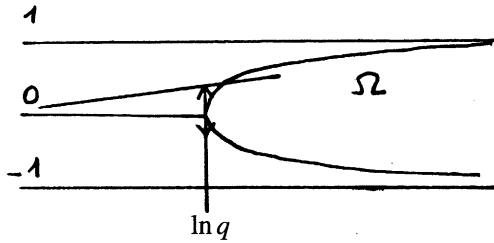


FIG. 1.

Enfin (4) équivaut au système différentiel

$$r f'(r) + q f(r) = r^q g(r), \quad g'(r) = r^{1-q} f(r) [f^2(r) - 1] \quad (6)$$

ou à sa forme intégrée

$$f(r) = \frac{1}{r^q} \int r^{2q-1} g(r) dr, \quad g(r) = \int r^{1-q} f(r) [f^2(r) - 1] dr \quad (7)$$

et l'on a, entre 2 solutions f, F , la relation

$$\frac{d}{dr} r [f'(r) F(r) - f(r) F'(r)] = r f(r) F(r) [f^2(r) - F^2(r)] \quad (8)$$

prouvant que la différence entre deux solutions > 0 ne peut s'annuler plus d'une fois sur \mathbb{R}_+ : si l'on avait $f > F > 0$ sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ et $f = F$ aux bornes de I , $r [\quad]$ au 1^{er} membre de (8) serait ≥ 0 à la borne inférieure de I , < 0 à la borne supérieure et croissant sur I .

2. PREUVE DE LA 1^e PARTIE DU THÉORÈME

En portant $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ dans (1), on trouve $a_n = 0 \forall n < q$, puis $a_n = 0$ pour tout n n'ayant pas la parité de q , $a_q = a$ indéterminé, mais déterminant $a_{q+2k} = P_k(a) \forall k \in \mathbb{N}^*$ par la formule de récurrence

$$4k(k+q)P_k = \sum_{l+m+n=k-q-1} P_l P_m P_n - P_{k-1} \quad (9)$$

à partir de $P_0(a) = a$, où le \sum disparaît si $k \leq q$, et sinon compte $C_{k-q+1}^2 < k(k+q)/2$ termes. P_k est donc un polynôme impair et, en choisissant α et $\lambda > 0$ de manière que

$$\alpha^2 = 8\lambda^{q+1} - 2\lambda^q/(q+1) \quad (10)$$

on a $|P_k(a)| \leq \lambda^k |a|$ pour $|a| \leq \alpha \forall k \in \mathbb{N}$: la série (2) a donc un rayon de convergence $\geq 1/\sqrt{\lambda}$.

PROPOSITION 1. — *Toute solution f définie sur un intervalle $]0, R[$, ou bien tend vers $\pm\infty$ quand $r \rightarrow 0$, ou bien prolonge une f_a .*

Preuve. — Pour cause de convexité logarithmique : si $f \geq 1$ et $f' \leq 0$ en un point $r_0 \in]0, R[$, $f(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow 0$; si $f'(r_0) > 0$ et $f > 1$ sur $]0, r_0[$, $f(r)$ a une limite ≥ 1 quand $r \rightarrow 0$; si celle-ci était finie, soit l , deux intégrations de (3) donneraient $f(r) \sim (q^2 l/2) \ln^2 r$. Reste donc à étudier une solution f : $]0, R[\rightarrow]-1, +1[$.

Si g lui est associée par les formules (7) (où la 1^e intégrale est prise de 0 à r puisque $r^q f(r) \rightarrow 0$ avec r), l'emploi de ces formules en alternance donne successivement, quand $r \rightarrow 0$: $g(r) = 0(r^{1-q})$, $f(r) = 0(r)$, $g(r) = 0(r^{2-q})$, $f(r) = 0(r^2)$, ..., $g(r) = 0(1)$, $f(r) = 0(r^q)$, et le processus s'arrête là, car l'intégrand $0(r)$ dans la 2^e intégrale n'entraîne que $g(r) = 0(1)$; les 2 dernières estimations donnent $f'(r) = 0(r^{q-1})$ par la 1^e formule (6).

Alors le $[]$ au 1^{er} membre de (8), où $F = f_1$, tend vers 0 avec r , tandis que le 2^e membre est $0(r^{4q+1})$; le $[]$ est donc $0(r^{4q+1})$, $\frac{d}{dr} \frac{f(r)}{f_1(r)} \rightarrow 0$ et $\frac{f(r)}{f_1(r)}$ a une limite finie a , qui est aussi celle de $f(r)/r^q$. Si α dans (10) est choisi $> |a|$ et si $r_0 < 1/\sqrt{\lambda}$, $f_{a'} \rightarrow f_a$ quand $a' \rightarrow a$ uniformément sur $[0, r_0]$; comme f est comprise entre $f_{a \pm \varepsilon} \forall \varepsilon > 0$, on conclut $f = f_a$.

3. PREUVE DE LA 2^e PARTIE DU THÉORÈME

PROPOSITION 2. — Si la solution f vérifie $f \geq 1$ et $f' > 0$ en $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $R \in]r_0, +\infty[$ tel que $f(r)$ croisse strictement de $f(r_0)$ à $+\infty$ quand r croît de r_0 à R .

Preuve. — La fonction φ associée par (5) étant strictement croissante pour $t \geq t_0 = \ln r_0$, on choisit $t_1 \geq t_0^+$ tel que $\varphi(t_1) \geq \sqrt{2}$, puis $R \geq e^{t_1} [1 + \varphi(t_1)/\varphi'(t_1)]$ tel que $(R - e^{t_1})^2 \geq R + 1$, enfin $\rho \in [\sqrt{2}\sqrt{R+1}, \sqrt{2}(R - e^{t_1})]$. On compare alors, pour $t \geq t_1$, φ considérée comme solution de $\varphi''(t) = \alpha(t)\varphi^3(t)$ avec $\alpha(t) = q^2\varphi^{-2}(t) + e^{2t}[1 - \varphi^{-2}(t)] > e^{2t}/2$, à $\psi(t) = \rho/(R - e^t)$ solution de $\psi''(t) = \beta(t)\psi^3(t)$ avec $\beta(t) = (1/\rho^2)(Re^t + e^{2t}) \leq e^{2t}/2 < \alpha(t)$; les conditions initiales $\psi(t_1) \leq \varphi(t_1)$, $\psi'(t_1)/\psi(t_1) \leq \varphi'(t_1)/\varphi(t_1)$ entraînent $\psi(t) < \varphi(t)$ pour $t > t_1$, $e^t < R$: si en effet la fonction analytique $\varphi - \psi$ était > 0 sur $]t_1, t_2[$ mais nulle en t_2 , la combinaison classique $\frac{d}{dt}(\psi\varphi' - \varphi\psi') = \varphi\psi(\alpha\varphi^2 - \beta\psi^2)$ donnerait φ/ψ strictement croissant sur $]t_1, t_2[$, ≥ 1 en t_1 , $= 1$ en t_2 .

Ainsi $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ quand $e^t \rightarrow R' \leq R$. \square

PROPOSITION 3. — Si une solution f sur $[r_0, r_1]$ ($0 < r_0 < r_1$) est < 0 sur $]r_0, r_1[$ mais nulle en r_0 et r_1 , elle est > -1 sur ces intervalles, s'annule de nouveau en $r_2 \in]r_1, r_1^2/r_0[$, $f > 0$ sur $]r_1, r_2[$ et $\sup_{]r_1, r_2[} |f| < \sup_{]r_0, r_1[} |f|$.

Preuve. — S'il existait $r_2 \in]r_0, r_1[$ tel que $f(r_2) = -1$ mais $f > -1$ sur $]r_0, r_2[$, on aurait $f'(r_2) < 0$ d'après (1) et (Prop. 2) f ne pourrait s'annuler en r_1 , d'où la 1^e assertion. Pour les deux autres, considérons de nouveau $\varphi(t) = f(e^t)$ sur $[t_0 = \ln r_0, t_1 = \ln r_1]$: le symétrique, par rapport au point $(t_1, 0)$, du graphe de φ sur $[t_0, t_1]$ est celui d'une fonction ψ nulle en t_1 et en $2t_1 - t_0$, $0 < \psi < 1$ sur $]t_1, 2t_1 - t_0[$, enfin solution de (5') $\psi''(t) = q^2\psi(t) + e^{4t_1-2t}[\psi^3(t) - \psi(t)]$. La dérivation de (5) et (5') montre que φ et ψ ont mêmes dérivées en t_1 (la 1^e étant > 0) jusqu'à l'ordre 3 inclus, mais que $\varphi^{(4)}(t_1) < \psi^{(4)}(t_1)$, de sorte que $0 < \varphi(t) < \psi(t)$ pour $t - t_1 > 0$ assez petit. Si cet encadrement ne subsistait que pour $t < t_2 < 2t_1 - t_0$, avec $\varphi(t_2) = \psi(t_2)$, dans la combinaison classique $\frac{d}{dt}(\psi\varphi' - \varphi\psi') = \varphi\psi[e^{4t_1-2t}(1 - \psi^2) - e^{2t}(1 - \varphi^2)]$, on aurait sur $]t_1, t_2[$ le $[] < 0$ et φ/ψ strictement décroissant de 1 à 1. \square

PROPOSITION 4. — Soit $a > 0$: s'il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_a(r_0) = 1$, il existe aussi $R \in]r_0, +\infty[$ tel que $f_a(r)$ croisse strictement de 0 à $+\infty$ quand r croît de 0 à R .

Preuve. — Quand t croît à partir de $-\infty$, la fonction φ_a associée par (5) à f_a est d'abord convexe strictement croissante; elle le reste indéfiniment si son graphe ne franchit pas la frontière de Ω (fig. 1) et l'assertion résulte alors de la proposition 2. S'il la franchit, φ_a devient concave et peut, soit rester strictement croissante, soit passer par un maximum situé dans Ω . Dans le 1^{er} cas, ou bien le graphe franchit à nouveau la frontière de Ω , alors φ_a redevient convexe strictement croissante et la proposition 2 s'applique encore; ou bien le graphe reste dans Ω , alors φ_a est strictement croissante et strictement comprise entre 0 et 1 sur tout \mathbb{R} . Dans le 2^e cas, après son maximum φ_a est concave strictement décroissante, puis s'annule et, d'après la proposition 3 appliquée au besoin une infinité de fois, ne peut jamais prendre la valeur 1. \square

La démonstration précédente fait apparaître comme possibles les 3 sortes de solutions f_a annoncées par le Théorème, mais n'en prouve pas l'existence; c'est à celle-ci qu'on va s'employer maintenant, en commençant par la 1^e sorte.

Soit $a > 0$: tant que $0 < f_a < 1$, la fonction g_a associée par (6) décroît strictement à partir de $2qa$ (sa limite quand $r \rightarrow 0$), et les intégrales figurant dans (7), prises de 0 à r , donnent respectivement $r^q f_a(r)$ et $g_a(r) - 2qa$, d'où successivement

$$\begin{aligned} g_a(r) &< 2qa, \quad f_a(r) < ar^q, \quad g_a(r) > 2qa - ar^2/2, \\ f_a(r) &> a[r^q - r^{q+2}/4(q+1)] \end{aligned} \quad (11)$$

le maximum du [] vaut $[2^{q+1}/(q+2)][q(q+1)/(q+2)]^{q/2}$; si son produit par a dépasse 1, on est assuré que f_a prend la valeur 1 et par conséquent se comporte selon la proposition 4.

Si f_a prend la valeur 1, c'est une seule fois (prop. 4), pour $r = f_a^{-1}(1)$; il en est de même de $f_{a'}$ $\forall a' > a$, et alors $f_{a'}^{-1}(1) < f_a^{-1}(1)$, puisque $a' > a$ entraîne $f_{a'} > f_a$. De même, pour tout a' assez voisin de a , $f_{a'}$ prend la valeur 1 (une seule fois), et $f_{a'}^{-1}(1) \rightarrow f_a^{-1}(1)$ quand $a' \rightarrow a$. En effet, quand $a' \rightarrow a$, $f_{a'} \rightarrow f_a$, $f'_{a'} \rightarrow f'_a$, uniformément, sur un intervalle $[0, r_0]$ déterminé, à la fin de la preuve de la proposition 1, à partir des développements (2); partant de cette valeur r_0 qui n'est plus singulière pour l'équation (1), l'emploi répété de la dépendance continue (locale dans le cas non linéaire) de la solution vis-à-vis des conditions initiales prouve que : si f_a est prolongeable à $[0, r_1]$, $f_{a'}$ l'est aussi pour a' assez voisin de a , et $f_{a'} \rightarrow f_a$ uniformément sur $[0, r_1]$. D'où les deux assertions en prenant $r_1 = f_a^{-1}(1 + \varepsilon)$, $r_2 = f_a^{-1}(1 - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$: en effet $|f_{a'} - f_a| < \varepsilon$

sur $[0, r_1]$ entraîne $f_a^{-1}(1)$ compris entre r_1 et r_2 , qui tendent vers $f_a^{-1}(1)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ainsi les a pour lesquels f_a prend la valeur 1 forment un intervalle ouvert $]A, +\infty[$ ($A \geq 0$ *a priori*) sur lequel $f_a^{-1}(1)$ est fonction continue strictement décroissante de a ; $f_a^{-1}(1) \rightarrow 0$ quand $a \rightarrow +\infty$, car le 2^e membre de la dernière inégalité (11) tend vers $+\infty$ avec $a \forall r \in]0, 2\sqrt{q+1}[$. Reste à savoir si $s = \sup_{a>A} f_a^{-1}(1)$ est fini ou non. Pour répondre à cette question, et à quelques autres, admettons provisoirement $A > 0$, qui résultera de la proposition 5.

f_A ne peut, ni prendre la valeur 1, ni s'annuler en $r_1 \in \mathbb{R}_+^*$, puisque la fonction croissante f_a , $a > A$, devrait tendre vers f_A quand $a \rightarrow A$, uniformément sur $[0, r_1]$. En se reportant à la discussion du graphe de φ_a (preuve de la prop. 4) on voit que f_A reste strictement croissante (et même $f'_A > 0$) et strictement comprise entre 0 et 1, donc se prolonge à tout \mathbb{R}_+ , et tend vers $L \in]0, 1]$ quand $r \rightarrow +\infty$; mais, avec $L \in]0, 1[$, (5) donnerait, pour $t \rightarrow +\infty$, $\varphi_A''(t) \sim L(L^2 - 1)e^{2t}$, qui est absurde. Puisque f_A est définie et strictement comprise entre 0 et 1 sur tout \mathbb{R}_+^* , s fini entraînerait, pour a assez voisin de A , f_a prolongeable à $[0, s+1]$ et < 1 sur cet intervalle, contrairement à la définition de s .

Soit maintenant $0 < a < A$: d'abord f_a ne peut avoir le même comportement que f_A , car alors on aurait $0 < f_a < f_A$ sur tout \mathbb{R}_+^* , et (8) donnerait $(f_a/f_A)(r)$ strictement décroissant de a/A à 1 quand r croît de 0 à $+\infty$. Alors φ_a s'annule sur \mathbb{R} , f_a s'annule sur \mathbb{R}_+^* , et il suffit de montrer que f_a s'annule 2 fois, pour que la proposition 3 lui donne une suite infinie de zéros tendant vers $+\infty$; on aura en outre $-f_A < f_a < f_A$ sur tout \mathbb{R}_+^* . Supposons donc que f_a s'annule seulement en r_1 sur \mathbb{R}_+^* , de sorte que $f_a(r) < 0 \forall r > r_1$: la preuve de la proposition 3, où φ est remplacée par $-\varphi_a$, t_0 par $-\infty$ et $\psi(t)$ par $\varphi_a(2t_1 - t)$, donnerait, pour $t > t_1$, $0 < -\varphi_a(t) < \varphi_a(2t_1 - t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$; alors, pour t assez grand, le graphe de φ_a serait dans Ω (fig 1), et $\varphi_a < 0$ entraînerait φ_a convexe.

Pour achever, par $A > 0$, la preuve de la 2^e partie du théorème, il suffit de montrer que, pour $|a|$ assez petit, f_a s'annule sur \mathbb{R}_+^* , et ceci résultera de la partie (ii) de la

PROPOSITION 5. — (i) *Étant donné $r_1 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $a_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que les quotients f_a/a , $|a| \leq a_1$, soient définis, bornés dans leur ensemble, équicontinus, sur $[0, r_1]$.*

(ii) Quand $a \rightarrow 0$, f_a/a tend, uniformément sur tout compact $\subset \mathbb{R}_+$, vers la fonction de Bessel J_q , donnée par la formule ci-dessous, qui a une infinité de zéros >0 .

Preuve. — (i) Si α et λ dans (10) sont choisis de manière que $\lambda < 1$, pour $|a| \leq \alpha$ on a $|f_a/a|$ et

$$|f'_a/a| \leq \beta = \sum_{k=0}^{\infty} (q+2k) \lambda^k \text{ sur } [0, 1] \text{ (ce qui achève de prouver (i) si } r_1 \leq 1), \text{ en particulier } |\varphi_a(0)| \text{ et } |\varphi'_a(0)| \leq |a| \beta.$$

Si $r_1 > 1$, et si f_a est définie sur $[0, r_1]$, on peut considérer φ_a comme solution sur $[0, t_1 = \ln r_1]$ d'une équation de la forme $\varphi''(t) = c(t) \varphi(t)$: si $\gamma \geq 1$ et $\gamma \geq |c(t)| \forall t \in [0, t_1]$, un raisonnement classique montre que les conditions initiales ci-dessus, vérifiées par φ_a en 0, entraînent $|\varphi_a(t)|$ et $|\varphi'_a(t)| \leq |a| \beta e^{\gamma t} \forall t \in [0, t_1]$. Posons donc $\gamma = q^2 + e^{2t_1}$: si $|a| \leq \alpha$ et $|a| \beta e^{\gamma t_1} < 1$ alors φ_a est définie, de valeur absolue $\leq |a| \beta e^{\gamma t_1}$ ainsi que $|\varphi'_a|$, sur tout $[0, t_1]$; d'où l'assertion en revenant à la variable $r = e^t$.

(ii) Quand $a \rightarrow 0$, $P_k(a)/a$ tend vers $P'_k(0) \forall k \in \mathbb{N}$, et la dérivation de (9) donne $4k(k+q)P'_k(0) = -P'_{k-1}(0)$; $P'_k(0)$ est donc le coefficient du terme de degré $q+2k$ dans le développement taylorien à l'origine de la fonction de Bessel J_q :

$$J_q(r) = q! r^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k}}{4^k k! (q+k)!}$$

α et λ étant choisis comme pour (i), on a $|P_k(a)/a| \leq \lambda^k \forall k \in \mathbb{N}$ pour $|a| \leq \alpha$, donc f_a/a et f'_a/a tendent vers J_q et J'_q uniformément sur $[0, 1]$.

D'autre part, sur un intervalle compact $[1, r_1]$: une borne commune pour les quotients f_a/a , f'_a/a , en implique une, d'après (1), pour les f''_a/a ; alors le Théorème d'Ascoli fournit des suites $a_n \rightarrow 0$ telles que les suites correspondantes f_{a_n}/a_n , f'_{a_n}/a_n , f''_{a_n}/a_n convergent uniformément sur tout compact, et la limite F de la 1^{re} suite est solution de l'équation différentielle $r^2 F''(r) + r F'(r) + (r^2 - q^2) F(r) = 0$, c'est donc J_q . \square

4. PREUVE DE LA 3^e PARTIE DU THÉORÈME

La valeur $R \in \mathbb{R}_+^*$ n'étant pas singulière pour l'équation (1), celle-ci admet, pour chaque $b \in \mathbb{R}_+^*$, une solution unique $f_{R,b}$ vérifiant $f_{R,b}(R) = 0$, $f'_{R,b}(R) = b$; elle est strictement croissante pour $r > R$ assez voisin de R . Quant à son comportement pour de plus grandes valeurs de r , les raisonnements qui prouvent la proposition 4, basés sur la figure 1 et

la convexité logarithmique, font apparaître les trois mêmes possibilités que pour les f_a : croître strictement de 0 à $+\infty$ quand r croît de R à une certaine valeur finie; croître strictement, mais en restant strictement comprise entre 0 et 1, sur tout $]R, +\infty[$; passer par un maximum, puis décroître strictement, s'annuler, et par suite (prop. 3) osciller indéfiniment, en restant strictement comprise entre ± 1 , sur tout $[R, +\infty[$. La seule nouveauté est dans les moyens à employer pour montrer que ces possibilités se réalisent toutes trois.

Au point $T = \ln R$, on a $\varphi_{R,b} = 0$, $\varphi'_{R,b} = Rb$; si $\varphi_{R,b}$ reste comprise entre 0 et 1 sur $[T, T + \theta]$ avec $0 < \theta \leq 1/2$, sur cet intervalle on a $\varphi''_{R,b} > -e^{2T+1}$, donc $\varphi'_{R,b} > Rb - e^{2T+1}$ qui, pour b assez grand, entraîne $\varphi_{R,b}(T + \theta) = 1$ pour un θ convenable. Soient d'autre part r_1, r_2 ($R < r_1 < r_2$) deux zéros consécutifs de $f_{A/2}$ entre lesquels $f_{A/2} > 0$, et soit M le maximum de $f_{A/2}$ sur $]r_1, r_2[$: comme dans la preuve de la proposition 5 (i), pour b assez petit $\varphi_{R,b}$ est définie et de valeur absolue $< M$ sur $[T, \ln r_2]$; si $f_{R,b}$ restait > 0 sur $]R, r_2]$, la différence $f_{R,b} - f_{A/2}$ s'annulerait au moins 2 fois sur $]r_1, r_2[$.

Ainsi les $b \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels $f_{R,b}$ prend la valeur 1 sur $]R, +\infty[$, et ceux pour lesquels $f_{R,b}$ prend la valeur 0 sur $]R, +\infty[$, forment deux parties non vides de \mathbb{R}_+^* ; ces deux parties étant disjointes et ouvertes, il y a aussi des $b \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels $f_{R,b}$ ne prend sur $]R, +\infty[$ ni la valeur 0 ni la valeur 1, donc reste strictement croissante (en fait $f'_{R,b} > 0$) et strictement comprise entre 0 et 1 sur tout $]R, +\infty[$. Ces $f_{R,b}$ tendent vers 1 quand $r \rightarrow +\infty$, comme f_A et pour la même raison; de ce fait il n'y en a qu'une, soit $f_{R,B}$.

Le développement asymptotique commun à f_A et aux $f_{R,B}$ va s'obtenir à l'aide du lemme suivant, relevant de la théorie des équations différentielles linéaires.

LEMME. — Sur un intervalle I de borne sup $+\infty$, soient $a(r)$ une fonction continue tendant vers $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ quand $r \rightarrow +\infty$, et $x(r)$ une fonction $\in C^2(I)$ et tendant vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$: si $y(r) = x''(r) - a(r)x(r)$ est $o(1/r^k)$ [resp.: $o(1/r^k)$, $\sim \alpha/r^k$] ($k > 0$, $\alpha \neq 0$), alors $x(r)$ est $o(1/r^k)$ [resp.: $o(1/r^k)$, $\sim -\alpha/\lambda r^k$] et $x'(r)$ est aussi $o(1/r^k)$ [resp.: $o(1/r^k)$].

Indication sur la preuve. — On choisit $x_0(r)$, solution > 0 de l'équation $x_0''(r) = a(r)x_0(r)$, et telle que $x_0'(r)/x_0(r)$ tende vers $\sqrt{\lambda}$ quand $r \rightarrow +\infty$; on pose

$$x(r) = x_0(r)z(r),$$

d'où $z'(r) = [1/x_0^2(r)] \int x_0(r) y(r) dr$, et l'on évalue $z(r)$ par la règle de l'Hôpital. Des exemples tels que $a(r) = 1$, $x(r) = (1/r) \sin r$ ou $(1/r) + (1/r^2) \sin r$ prouvent que k ne peut être remplacé par $k+1$ dans l'estimation de $x'(r)$, et ceci complique l'emploi du lemme dans la récurrence qui suit.

Emploi du lemme. — Les solutions f de (1) considérées ici correspondent à des solutions $\varphi > 0$ de (5) dont le graphe est situé dans Ω , donc concaves, et tendant vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$; alors $\varphi'(t) \rightarrow 0$, ou $rf'(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow +\infty$. Dans toute la suite on prendra $a(r) = f(r)[1 + f(r)] \rightarrow 2$ quand $r \rightarrow +\infty$.

Appliquons d'abord le lemme à $x_0(r) = f(r) - 1$: d'après (1), $y_0(r) = x_0''(r) - a(r)x_0(r) = [q^2 f(r)/r^2] - [f'(r)/r] \sim q^2/r^2$, donc $x_0(r) \sim -q^2/2r^2$ ou $f(r) = 1 - q^2/2r^2 + o(1/r^2)$, $f'(r) = x_0'(r) = o(1/r^2)$, enfin $y_0(r) = q^2/r^2 + o(1/r^3)$.

On peut maintenant raisonner par récurrence en supposant (ce qui vient d'être vérifié pour $n=1$) que $y_0(r)$ a un développement limité (en abrégé d.l.) suivant les puissances de $1/r^2$ avec reste $o(1/r^{2n+1})$ et que $f(r)$ en a un avec reste $o(1/r^{2n})$, soit (12) $f(r) = 1 + \sum_{k=1}^n c_k/r^{2k} + o(1/r^{2n})$, de sorte que $a(r)$ aussi en a un, avec même reste.

$$A \quad x_{n-1}(r) = f(r) - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} c_k/r^{2k} \quad (\text{où le } \sum \text{ disparaît si } n=1)$$

correspond par le lemme $y_{n-1}(r) = y_0(r) - \left[\frac{d^2}{dr^2} - a(r) \right] \sum_{k=1}^{n-1} c_k/r^{2k}$ qui, d'après la double hypothèse de la récurrence, a un d.l. suivant les puissances de $1/r^2$ avec reste $o(1/r^{2n+1})$; puisque $x_{n-1}(r) \sim c_n/r^{2n}$, un 1^{er} emploi du lemme prouve que ce d.l. est réduit à $-2c_n/r^{2n} + o(1/r^{2n+1})$.

$$A \quad x_n(r) = f(r) - 1 - \sum_{k=1}^n c_k/r^{2k} \quad \text{correspond de même}$$

$$y_n(r) = y_{n-1}(r) + 2c_n/r^{2n} - \left[\frac{d^2}{dr^2} - a(r) + 2 \right] c_n/r^{2n}$$

qui est d'abord $o(1/r^{2n+1})$; un 2^e emploi du lemme fournit $x'_n(r) = o(1/r^{2n+1})$ ou

$$f'(r) = - \sum_{k=1}^n 2kc_k/r^{2k+1} + o(1/r^{2n+1}); \quad (13)$$

en portant (12) et (13) dans l'expression de $y_0(r)$, on obtient un d.l. de $y_0(r)$ avec reste $o(1/r^{2n+2})$, donc aussi un d.l. de $y_n(r) = y_0(r) - \left[\frac{d^2}{dr^2} - a(r) \right] \sum_{k=1}^n c_k/r^{2k}$ avec même reste.

Compte tenu de $y_n(r) = o(1/r^{2n+1})$, ce dernier d.l. a une partie entière réduite à un terme en $1/r^{2n+2}$, dont on peut noter le coefficient $-2c_{n+1}$, d'où par un dernier emploi du lemme : $x_n(r) = c_{n+1}/r^{2n+2} + o(1/r^{2n+2})$ et $x'_n(r) = o(1/r^{2n+2})$; ces résultats permettent de remplacer : dans (12), le reste $o(1/r^{2n})$ par $c_{n+1}/r^{2n+2} + o(1/r^{2n+2})$; dans (13), le reste $o(1/r^{2n+1})$ par $o(1/r^{2n+2})$; en portant (12) et (13) ainsi améliorés dans l'expression de $y_0(r)$, on obtient un d.l. de $y_0(r)$ avec reste $o(1/r^{2n+3})$, et la récurrence est complète.

Calcul des termes c_n/r^{2n} du développement. Sachant que $f(r)$ et $f'(r)$ ont des d.l. de tous ordres, (1) en fournit pour $f''(r)$, et l'on est assuré que la dérivation terme à terme des d.l. de $f(r)$ fournit ceux du 1^{er} membre de (1); en annulant le coefficient de $1/r^{2n}$ au 1^{er} membre de (1), on trouve $(4n^2 - q^2)c_n - 2c_{n+1}$ égal au coefficient de $1/r^{2n+2}$ dans le polynôme $s_n(r)[1 + s_n(r)][2 + s_n(r)]$, où $s_n(r) = \sum_{k=1}^n c_k/r^{2k}$. Sachant que $c_1 = -q^2/2$, cette formule de récurrence donne

$$c_2 = -q^2(q^2 + 8)/8.$$

Remarque. — Le fait que toutes les solutions considérées ici ont le même développement asymptotique jusqu'à un ordre quelconque laisse présager que le quotient de deux d'entre elles tend vers 1 exponentiellement quand $r \rightarrow +\infty$: c'est ce qu'on va vérifier. f et F étant deux solutions de (1), > 0 ainsi que f' et F' sur $]R, +\infty[$ et tendant vers 1 quand $r \rightarrow +\infty$, en posant $1 + u = f/F$ on définit $u(r)$ solution d'après (8) d'une équation de la forme $\frac{d}{dr}[\mu(r)u'(r)] = \nu(r)u(r)$, où $\mu(r) = rF^2(r)$ et $\nu(r) = rf(r)F^2(r)[f(r) + F(r)]$ sont > 0 ainsi que μ' et ν' sur $]R, +\infty[$, $\mu(r) \sim r$ et $\nu(r) \sim 2r$ quand $r \rightarrow +\infty$. Alors $w = u/\mu u'$ vérifie l'équation de Riccati (14) $w' = (1/\mu) - \nu w^2$, dont les courbes intégrales dans le plan (r, w) se mettent en place à partir de la courbe Γ d'équation $w^2 = 1/\mu(r)\nu(r)$, lieu des points où $w' = 0$ (fig. 2).

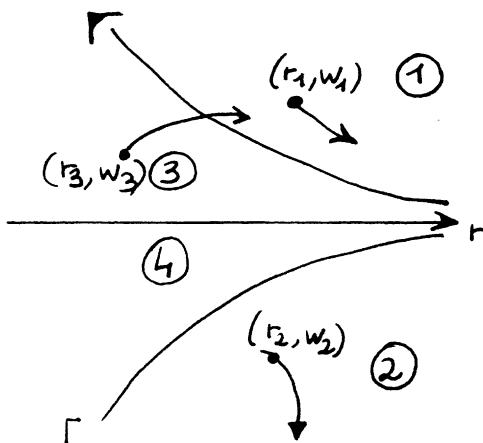


FIG. 2.

Une courbe intégrale partant, dans le sens r croissant, d'un point (r_1, w_1) de la 1^e région a une pente < 0 et la conserve car elle ne peut franchir Γ ; le long de cette courbe, r décrit $[r_1, +\infty[$; la fonction $w(r)$ correspondante étant > 0 , il en est de même de $u'(r)/u(r)$, mais $|u(r)|$ strictement croissante contredit $u(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow +\infty$.

Une courbe intégrale partant d'un point (r_2, w_2) de la 2^e région garde aussi une pente < 0 ; le long de cette courbe, w décrit $[w_2, -\infty[$, car la dérivation de (14) donne $w'' = -(\mu'/\mu^2) - \nu'w^2 - 2\nu ww' < 0$ si $ww' > 0$; mais r ne peut décrire qu'un intervalle borné, car (14) entraîne $\mu(r_2)w' < 1 - \mu\nu(r_2)w^2$, d'où résulte que l'intégrale de $\frac{dr}{dw}$ converge à l'infini.

Enfin, une courbe intégrale partant d'un point de la 3^e région franchit Γ et se retrouve dans la 1^e. Pour notre fonction $u = (f/F) - 1$, le graphe de $w(r)$ est donc dans la 4^e région: $-1/\sqrt{\mu\nu(r)} < w(r) < 0$ entraîne $(u'/u)(r) < -\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}(r)$ qui tend vers $-\sqrt{2}$ quand $r \rightarrow +\infty$, d'où

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \ln |u(r)| \leq -\sqrt{2}.$$

5. PREUVE DE LA 4^e PARTIE DU THÉORÈME

Soit $|a| < A$. Le fait que φ_a n'a pas de zéro $\leq \ln q$ est en évidence sur la figure 1. Soient t_1, t_2, \dots les zéros consécutifs de φ_a et σ_n le maximum de

$|\varphi_a|$ sur $[t_n, t_{n+1}]$: on sait que $0 < \sigma_n < 1$ et (proposition 3) que la suite σ_n décroît strictement vers $\sigma \in [0, 1[$. Sur $[t_n, t_{n+1}]$ on a la double inégalité

$$(1 - \sigma_n^2) e^{2t_n} - q^2 \leq [1 - \varphi_a^2(t)] e^{2t} - q^2 \leq e^{2t_{n+1}} - q^2$$

dont les membres extrêmes sont > 0 pour n assez grand; notant ceux-ci m_n^2, M_n^2 avec $0 < m_n < M_n$, et le membre médian $c(t)$, on a sur $[t_n, t_{n+1}]$

$$\varphi_a''(t) + c(t) \varphi_a(t) = 0 \quad \text{et} \quad m_n^2 \leq c(t) \leq M_n^2,$$

d'où résulte de façon classique $\pi/M_n \leq t_{n+1} - t_n \leq \pi/m_n$ et par suite: que, quand $r \rightarrow +\infty$, $t_{n+1} - t_n$ est infiniment petit et $e^{t_n}, e^{t_{n+1}}, M_n, m_n/\sqrt{1 - \sigma^2}$ infiniment grands équivalents; puis que $r_{n+1} - r_n \sim e^{t_n}(t_{n+1} - t_n)$ a une limite inf $\geq \pi$ et une limite sup $\leq \pi/\sqrt{1 - \sigma^2}$. Si $\sigma = 0$, on conclut que $r_{n+1} - r_n$ a pour limite π .

Pour montrer qu'effectivement $\sigma = 0$, raisonnons par l'absurde en supposant $\sigma \in]0, 1[$. Tout d'abord, sur $[t_n, t_{n+1}]$, $|\varphi_a''| < M_n^2$ entraîne $|\varphi_a'| < M_n^2(t_{n+1} - t_n)$ puisque φ_a' s'annule en un point de l'intervalle; par suite, sur $[r_n, r_{n+1}]$ on a $|f_a'| < M_n^2(t_{n+1} - t_n)e^{-t_n}$, dont la lim sup quand $r \rightarrow \infty$ est $\leq \pi/\sqrt{1 - \sigma^2}$: ainsi f_a' est borné sur \mathbb{R}_+ .

D'autre part, 0 et $\pm\sigma_n$ étant les valeurs extrêmes de φ_a sur $[t_n, t_{n+1}]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\sigma_n^2 \leq (t_{n+1} - t_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi_a'^2(t) dt$, d'où

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2t} \varphi_a'^2(t) dt &\geq e^{-2t_{n+1}} \sigma_n^2 / (t_{n+1} - t_n) \\ &\geq e^{-2t_{n+1}} \sigma_n^2 m_n / \pi \sim \sigma^2 \sqrt{1 - \sigma^2} / \pi r_n \quad (15) \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow \infty$. Comme $r_{n+1} - r_n$ a une lim inf > 0 et une lim sup $< \infty$, il en est de même de r_n/n , et (15) prouve que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-2t} \varphi_a'^2(t) dt$ diverge, ainsi que l'intégrale $\int_1^\infty f_a'^2(r) \frac{dr}{r}$ qui s'en déduit par le changement de variable $r = e^t$ (L'idée de considérer cette dernière intégrale et la formule (16) ci-dessous nous a été inspirée par la lecture du preprint [3], et nous remercions M. Brézis de nous l'avoir communiqué).

Enfin l'équation (1) peut encore s'écrire

$$f''(r) + f(r) - f^3(r) = q^2 f(r)/r^2 - f'(r)/r,$$

d'où

$$f_a'^2(r) + f_a^2(r) - f_a^4(r)/2 = 2q^2 \int f_a(r) f_a'(r) \frac{dr}{r^2} - 2 \int f_a'^2(r) \frac{dr}{r}. \quad (16)$$

f_a et f_a' étant bornés sur R_+ , la 1^e intégrale indéfinie au 2^e membre de (16) converge quand $r \rightarrow \infty$, et l'on vient de montrer que la 2^e tend vers $+\infty$; alors le 1^{er} membre tend vers $-\infty$, ce qui est absurde.

Remarque. – Le preprint [3] va beaucoup plus loin, puisqu'il donne pour $f_a(r)$ une évaluation asymptotique précise quand $r \rightarrow \infty$: il existe des constantes $A > 0$ et B telles que

$$f_a(r) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos\left(r - \frac{3}{8} A^2 \ln r - B\right) + O(r^{-3/2} \ln r).$$

6. PREUVE DES REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

D'après la 1^e partie du théorème, les solutions réelles définies sur un intervalle $[0, R]$ figurent toutes parmi les f_a . Les remarques 1 et 3 résultent donc des comportements distincts des f_a , précisés par la 2^e partie.

Quant à la Remarque 2 : on a vu, en prouvant la 2^e partie, que $f_a^{-1}(1)$ croît strictement et continûment de 0 à $+\infty$ quand a décroît de $+\infty$ à A , donc vaut R pour une valeur de a et une seule.

RÉFÉRENCES

- [1] H. BRÉZIS, F. MERLE, T. RIVIÈRE, *Quantization effects for $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$ in \mathbb{R}^2* , à paraître.
- [2] P. HAGAN, Spiral waves in reaction diffusion equations, *SIAM J. Applied Math.*, **42**, 1982, p. 762-786.
- [3] X. CHEN, C. ELLIOTT, Q. TANG, Shooting method for vortex solutions of a complex valued Ginzburg-Landau equation, à paraître aux *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*.
- [4] P. C. FIFE, L. A. PELETIER, On the location of defects in stationary solutions of the Ginzburg-Landau equation in \mathbb{R}^2 , à paraître au *Quart. Applied Math.*

(Manuscript received July 17, 1993;
accepted September 30, 1993.)