ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

G. BOUCHITTE
M. VALADIER

Multifonctions s.c.i. et régularisée s.c.i. essentielle

Annales de l'I. H. P., section C, tome S6 (1989), p. 123-149
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1989__S6__123_0>

MULTIFONCTIONS s.c.i. ET RÉGULARISÉE s.c.i. ESSENTIELLE

G. BOUCHITTE
Faculté des Sciences de Saint-Jérôme, Mathématiques, av. Escadrille Normandie Niemen, 13397 Marseille Cedex 13

M. VALADIER
Université des Sciences et Techniques du Languedoc, place E. Bataillon, 34060 Montpellier Cedex.

1. INTRODUCTION. L'exposé fait à Perpignan en juin 1987 présentait un travail général [9]. Ici nous allons mettre l'accent sur le cas sous-linéaire.

L'objectif du présent article est d'offrir un texte lisible (le parti de travailler avec $\mathbb{R}^d$ est délibéré) pouvant servir de lecture préliminaire à [9] mais surtout qui, à la fois donne quelques résultats inédits, et expose la plus grande partie des résultats disponibles pouvant être utiles dans les applications où l'intégrande est sous-linéaire (cf. en Mécanique Debordes [19], Laghdir [31]). Noter que le cas général étudié dans [9] a aussi parmi ses motivations la Mécanique (théorie de la plasticité).

Se donner un intégrande $(x,z) \to f(x,z)$ sous-linéaire en z revient à se donner une multifonction Σ et à poser $f(x,.) = \delta^*(.|\Sigma(x))$ la fonction d'appui de $\Sigma(x)$.

Supposons donné un espace vectoriel de fonctions $\mathcal{V}$. Notons $\mathcal{V}_\Sigma$ l'ensemble des sections de Σ qui appartiennent à $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{V}'$ un espace vectoriel de fonctions (ou de mesures) en dualité avec $\mathcal{V}$. Considérons la fonctionnelle

$$G : v' \to \int \delta^*(v'(x)|\Sigma(x))\, dx$$

(écriture supposant que v' est une fonction, si c'est une mesure prendre $\int \delta^*\left(\frac{dv'}{d\theta}(x)\,|\Sigma(x)\right)\theta(dx)$ où θ est une mesure positive dominant v'). On a, sous différentes hypothèses, la formule

$$\delta^*(v'|\mathcal{V}_\Sigma) = \int \delta^*(v'(x)|\Sigma(x))\,dx \tag{1}$$

Elle montre que G est $\sigma(\mathcal{V}',\mathcal{V})$ s.c.i. et permet de caractériser ponctuellement le cône normal en un point de $\mathcal{V}_\Sigma$.

On va dans le §3 rappeler le cas $\mathcal{V} = L^p$, $\mathcal{V}' = L^q$ et dans le §4 aborder le cas $\mathcal{V} = \mathcal{C}_0$, $\mathcal{V}' = \mathcal{M}^b$. Il arrive que G ne soit pas $\sigma(\mathcal{M}^b,\mathcal{C}_0)$ s.c.i. Le problème se pose alors de caractériser la régularisée s.c.i. de F, restriction de G à L^1. Cela nous amène au §5 à définir la régularisée s.c.i. essentielle $\hat{\Sigma}$ d'une multifonction Σ. Le §6 montre que la régularisée $\bar{F}$ s'exprime avec $\hat{\Sigma}$. Le lien est alors fait avec le résultat principal de [9] (appliqué au cas sous-linéaire).Enfin le §7 caractérise la semi-continuité inférieure de Γ à l'aide de sa fonction d'appui.

2. NOTATIONS

On dira que la mesure positive θ domine la mesure vectorielle λ si $\forall$ A mesurable, $\theta(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$ (on écrit aussi $\lambda \ll \theta$).

Le produit scalaire entre z et $z' \in \mathbb{R}^d$ est noté $z'.z$, la norme de z par $|z|$. La forme bilinéaire mettant en dualité deux espaces fonctionnels $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ est notée $\langle v',v\rangle$.

On désigne par

- $cf(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des convexes fermés non vides de $\mathbb{R}^d$ (idem pour cf(E), E Banach),
- f^* la polaire de f : $f^*(z') = \sup\{z'.z - f(z) : z \in \mathbb{R}^d\}$,
- $\delta(.|C)$ la fonction indicatrice de C qui vaut 0 sur C, $+\infty$ sur le complémentaire de C,
- $\delta^*(.|C)$ la fonction d'appui de C :
$\delta^*(z|C) = \sup\{z'.z : z \in C\}$. C'est la polaire de l'indicatrice,
- $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et rayon r ($\bar{B}(x,r)$ la boule fermée),

- L^1-adh E (resp. unif-adh, resp. s-adh) l'adhérence de E pour la topologie de la norme L^1 (resp. de la convergence uniforme, resp. de la convergence simple),
- Ω un espace topologique localement compact (sauf précision particulière en tête d'un §. Mais on peut lire tout l'article en pensant à Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ ou compact métrique),
- $\mathcal{C}_0$ l'espace des fonctions continues sur Ω tendant vers 0 à l'infini,
- $\mathcal{M}^b$ l'espace des mesures de Radon bornées sur Ω,
- $\mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^p_c$ désignant celles à supports compacts,
- S^{d-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^d$,
- co A l'enveloppe convexe de A.

3. RAPPEL DU CAS $\mathcal{V} = L^p$, $\mathcal{V}' = L^q$.

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geqslant 0$ σ-finie, $p \in [1,\infty]$, $\mathcal{V} = L^p(\Omega,\mu;\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{V}' = L^q(\Omega,\mu;\mathbb{R}^d)$ (q étant l'exposant conjugué de p) et $\Sigma : \Omega \to \mathrm{cf}(\mathbb{R}^d)$ une multifonction mesurable (il y a, du moins si on suppose $\mathcal{F}$ μ-complète, équivalence avec la mesurabilité de $(x,z') \mapsto \delta^*(z'|\Sigma(x))$). On distingue $\mathcal{L}^p$, l'espace des fonctions, de L^p, l'espace des classes d'équivalence de fonctions. De façon naturelle on note

$$\mathcal{L}^p_\Sigma = \{v \in \mathcal{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \ :\ \mu\text{-p.p. } v(x) \in \Sigma(x)\}$$

et L^p_Σ désigne l'ensemble quotient de $\mathcal{L}^p_\Sigma$ par l'égalité p.p.
La formule (1) est vraie :

<u>Théorème 1</u>. <u>Supposons</u> $\mathcal{L}^p_\Sigma \neq \emptyset$. <u>On a</u>, $\forall\, v' \in \mathcal{L}^q(\Omega;\mathbb{R}^d)$:

$$\delta^*(v'|L^p_\Sigma) = \int \delta^*(v'(x)|\Sigma(x))\ \mu(dx) \tag{1'}$$

<u>Remarques.</u> 1) La formule (1') est un cas particulier de la formule beaucoup plus générale de Rockafellar [38] : $(I_f)^* = I_{f^*}$ (prendre

$f(x,z) = \delta(z|\Sigma(x)))$, formule que nous citerons encore dans le §6. Les premières démonstrations sont dues à Rockafellar [38], Ioffe-Tikhomirov [29]. Pour des extensions maximales voir [12], [13] (th. 5, p. 27) et [48].
2) La formule (1') est un cas de commutativité des signes $\int$ et sup puisque $\delta^*(v'|L^p_\Sigma) = \sup\{\int v'(x).v(x)\ \mu(dx) : v \in \mathcal{L}^p_\Sigma\}$. Pour des résultats très généraux dans le cas d'espaces "décomposables" voir Rockafellar ([40], Bourass-Valadier [10].
3) Le point de départ de Bouchitté-Valadier [9] est aussi (th. 1) une formule de commutativité de $\int$ et sup, mais dans le cas d'espaces "non décomposables".

Corollaire 2. Pour tous $v_0 \in \mathcal{L}^p_\Sigma$ et $v' \in \mathcal{L}^q(\Omega;\mathbb{R}^d)$ on a équivalence de :
(i) v' est une normale sortante à $\mathcal{L}^p_\Sigma$ en v_0,
(ii) μ-p.p. $v'(x)$ est une normale sortante à $\Sigma(x)$ en $v_0(x)$.

Remarque. Pour $p = \infty$, au lieu de prendre $\mathcal{V}' = L^1$ on peut prendre $\mathcal{V}' = (L^\infty)'$. A ce sujet voir Rockafellar [39] et Castaing-Valadier [16] ch. VIII.

Notation. Notons $\int \Sigma\, d\mu$ l'ensemble $\{\int v d\mu : v \in \mathcal{L}^1_\Sigma\}$.
Sous les hypothèses précédentes $\int \Sigma\, d\mu$ est un convexe. Si de plus il est fermé on va voir que sa fonction d'appui, qui le caractérise, est donnée par (1').

Corollaire 3 (théorème de Strassen). Supposons Σ intégrablement bornée (i.e. $\Sigma(x) \subset \bar{B}(0,\alpha(x))$ avec $\alpha \in \mathcal{L}^1_+$). Soit $z \in \mathbb{R}^d$. On a équivalence de :
(i) $\forall z' \in \mathbb{R}^d$, $z'.z \leqslant \int \delta^*(z'|\Sigma(x))\ \mu(dx)$,
(ii) z est de la forme $\int v\, d\mu$ pour un $v \in \mathcal{L}^1_\Sigma$ (i.e. $z \in \int \Sigma\, d\mu$).

Démonstration. Sous l'hypothèse faite, L^1_Σ est faiblement compact dans $L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Par conséquent $\int \Sigma\, d\mu$ est convexe compact.
Le premier membre de (1') vaut, pour $v' \equiv z' \in \mathbb{R}^d$,

$$\delta^*(v'|L^1_\Sigma) = \sup\{\int z'.v(x)\mu(dx) : v \in \mathcal{L}^1_\Sigma\}$$

$$= \delta^*(z'|\int\Sigma d\mu).$$

D'après (1') le convexe fermé $\int \Sigma\, d\mu$ a pour fonction d'appui $z' \mapsto \int \delta^*(z'|\Sigma(x))\ \mu(dx)$. Le corollaire en résulte.

Remarques. 1) En dimension finie le résultat remonte à Kudo [30] et Richter [37]. Les articles de Aumann [3] et Debreu [20] ont marqué le début d'une étude systématique de l'intégrale multivoque.
2) En dimension infinie le théorème de Strassen a été popularisé par Meyer et généralisé par Castaing, Wegmann, König (voir références dans Valadier [47]). Divers résultats de compacité de L^1_Σ ou d'ensembles similaires (par exemple $\{v \in L^\infty_{E'_s} : v(x) \in \Sigma(x) \text{ p.p.}\}$) précèdent (Castaing [11]) ou suivent (Castaing-Valadier [15]) le théorème de Strassen. Pour le cas $\int\Sigma d\mu$ non borné voir Ioffe-Levin [28] et Castaing-Valadier ([16] coroll. VIII.39). Saint-Pierre [42] a étendu le théorème de Strassen à des fonctions sous-linéaires à valeurs dans un espace vectoriel ordonné (voir aussi Valadier [49]).
3) On peut montrer que, si L^1_Σ est borné en norme dans $L^1_{\mathbb{R}^d}$, alors Σ est intégrablement borné (Bismut [5],).

4. LE CAS DE LA DUALITE $(\mathcal{M}^b, \mathcal{C}_0)$.

Maintenant Ω est un localement compact. Une mesure de Radon positive sur Ω, μ, est donnée (dans beaucoup d'applications μ est la mesure de Lebesgue). Alors $L^1(\mu)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{M}^b$.

Notations. $\mathcal{C}_\Sigma = \{\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d) : \forall\, x,\ \varphi(x) \in \Sigma(x)\}$ est à distinguer de $\mathcal{C}_{\mu\Sigma} = \{\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d) : \mu\text{-p.p. } \varphi(x) \in \Sigma(x)\}$.

Définition. On dit que $\Gamma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^d)$ est s.c.i. en x_0 si, $\forall$ U ouvert de $\mathbb{R}^d$ rencontrant $\Gamma(x_0)$, $\exists$ V voisinage de x_0 tel que, $\forall\, x \in V$, $\Gamma(x)\cap U \neq \emptyset$.

Par conséquent Γ est s.c.i. sur Ω si, $\forall$ U ouvert, $\{x \in \Omega : \Gamma(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est ouvert.
Rappelons le célèbre

Théorème (Michael [32]). Si $\Gamma \to cf(\mathbb{R}^d)$ est s.c.i. elle admet une section continue. De plus $\forall x \in \Omega$, $\forall z \in \Gamma(x)$, il existe φ section continue de Γ telle que $\varphi(x) = z$.

On peut déduire la deuxième affirmation de la première en utilisant le lemme suivant que nous utiliserons à plusieurs reprises (il est énoncé dans Michael [32] exemple 1.3* p. 362).

Lemme 4. Soit $\Gamma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^d)$ une multifonction sci et soit F un fermé de Ω, $\varphi : F \to \mathbb{R}^d$ continue telle que $\forall x \in F$, $\varphi(x) \in \Gamma(x)$. Alors la multifonction Γ' définie par $\Gamma'(x) = \begin{cases} \{\varphi(x)\} & \text{si } x \in F \\ \Gamma(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus F \end{cases}$ est sci.

Démonstration. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ on a

$$\{x \in \Omega : \Gamma'(x) \cap U \neq \emptyset\} = \{x \in \Omega : \Gamma(x) \cap U \neq \emptyset\} \setminus \{x \in F : \varphi(x) \notin U\}.$$

Le dernier ensemble étant un fermé le deuxième membre est un ouvert de Ω.

Théorème 5 (Rockafellar). Si $\Gamma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^d)$ est sci avec $\mathcal{C}_\Gamma \neq \emptyset$ on a : $\forall \lambda \in \mathcal{M}^b(\Omega;\mathbb{R}^d)$,

$$\delta^*(\lambda|\mathcal{C}_\Gamma) = \int \delta^*\left(\frac{d\lambda}{d\theta}(x) \mid \Gamma(x)\right)\theta(dx) \tag{1"}$$

où θ est une quelconque mesure positive dominant λ ($\theta = |\lambda|$ est un choix possible). Si $\lambda = v'.\mu$ avec $v' \in L^1(\Omega,\mu;\mathbb{R}^d)$ on a

$$\delta^*(v'|\mathcal{C}_\Gamma) = \int \delta^*(v'(x)|\Gamma(x))\,\mu(dx).$$

Ce résultat résulte de (1') et du fait que $\mathcal{C}_\Gamma$ est dense dans $L^1_\Gamma(|\lambda|)$. Au cours de sa démonstration Rockafellar [39] montre un résultat de densité faible. Nous allons montrer que la densité a lieu pour la norme L^1, ce qui apporte une toute petite précision. De plus, dans [39], Ω est compact.

__Proposition__ 6. __Soit__ θ __une mesure de Radon positive bornée sur__ Ω. __Soit__ $\Gamma : \Omega \to \mathrm{cf}(\mathbb{R}^d)$ __sci avec__ $\mathcal{C}_\Gamma \neq \emptyset$. __Alors__ $L^1\text{-adh}\ \mathcal{C}_\Gamma = L^1_\Gamma(\theta)$.
(pour être tout à fait rigoureux il faudrait, dans l'égalité précédente, prendre l'image de $\mathcal{C}_\Gamma$ par la surjection canonique de $\mathcal{L}^1$ sur L^1 qui d'ailleurs, lorsque le support de θ est Ω, est injective sur $\mathcal{C}_0$).

__Démonstration__. On a $\mathcal{C}_\Gamma \subset \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{L}^1(\theta)$. Soit $u \in \mathcal{L}^1_\Gamma$ et $\epsilon > 0$. Quitte à modifier u sur un négligeable, on peut supposer $\forall\, x,\ u(x) \in \Gamma(x)$. Il existe $\alpha : \Omega \to [0,\infty]$ sci est intégrable telle que $\forall\, x,\ |u(x)| \leqslant \alpha(x)$. Soit $\varphi_0 \in \mathcal{C}_\Gamma$. Quitte à rajouter $1 + \|\varphi_0\|$ à $\alpha(x)$, on peut supposer $\forall\, x$, $|u(x)| < \alpha(x)$ et $|\varphi_0(x)| < \alpha(x)$. Il existe un compact K tel que $u_{|K}$ soit continue et que $\int_{\Omega\setminus K} \alpha d\theta \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

Posons $\Gamma'(x) = \begin{cases} \overline{\{u(x)\}} \text{ si } x \in K \\ \overline{\Gamma(x) \cap B(0,\alpha(x)} \text{ si } x \in \Omega\setminus K. \end{cases}$

On a $\forall\, x$, $\Gamma'(x) \neq \emptyset$ et Γ' est sci d'après le lemme 4 et le lemme 7 ci-après. Soit U un ouvert relativement compact contenant K. Posons

$$\Gamma''(x) = \begin{cases} \Gamma'(x) \text{ si } x \in U \\ \{\varphi_0(x)\} \text{ si } x \in \Omega\setminus U. \end{cases}$$

Alors comme $\varphi_0(x) \in \Gamma'(x)$ sur $\Omega\setminus K$, donc sur $\Omega\setminus U$, Γ'' est encore sci (lemme 4) et admet, d'après le théorème de Michael, une section continue φ. Comme φ coïncide avec φ_0 hors de U et que $\Gamma''(x) \subset \Gamma(x)$, on a $\varphi \in \mathcal{C}_\Gamma$. De plus φ coïncide avec u sur K. D'où

$$\begin{aligned} \|u-\varphi\|_{L^1} &= \int_{\Omega\setminus K} |u(x)-\varphi(x)|\ \theta(dx) \\ &\leqslant 2\int_{\Omega\setminus K} \alpha\ d\theta \leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

Lemme 7. Soit $\Gamma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^d)$ une multifonction sci et soit $\alpha : \Omega \to]0,\infty]$ sci telle que

$$\forall\, x,\ \Gamma(x) \cap B(0,\alpha(x)) \neq \emptyset.$$

Alors $x \mapsto \overline{\Gamma(x)\cap B(0,\alpha(x))}$ est sci.

Remarque. Ce lemme s'étend au cas où le centre de la boule est fonction continue de x (cf. Castaing [14]). Il existe dans la littérature bien d'autres résultats sur l'intersection de deux multifonctions s.c.i. : par exemple Aubin-Ekeland ([2] th. 16 p. 115), Moreau [34].

Démonstration. Notons $\Gamma'(x) = \Gamma(x)\cap B(0,\alpha(x))$. Soit U un ouvert rencontrant $\Gamma'(x)$ et $y \in \Gamma'(x)\cap U$. Alors, comme α est sci, il existe $\epsilon > 0$ et V voisinage de x tels que

$$x' \in V \Rightarrow B(0,\alpha(x)) \supset B(y,\epsilon).$$

Comme Γ est sci il existe W voisinage de x tel que $W \subset V$ et $x' \in W \Rightarrow \Gamma(x')\cap U\cap B(y,\epsilon) \neq \emptyset$. Par suite $x' \in W \Rightarrow \Gamma'(x')\cap U \neq \emptyset$, d'où le résultat.

Corollaire 8 (Rockafellar [39] coroll. 6.A). Sous les hypothèses du théorème 5, si $\lambda \in \mathcal{M}^b$ et $\varphi_0 \in \mathcal{C}_\Gamma$, on a équivalence de :

(i) λ est une normale sortante à $\mathcal{C}_\Gamma$ en φ_0,

(ii) θ-p.p. $\dfrac{d\lambda}{d\theta}(x)$ est une normale sortante à $\Gamma(x)$ en $\varphi_0(x)$.

Corollaire 9. Sous les hypothèses du théorème 5

$$\lambda \mapsto \int \delta^*\left(\frac{d\lambda}{d\theta}(x) \;\middle|\; \Gamma(x)\right)\theta(dx)$$

est $\sigma(\mathcal{M}^b,\mathcal{C}_0)$ s.c.i.

<u>Remarques</u> 1) L'application $\lambda \mapsto \delta^*\left(\frac{d\lambda}{d|\lambda|}(.)\ |\ \Gamma(.)\right)|\lambda|$ à valeurs dans les mesures réelles est appelée fonction de mesures par Temam [44], notion remontant à Goffman-Serrin [25].
2) Le coroll. 9 est établi beaucoup plus directement par Reshetnyak [36], du moins lorsque $f(x,z) = \delta^*(z|\Gamma(x))$ est continue sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$ et vérifie $|f(x,z)| \leqslant k|z|$.
Giaquinta - Modica - Souček [24] et Dal Maso [17] utilisent le résultat de Reshetnyak pour établir la semi-continuité inférieure d'un prolongement aux mesures d'une fonctionnelle intégrale sur L^1.
3) On peut étendre le résultat de Reshetnyak et retrouver notre coroll. 9, du moins pour Ω localement compact métrisable et σ-compact, de la façon suivante. D'après Michael ([32] lemme 5.2) il existe une suite (φ_n) de sections continues de Γ dense au sens suivant :

$$\forall\, x,\ (\varphi_n(x)) \text{ est dense dans } \Gamma(x).$$

Grâce à la σ-compacité il n'est pas difficile d'en déduire une suite dense (ψ_n) de sections continues tendant vers 0 à l'infini. Posant alors, comme de Blasi ([18] th. 3.1), $\Gamma_n(x) = \mathrm{co}\{\psi_0(x),\dots,\psi_n(x)\}$, le théorème de Reshetnyak donne la sci de

$$\lambda \mapsto \int \delta^*\left(\frac{d\lambda}{d\theta}(x)\ |\ \Gamma_n(x)\right)\theta(dx)$$

Le résultat avec Γ s'en déduit par convergence monotone.

<u>Commentaires</u> sur d'autres dualités possibles.
1) La dualité $(\mathcal{M},\mathcal{C}_c)$ entre les mesures de Radon et les fonctions continues à support compact donne des résultats similaires. Le sous-espace ad hoc de $\mathcal{M}$ est alors $L^1_{loc}(\mu)$. Dans Bouchitté-Valadier [9] les deux variantes sont traitées.
2) On pourrait aussi envisager la dualité entre les mesures à supports compacts et les fonctions continues.
3) Dans [51] le second auteur a étudié, selon une suggestion de J.J. Moreau, un analogue de (1) dans le cas où $\Omega = [0,1]$, la multifonction est à rétraction bornée et continue à droite. On prend pour $\mathcal{V}$ l'espace des fonctions

VB continues à droite et pour $\mathcal{V}'$ l'espace des mesures sur $[0,1]$. Tout repose sur un résultat de densité analogue à la prop. 6.

5. REGULARISEE s.c.i. ESSENTIELLE

Soit Σ une multifonction de Ω dans cf $(\mathbb{R}^d)$. Rappelons qu'on distingue $\mathcal{C}_\Sigma$ et $\mathcal{C}_{\mu\Sigma}$ (cf. §4). Un des buts du présent paragraphe est de montrer qu'il existe $\Gamma : \Omega \to \mathrm{cf}(\mathbb{R}^d)$ s.c.i. telle que $\mathcal{C}_\Gamma = \mathcal{C}_{\mu\Sigma}$.

5.1. $\mathcal{C}$-stabilité

Définition. Soit $\Phi \subset \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$. On dit que Φ est $\mathcal{C}_c$-stable si $\forall\, \alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathcal{C}(\Omega;[0,1])$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ à supports compacts et, $\forall\, x$,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, \varphi_0,\dots,\varphi_n \in \Phi, \text{ la fonction } \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i \text{ appartient à } \Phi.$$

Variantes. Si Ω est une variété $\mathcal{C}^\infty$ (par exemple un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ou la frontière ∂U d'un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{N+1}$), on peut définir la $\mathcal{C}_c^\infty$-stabilité. Si Ω est métrique, on peut parler de Lip-stabilité. Dans le premier cas on prend une partition de l'unité $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ à supports compacts, dans le deuxième on prend $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ lipschitziennes.

Proposition 10. Soit $\Phi \subset \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$ non vide. On suppose Φ $\mathcal{C}_c$-stable (variantes : si Ω est une variété $\mathcal{C}^\infty$, on suppose Φ C_c^∞-stable ; si Ω est un compact métrique, on suppose Φ Lip-stable). Alors, si $\Gamma(x) = \mathrm{adh}\{\varphi(x) : \varphi \in \Phi\}$, on a unif-adh Φ = s-adh $\Phi = \mathcal{C}_\Gamma$. De plus Γ est s.c.i. à valeurs convexes fermées non vides.

Démonstration. Les propriétés de Γ sont immédiates. Comme $\mathcal{C}_\Gamma$ est simplement fermé et que $\Phi \subset \mathcal{C}_\Gamma$, on a unif-adh $\Phi \subset$ s-adh $\Phi \subset \mathcal{C}_\Gamma$. Reste à montrer $\mathcal{C}_\Gamma \subset$ unif-adh Φ.

1) Traitons d'abord le cas Ω localement compact, Φ $\mathcal{C}_c$-stable.
Soit $\psi \in \mathcal{C}_\Gamma$ et $\epsilon > 0$. Comme ψ et φ_0 tendent vers 0 à l'infini, il existe un compact K tel qu'en dehors de K, $|\psi(x)-\varphi_0(x)| < \epsilon$. Pour chaque $x \in K$ il existe $\varphi_x \in \Phi$ telle que $|\psi(x)-\varphi_x(x)| < \epsilon$.
Notons $U_x = \{y \in \Omega : |\psi(y)-\varphi_x(y)| < \epsilon\}$. C'est un ouvert contenant x. Il existe $x_1,\dots,x_n$ tels que $U_{x_1},\dots,U_{x_n}$ recouvrent K. Soit U_i' un ouvert relativement compact tel que $U_i' \cap K = U_{x_i} \cap K$. Il existe une partition continue de l'unité $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ telle que $\forall\, i \geq 1$, $\operatorname{supp} \alpha_i \subset U_i'$ et $\operatorname{supp} \alpha_0 \subset \Omega\setminus K$.
Comme Φ est $\mathcal{C}_c$-stable on a

$$\varphi = \alpha_0\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_{x_i} \in \Phi.$$

Comme $\forall\, i \geq 1$, $\alpha_i(y) \neq 0 \Rightarrow y \in U_{x_i}$ et $\alpha_0(y) \neq 0 \Rightarrow y \in \Omega\setminus K$ on a $\forall\, y$,

$$|\varphi(y)-\psi(y)| = \left|\alpha_0(y)\ [\varphi_0(y)-\psi(y)] + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y)\left[\varphi_{x_i}(y) - \psi(x)\right]\right| < \epsilon.$$

2) Si Ω est une variété $\mathcal{C}^\infty$ on peut comme en 1) trouver une partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ avec $\forall\, i \geq 1$, $\operatorname{supp} \alpha_i \subset U_i'$ et $\operatorname{supp} \alpha_0 \subset \Omega\setminus K$. (cf. L. Schwartz [43] ch. I. th. II).
3) Si Ω est compact métrique il existe une partition lipschitzienne de l'unité subordonnée au recouvrement $U_{x_1},\dots,U_{x_n}$ (cf. Haddad [26]).

<u>Remarque</u>. La prop. 10 est presque dans Tran cao Nguyen ([45], p. 10). Elle reste vraie avec un Banach au lieu de $\mathbb{R}^d$ ([56]).

<u>Théorème</u> 11. <u>Soit</u> $\Phi \subset \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$ <u>non vide. Pour que</u> Φ <u>soit de la forme</u> $\mathcal{C}_\Gamma$ <u>avec</u> $\Gamma : \Omega \to \mathrm{cf}(\mathbb{R}^d)$ <u>s.c.i., il faut et il suffit que</u> Φ <u>soit uniformément fermé et</u> $\mathcal{C}_c$<u>-stable</u> (variantes : si Ω est une variété $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}_c^\infty$-stable ; si Ω est compact métrique, Lip-stable). <u>Alors</u> Γ <u>est unique et</u>

$$\Gamma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \Phi\}$$

<u>Corollaire</u> 12. <u>Soit</u> $\Sigma : \Omega \to \mathrm{cf}(\mathbb{R}^d)$. <u>Alors si</u> $\mathcal{C}_{\mu\Sigma}$ <u>est</u> $\neq 0$ <u>il est de la forme</u> $\mathcal{C}_\Gamma$ <u>avec</u> $\Gamma : \Omega \to \mathrm{cf}(\mathbb{R}^d)$ <u>s.c.i. De plus</u> Γ <u>est unique et</u> $\Gamma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{C}_{\mu\Sigma}\}$.

Le corollaire est immédiat car $\mathcal{C}_{\mu\Sigma}$ est $\mathcal{C}_c$-stable et uniformément fermé.

<u>Démonstration du théorème 11</u>. Il est immédiat que $\mathcal{C}_\Gamma$ est simplement fermé, donc aussi uniformément, et $\mathcal{C}_c$-stable. Inversement si Φ est fermé et $\mathcal{C}_c$-stable on a, d'après la prop. 10, $\Phi = \mathcal{C}_\Gamma$ avec $\Gamma(x) = \mathrm{adh}\{\varphi(x) : \varphi \in \Phi\}$. L'unicité de Γ vient de $\mathcal{C}_\Gamma = \Phi$ et du fait que $\forall\, x$, $\forall\, z \in \Gamma(x)$ il existe une section continue tendant vers 0 à l'infini φ, telle que $\varphi(x) = z$. En effet, si $\varphi_0 \in \Phi$, soit U un ouvert relativement compact contenant x et soit

$$\Gamma'(x) = \begin{cases} \{z\} \text{ si } y = x \\ \Gamma(x) \text{ si } y \in U\backslash\{x\} \\ \{\varphi_0(y)\} \text{ si } y \notin U. \end{cases}$$

Alors Γ' est s.c.i. d'après le lemme 4 et il suffit de prendre pour φ une section continue de Γ'.

<u>Remarque</u>. Le théorème 11 est analogue à un célèbre théorème de Hiai-Umegaki [27] que nous allons rappeler.

<u>Définition</u>. Une partie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu;\mathbb{R}^d)$ est dite $\mathcal{F}$-<u>stable</u> si $\forall\, v_1, v_2 \in \mathcal{H}$, $\forall\, A \in \mathcal{F}$,

$$\chi_A v_1 + \chi_{\Omega\backslash A} v_2 \text{ appartient à } \mathcal{H}.$$

Théorème (Hiai-Umegaki). Soit $H \subset L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu;\mathbb{R}^d)$. Pour que H soit de la forme L^1_Σ avec Σ multifonction mesurable à valeurs fermées il faut et il suffit que H soit fermé dans L^1 (muni de la norme) et $\mathcal{F}$-stable. De plus si $H \neq \emptyset$, Σ est unique à l'égalité p.p. près et Σ est à valeurs convexes si H est convexe.

Pour faire apparaître Σ une bonne méthode consiste à dire que Σ est la borne supérieure essentielle des multifonctions singletons $x \mapsto \{u(x)\}$ $(u \in \mathcal{H})$. A ce sujet voir Valadier [52] §4.

5.2. Régularisée s.c.i. essentielle d'une multifonction

Lorsque $\Sigma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\mathcal{C}_{\mu\Sigma} \neq \emptyset$, la multifonction s.c.i. $\Gamma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^d)$ du coroll. 12 mérite d'être appelée la régularisée s.c.i. essentielle de Σ. Elle a la propriété que, si Θ est une multifonction s.c.i. sur Ω à valeurs fermées non vides telle que p.p. $\Theta(x) \subset \Sigma(x)$, alors $\forall\, x$, $\Theta(x) \subset \Gamma(x)$. En effet la multifonction $\Theta_1(x) = \overline{co}\,\Theta(x)$ est s.c.i. (Michael [32] prop. 2.6) contenue p.p. dans $\Sigma(x)$. Si $x \in \Omega$ et $z \in \Theta(x)$, on a $z \in \Theta_1(x)$ d'où il existe φ section continue de Θ_1 telle que $\varphi(x) = z$. On peut modifier φ pour qu'elle tende vers 0 à l'infini. On a alors $\varphi \in \mathcal{C}_{\mu\Sigma}$ d'où $z \in \Gamma(x)$.

Cependant on peut définir plus directement la régularisée s.c.i. essentielle en se passant de convexité et en autorisant la valeur $\emptyset$.

Théorème 13. Soit Ω un espace topologique à base dénombrable d'ouverts, Σ une multifonction de Ω dans les fermés de $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des multifonctions Θ s.c.i. à valeurs fermées (éventuellement vides) telles que $\Theta(x) \subset \Sigma(x)$ p.p. Alors $\hat{\Sigma}$ définie par $\hat{\Sigma}(x) = \mathrm{adh} \cup \{\Theta(x) : \Theta \in \mathcal{F}\}$ est la plus grande multifonction s.c.i. à valeurs fermées contenue p.p. dans $\Sigma(x)$.

Si de plus Σ est à valeurs convexes, $\hat{\Sigma}$ l'est aussi et, si Σ est à valeurs convexes avec $\mathcal{C}_{\mu\Sigma} \neq \emptyset$, alors on a $\hat{\Sigma}(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{C}_{\mu\Sigma}\}$.

Définition. $\hat{\Sigma}$ est appelée la régularisée s.c.i. essentielle de Σ.

Démonstration. Soit (U_k) une base d'ouverts de $\mathbb{R}^d$. Pour chaque k,

$$\{x : \hat{\Sigma}(x) \cap U_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{\Theta \in \mathcal{J}} \{x : \Theta(x) \cap U_k \neq \emptyset\}.$$

Comme Ω a la propriété de Lindelöf la réunion du second membre est égale à la réunion d'une sous-famille dénombrable. D'où l'existence de (Θ_n), valable pour tous les k. Posant $\Sigma_1(x) = \operatorname{adh} \bigcup_n \Theta_n(x)$, on a $\Sigma_1(x) \subset \Sigma(x)$ p.p. Montrons que $\Sigma_1(x) = \hat{\Sigma}(x)$. S'il existait $z \in \hat{\Sigma}(x) \setminus \Sigma_1(x)$ soit U_k un ouvert contenant z et ne rencontrant pas $\Sigma_1(x)$. On aurait alors

$$\hat{\Sigma}(x) \cap U_k \neq \emptyset \text{ et}$$

$$\forall\, n,\ \Theta_n(x) \cap U_k = \emptyset$$

contrairement au choix de la suite (U_k).

Les dernières affirmations résultent de l'argumentation donnée avant l'énoncé.

<u>Proposition 14</u>. <u>Soit</u> $\Sigma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^d)$.

1) <u>Supposons</u> $\mathcal{C}_{\mu\Sigma} \neq \emptyset$. <u>Notons</u>

$E(x) = \{z \in \mathbb{R}^d$: $\exists$ V <u>voisinage ouvert de</u> x <u>tel que</u> p.p. <u>sur</u> V, $z \in \Sigma(x)\}$

<u>Alors</u> $\forall\, x$, $\operatorname{int} \hat{\Sigma}(x) \subset E(x) \subset \hat{\Sigma}(x)$.

<u>En particulier en tout</u> x <u>où</u> $\operatorname{int} \hat{\Sigma}(x) \neq \emptyset$, <u>on a</u> $\hat{\Sigma}(x) = \operatorname{adh} E(x)$.

2) <u>Si</u> Σ <u>est s.c.i. de graphe fermé on a</u>

$$\hat{\Sigma}(x) = \begin{cases} \Sigma(x) \ \underline{\text{si}}\ x \in \operatorname{supp} \mu \\ \mathbb{R}^d \ \underline{\text{sinon}} \end{cases}$$

<u>Démonstration.</u> 1) a) Si $z \in \operatorname{int} \hat{\Sigma}(x)$, il existe d'après le lemme 15 ci-dessous, V voisinage de x et $\rho > 0$ tels que $\forall\, y \in V$, $\hat{\Sigma}(y) \supset \bar{B}(z,\rho)$. Comme $\Sigma(y) \supset \hat{\Sigma}(y)$ p.p., on a $z \in E(x)$.

b) Si $z \in E(x)$, soit $\varphi_0 \in \mathcal{C}_{\mu\Sigma}$, V un voisinage ouvert de x sur lequel $z \in \Sigma(y)$ p.p. Soit $\alpha : \Omega \to [0,1]$ continue, telle que $\alpha(x) = 1$, $\operatorname{supp} \alpha \subset V$. Alors $\varphi(y) = \alpha(y)z + (1-\alpha(y))\varphi_0(y)$ appartient à $\mathcal{C}_{\mu\Sigma}$ et $\varphi(x) = z$, donc $E(x) \subset \hat{\Sigma}(x)$.

2) Comme $\Sigma_1(x) = \begin{cases} \Sigma(x) \text{ si } x \in \operatorname{supp} \mu \\ \mathbb{R}^d \text{ sinon} \end{cases}$ est s.c.i., $\Sigma_1(x) \subset \hat{\Sigma}(x)$.

a) Supposons d'abord $\mathcal{C}_{\mu\Sigma} \neq 0$. Si $\varphi \in \mathcal{C}_{\mu\Sigma}$ l'ensemble $\{x : \varphi(x) \in \Sigma(x)\}$ est fermé (car Σ est de graphe fermé) donc $\{x : \varphi(x) \notin \Sigma(x)\}$ est un ouvert négligeable, donc contenu dans $\Omega\backslash\operatorname{supp} \mu$. Par conséquent sur $\operatorname{supp} \mu$, $\hat{\Sigma}(x) \subset \Sigma(x)$, donc $\forall x$, $\hat{\Sigma}(x) \subset \Sigma_1(x)$.
b) Si $\mathcal{C}_{\mu\Sigma} = \emptyset$ il suffit de travailler avec l'ouvert sur lequel $\Sigma(x) \neq \emptyset$ et de ne pas imposer aux sections continues de tendre vers 0 à l'infini.

<u>Lemme 15.</u> (Monteiro-Marques [33]). <u>Si</u> $\Gamma : \Omega \to \mathrm{cf}(\mathbb{R}^d)$ <u>est s.c.i., si</u> $\rho' > \rho > 0$ <u>et si</u> $\Gamma(x_0) \supset \bar{B}(z_0,\rho')$, <u>il existe</u> V <u>voisinage de</u> x_0 <u>tel que</u> $\forall x \in V$, $\Gamma(x) \supset \bar{B}(z_0,\rho)$.

<u>Démonstration</u> (nouvelle). On peut supposer, quitte à translater, $z_0 = 0$. Notons $\varphi(x,z) = \delta^*(z|\Gamma(x))$. D'après Berge ([4], ch. VI §3 th. 1) φ est s.c.i. (voir aussi le §7 du présent papier). Notons $M(x) = \min\{\varphi(x,z) : z \in S^{d-1}\}$. On a

$$\Gamma(x) \supset \bar{B}(0,\rho) \Leftrightarrow M(x) \geqslant \rho.$$

On a $M(x_0) \geqslant \rho'$. Enfin M est s.c.i. (Berge ibid. th. 2), donc $M(x)$ reste $\geqslant \rho$ sur un voisinage V de x_0.

<u>5.3. Exemples</u>

Les exemples 2 et 3, donnés sans démonstration, sont déjà traités dans une optique un peu différente et avec quelques variantes dans la littérature (Dal Maso [17], De Giorgi-Ambrosio-Buttazzo [21], Bouchitté [6], [7], Gavioli [23], Bouchitté-Valadier [9]).

Exemple 1. $\Omega = [0,1], \mu = dx$, $d = 1$,
$$\Sigma(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x = 0 \\ [-1,1] & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

Alors $\forall x$, $\hat{\Sigma}(x) = [-1,1]$ ceci bien que Σ soit s.c.i. (mais pas de graphe fermé (cf. le 2) de la prop. 14).

Exemple 2. Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\mu = dx$, $a \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega,dx)$, $a \geq 0$ et $\Sigma(x) = \bar{B}(0,a(x))$.
Alors $\hat{\Sigma}(x) = \bar{B}(0,\hat{a}(x))$ où $\hat{a}$ est la régularisée s.c.i. de $\tilde{a}$ définie par
$$\tilde{a}(x) = \overline{\lim_{\delta\to 0^+}} \, [\mu(B(x,\delta)]^{-1} \int_{B(x,\delta)} a(y)dy.$$

Exemple 3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\mu = dx$, $A \in \mathcal{L}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ avec $\forall x$, $|A(x)| = 1$, $\Sigma(x) = [0,A(x)]$ $(= \{rA(x) : r \in [0,1]\})$.
Soit $\tilde{A}$ définie par ses coordonnées
$$\tilde{A}_i(x) = \overline{\lim_{\delta\to 0^+}} \, [\mu(B(x,\delta)]^{-1} \int_{B(x,\delta)} A_i(y)dy,$$
et Ω' le plus grand ouvert sur lequel $\tilde{A}$ est continue.

Alors $\hat{\Sigma}(x) = \begin{cases} [0,\tilde{A}(x)] & \text{si } x \in \Omega' \\ \{0\} & \text{si } x \in \Omega\backslash\Omega' \end{cases}$.

Notons que $\forall x \in \Omega'$, $|\tilde{A}(x)| = 1$.

Exemple 4. Cet exemple illustre la variante "lipschitzienne" de la prop. 10. Il permet de traiter le problème de plasticité étudié dans Bouchitté- Suquet [8] dans le cas où la frontière $\partial\Omega$ présente des angles.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne.
On note $X(\Omega) = \{\sigma \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N) : \text{div } \sigma \in L^N(\Omega)\}$.
D'après Anzellotti ([1] sec. 1 et th. 2.4) tout $\sigma \in X(\Omega)$ admet une trace normale notée $\sigma.n$ qui appartient à $L^\infty(\partial\Omega)$.

Posons $\Phi = \{\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega) : \exists\ \sigma \in X(\Omega)$ tel que $\sigma.n = \varphi$ et $\sigma(x) \in \Sigma(x)$ p.p; sur $\Omega\}$

où $\Sigma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^N)$ est une multifonction mesurable telle que $\forall\ x \in \Omega$, $0 \in \Sigma(x)$. Alors

unif-adh Φ est de la forme $\mathcal{C}_\Gamma$ avec $\Gamma : \partial\Omega \to cf(\mathbb{R})$ s.c.i.

<u>Justification.</u> D'après la prop. 10, il suffit de montrer que Φ est Lip-stable. Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ une partition lipschitzienne de l'unité sur $\partial\Omega$ et $\varphi_1,\dots,\varphi_k \in \Phi$. Il existe un prolongement lipschitzien $\tilde{\alpha}_i$ de α_i à $\bar{\Omega}$ (cf. par exemple Ekeland-Temam [22] p. 276). On peut, quitte à prendre $(\tilde{\alpha}_i)^+$, supposer $\tilde{\alpha}_i \geqslant 0$. Posons $\beta_i = \tilde{\alpha}_i\ [\sup\ (\Sigma\ \tilde{\alpha}_j, 1)]^{-1}$. Alors β_i est lipschitzienne car l'inverse d'une fonction lipschitzienne minorée par une constante > 0 est encore lipschitzienne et le produit de deux fonctions lipschitzienne bornées ($\bar{\Omega}$ est compact) l'est aussi. De plus $0 \leqslant \Sigma\ \beta_i \leqslant 1$. Soit $\sigma_i \in X(\Omega)$ tel que $\sigma_i.n = \varphi_i$ et $\sigma_i(x) \in \Sigma(x)$ p.p.

Posons $\sigma(x) = \Sigma\ \beta_i(x)\sigma(x)$

$= \Sigma\ \beta_i(x)\sigma_i(x) + (1 - \Sigma\ \beta_i(x)).0$

On a $\sigma(x) \in \Sigma(x)$ p.p., $\sigma \in L^\infty$ et

$$\operatorname{div}(\sigma_i \beta_i) = \beta_i \operatorname{div} \sigma_i + \sigma_i.\operatorname{grad} \beta_i \in L^N(\Omega)$$

d'où $\sigma \in X(\Omega)$. Enfin $\Sigma\alpha_i\varphi_i$ est la trace normale de $\Sigma\ \beta_i\sigma_i$ (car la restriction de β_i à $\partial\Omega$ est égale à α_i), donc $\Sigma\ \alpha_i\varphi_i$ appartient à Φ ce qui prouve que Φ est Lip-stable.

<u>6. REGULARISATION S.C.I. DE FONCTIONNELLES</u>

Avant de revenir au cas sous-linéaire, nous allons présenter le problème général tel qu'il est étudié dans [6], [9].

Soit Ω un localement compact (dans [6], [9] Ω est supposé à base dénombrable d'ouverts) μ une mesure de Radon positive sur Ω. On se donne un intégrande convexe normal $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ (i.e. f est mesurable sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$ et $\forall\ x$, $f(x,.)$ est convexe s.c.i.). Pour tout $v \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu;\mathbb{R}^d)$ on note $I_f(v) = \int_\Omega f(x,v(x))\ \mu(dx)$ (avec a priori la convention que $+\infty$ l'emporte sur $-\infty$). On fera les hypothèses

(H1) $\exists\, v_0 \in \mathcal{L}^1$ telle que $I_f(v_0) < \infty$
(H2) $\exists\, \varphi_0 \in \mathcal{C}_0$ telle que $I_{f^*}(\varphi_0) < \infty$.

Soit $F : \mathcal{M}^b(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$F(\lambda) = \begin{cases} I_f\left(\dfrac{d\lambda}{d\mu}\right) & \text{si } \lambda \ll \mu \\ +\infty \text{ sinon} & \end{cases}$$

Autrement dit, en identifiant L^1 à un sous-espace de $\mathcal{M}^b$, F est la fonction sur $\mathcal{M}^b$ ayant même épigraphe que I_f. En général I_f n'est pas $\sigma(L^1,\mathcal{C}_0)$ s.c.i. L'étude de conditions suffisantes (ou de CNS) assurant la semi-continuité inférieure a débuté avec Rockafellar [39], Olech [35] et Sainte-Beuve [41]. L'étude de la régularisée s.c.i. de F a suivi : Valadier [50] [53] (le cas particulier où $f(x,.)$ est une indicatrice, qui conduit à caractériser la $\sigma(L^1,\mathcal{C}_0)$ ou la $\sigma(\mathcal{M}^b,\mathcal{C}_0)$ adhérence de L^1_Σ, était une première étape dans [53], mieux formulé dans [54]. Pour quelques relations avec des propriétés de semi-continuité voir [50] pp. 24-27). Plus récemment le problème a été repris par Valadier [54] [55], Bouchitté [6] et Bouchitté-Valadier [9] (les démonstrations de [9] sont celles qui nous satisfont le plus) étendant ainsi les résultats de Temam [44] au cas où f dépend de x. Pour les différentes motivations, notamment la Plasticité, on pourra se reporter aux introductions des articles cités, en particulier [6], [9], [55]. On notera que $\overline{I_f}$ est la restriction de $\overline{F}$ à L^1, si bien que les problèmes évoqués ci-dessus se ramènent au calcul de

$$\overline{F}(\lambda) = \varliminf_{\substack{\nu\to\lambda \\ \nu\ll\mu}} I_f\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right).$$

Cette formule, que l'on peut d'ailleurs réécrire sous forme séquentielle ([7] ch. 3), n'est effectivement utilisable que sur des exemples très simples. Une deuxième expression pour $\overline{F}$ est obtenue de la façon suivante. Sous l'hypothèse (H2) F admet une minorante affine $\sigma(\mathcal{M}^b,\mathcal{C}_0)$-continue donc $\overline{F} = F^{**}$. On a d'abord

$$\begin{aligned} F^*(\varphi) &= \sup\{\langle\varphi,\lambda\rangle - F(\lambda) : \lambda \in \mathcal{M}^b\} \\ &= \sup\{\langle\varphi,v\rangle - I_f(v) : v \in L^1(\mu)\} \\ &= I_{f^*}(\varphi) \end{aligned}$$

(grâce au célèbre théorème de Rockafellar [38] invoqué dans la remarque 1 du th. 1) qui s'applique sous (H1)). D'où

$$\bar{F}(\lambda) = \sup\{\langle\varphi,\lambda\rangle - I_{f^*}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_0\}.$$

Cette formule est le point de départ de Bouchitté-Valadier [9] (en fait elle reste valable si f n'est pas convexe dès lors que μ est sans atomes, cf. [9] remarque 2 après le th. 4').

Revenons maintenant au cas sous-linéaire. On a $f(x,z) = \delta^*(z|\Sigma(x))$ avec $\Sigma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^d)$ mesurable. Dans ce cas on obtient la représentation intégrale de $\bar{F}$ (donc aussi de $\bar{I}_f$) en fonction de la régularisée s.c.i. essentielle $\hat{\Sigma}$ de Σ définie dans le § 5.2.

<u>Proposition</u> 16. <u>Soit</u> $\Sigma : \Omega \to cf(\mathbb{R}^d)$ <u>mesurable telle que</u> $\mathcal{C}_{\mu\Sigma} \neq \emptyset$, $f(x,z) = \delta^*(z|\Sigma(x))$. <u>Alors</u>

$$\bar{F}(\lambda) = \int \delta^* \left(\frac{d\lambda}{d|\lambda|}(x) \;\Big|\; \hat{\Sigma}(x)\right) |\lambda|(dx).$$

<u>Démonstration</u>. (H1) est vérifiée avec $v_0 \equiv 0$ et (H2) équivaut à $\mathcal{C}_{\mu\Sigma} \neq \emptyset$. On a

$$\begin{aligned} F^*(\varphi) = I_{f^*}(\varphi) &= \int \delta(\varphi(x)|\Sigma(x))\, \mu(dx) \\ &= \delta(\varphi|\mathcal{C}_{\mu\Sigma}). \end{aligned}$$

D'après le corollaire 12 et le th. 13

$$\mathcal{C}_{\mu\Sigma} = \mathcal{C}_\Gamma \text{ et } \Gamma = \hat{\Sigma}.$$

Finalement

$$\bar{F}(\lambda) = \sup\{\langle\lambda,\varphi\rangle - I_{f^*}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_0\}$$

$$= \sup\{\langle\lambda,\varphi\rangle : \varphi \in \mathcal{C}_{\hat{\Sigma}}\}$$

On conclut grâce au th. 5.

Remarque. 1) Si Σ est s.c.i., la fonction

$$G : \lambda \mapsto \int \delta^*\left(\frac{d\lambda}{d|\lambda|}(x) \mid \Sigma(x)\right) |\lambda|(dx)$$

est $\sigma(\mathcal{M}^b, \mathcal{C}_0)$ s.c.i. (cf. coroll. 9) mais peut ne pas coïncider avec la régularisée s.c.i. de sa restriction à L^1. En effet avec Σ de l'exemple 1 du §5.3. on a : $G(\delta_0) = 0$ et $\bar{F}(\delta_0) = 1$. Ce phénomène est le même que celui de l'exemple donné dans Bouchitté-Valadier ([9] remarque 3 après le th. 8).

2) Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on peut être amené à calculer la régularisée $\sigma(\mathcal{M}^b, \mathcal{C}_c^p)$ s.c.i. de F (lorsque $p = \infty$, c'est la topologie induite par la topologie faible de l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions). Notons $\mathcal{C}^p_{\mu\Sigma}$ l'ensemble $\{\varphi \in \mathcal{C}_c^p(\Omega;\mathbb{R}^d) : \mu\text{-p.p. } \varphi(x) \in \Sigma(x)\}$ et supposons $\mathcal{C}^p_{\mu\Sigma} \neq \emptyset$. Alors on a

$$\bar{F}(\lambda) = \sup\{\langle\lambda,\varphi\rangle : \varphi \subset \mathcal{C}^p_{\mu\Sigma}\}$$

Reprenant la prop. 10 avec une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^p$ (ou même $\mathcal{C}^\infty$) on obtient unif-adh $\mathcal{C}^p_{\mu\Sigma} = \mathcal{C}_{\Gamma_p}$ où Γ_p est s.c.i. et définie par $\Gamma_p(x) = \text{adh}\{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{C}^p_{\mu\Sigma}\}$.
Reprenant le théorème 5 on a alors

$$\bar{F}(\lambda) = \int \delta^*\left(\frac{d\lambda}{d|\lambda|}(x) \mid \Gamma_p(x)\right) |\lambda|(dx).$$

Dans le cas général on a bien sûr $\Gamma_0(x) = \hat{\Sigma}(x) \supset \Gamma_1(x) \supset \dots \supset \Gamma_p(x)$ avec possibilité d'inclusions strictes (par exemple avec $\Omega =]0,1[$ et $\Sigma(x) = [0,A(x)]$ où $|A(x)| = 1$, on obtient, si A est continue, $\Gamma_0(x) = [0,A(x)]$, alors que

$$\Gamma_1(x) = \begin{cases} [0,A(x)] & \text{si } x \in \Omega' \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

où Ω' est le plus grand ouvert sur lequel A est $\mathcal{C}^1$).

Cependant en x tel que int $\hat{\Sigma}(x) \neq \emptyset$ (ce qui a lieu si int $E(x) \neq \emptyset$; cf. prop. 14), en reprenant la partie 1) a) de la démonstration de la prop. 14 on obtient, sous l'hypothèse $\mathcal{C}^p_{\mu\Sigma} \neq \emptyset$, l'égalité $\Gamma_p(x) = \hat{\Sigma}(x) = \text{adh } E(x)$.

Finalement, si $\forall x$, int $\hat{\Sigma}(x) \neq \emptyset$, les régularisées $\sigma(\mathcal{K}^b, \mathcal{C}_0)$ et $\sigma(\mathcal{K}^b, \mathcal{C}_c^p)$ s.c.i. de F coïncident.

7. CARACTERISATION DE LA SEMI-CONTINUITE INFERIEURE D'UNE MULTIFONCTION

Théorème 17. Soit Ω un espace topologique. Soit $\Gamma : \Omega \to \mathrm{cf}(\mathbb{R}^d)$. On a équivalence de

(i) Γ est s.c.i. sur Ω

(ii) $(x,z') \mapsto \delta^*(z'|\Gamma(x))$ est s.c.i. sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$.

Référence. Bouchitté-Valadier [9] Appendice 2.

Exceptionnellement nous allons donner une extension à la dimension infinie.

Théorème 18. Soit E un Banach séparable (ou réflexif), Ω un espace topologique dans lequel chaque point a un système fondamental dénombrable de voisinages et $\Gamma : \Omega \to \mathrm{cf}(E)$. On a équivalence de

(i) Γ est s.c.i. sur Ω,

(ii) $(x,z') \mapsto \delta^*(z'|\Gamma(x))$ est séquentiellement s.c.i. sur $\Omega \times E'_\sigma$ (variante sur $\Omega \times E'_c$) où E'_σ (resp. E'_c) désigne E' muni de $\sigma(E',E)$ (resp. de la topologie de la convergence compacte).

Remarques 1) Une fonction réelle φ sur un espace topologique est séquentiellement s.c.i. si $u_n \to u \Rightarrow \varphi(u) \leq \underline{\lim}\, \varphi(u_n)$. Cela équivaut à "$u_n \to u$ et $\forall n$, $\varphi_n(u_n) \leq r \Rightarrow \varphi(u) \leq r$" et aussi à "l'épigraphe de φ est séquentiellement fermé".

2) Dans le (ii) il est indifférent de prendre E'_σ ou E'_c car, si $z'_n \to z'$ dans E'_σ, la suite (z'_n) est bornée donc converge aussi dans E'_c.

Démonstration. Notons $\varphi(x,z') = \delta^*(z'|\Gamma(x))$.

1) Supposons Γ s.c.i. Soit $(x_n,z'_n) \to (x,z')$ dans $\Omega \times E'_\sigma$, $r \in \mathbb{R}$ et supposons que $\forall n$, $\varphi(x_n,z'_n) \leq r$. Montrons $\varphi(x,z') \leq r$. Pour tout $z \in \Gamma(x)$ il existe $z_n \in \Gamma(x_n)$ tel que $z_n \to z$. En effet soit $V_k = B(z,\frac{1}{k})$. Comme $\Gamma(x) \cap V_k \neq \emptyset$ et que Γ est s.c.i., $\exists N_k$ tel que $\forall n \geq N_k$, $\Gamma(x_n) \cap V_k \neq \emptyset$. On peut supposer la suite (N_k) strictement croissante. Alors on prend $z_n \in \Gamma(x_n) \cap V_k$ si $N_k \leq n < N_{k-1}$ (et $z_n \in \Gamma(x_n)$ si $n < N_1$).

Comme (z'_n) converge aussi pour la topologie de la convergence compacte on a

$$\langle z,z'\rangle = \lim \langle z_n,z'_n\rangle \leq r.$$

Comme cela est vrai $\forall z \in \Gamma(x)$, on a $\varphi(x,z') \leq r$.

2) Supposons φ séquentiellement s.c.i. Procédons par l'absurde. Soit $x \in \Omega$ et supposons que Γ n'est pas s.c.i. en x. Il existe U ouvert de E tel que $\Gamma(x) \cap U \neq \emptyset$ mais tel que $\forall V$ voisinage de x, $\exists y \in V$ avec $\Gamma(y) \cap U = \emptyset$. Par suite $\exists x_n \to x$ avec $\Gamma(x_n) \cap U = \emptyset$. Quitte à translater on peut supposer $0 \in \Gamma(x) \cap U$. On peut aussi supposer que U est une boule $B(0,\epsilon)$. Grâce à Hahn-Banach il existe $z'_n \in E'$, $z'_n \neq 0$ tel que

$$\varphi(x_n,z'_n) \leq \inf \{\langle z,z'_n\rangle : z \in U\}$$

On peut supposer $\|z'_n\| = 1$, d'où $\varphi(x_n,z'_n) \leq -\epsilon$. Comme E a été supposé séparable ou réflexif il existe (z'_{n_k}) faiblement convergente vers $z' \in E'$. Alors

$\varphi(x',z') \leq -\epsilon$ ce qui est contradictoire avec $0 \in \Gamma(x)$.

<u>Remarques</u> 1) Pour le cas Γ "majorée" voir Castaing Valadier ([16] II. 21, le résultat date de 1970 : [46] lemme I.25).

2) Pour un Banach quelconque on a $(x,z') \mapsto \delta^*(z'|\Gamma(x))$ s.c.i.sur $\Omega \times E'_c \Rightarrow \Gamma$ s.c.i. Il suffit de reprendre le 2) de la démonstration avec des suites généralisées. Cela semble très satisfaisant mais la réciproque ne tient pas : si on essaie de réécrire le 1) avec des suites généralisées on bute sur le fait que la forme bilinéaire $(z,z') \mapsto \langle z',z\rangle$ n'est pas continue sur $E \times E'_c$ (du moins en dimension infinie).

3) Si $\Gamma(x)$ est un cône convexe fermé, $\delta^*(.|\Gamma(x))$ est l'indicatrice du cône polaire $\Gamma(x)^\circ$. Dire que $(x,z') \mapsto \delta(z'|\Gamma(x)^\circ)$ est (séquentiellement) s.c.i. équivaut à dire que $x \mapsto \Gamma(x)^\circ$ est de graphe (séquentiellement) fermé. On généralise ainsi la prop. 18 de Aubin-Ekeland ([2] ch. 3 sec. 1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANZELLOTTI, G. On the extremal stress and displacement in Hencky plasticity. Duke Math. J. 51 (1984) 133-147.

[2] AUBIN, J.P. et EKELAND, I., "Applied nonlinear analysis", John Wiley, 1984.

[3] AUMANN, J.R., Integrals of set-valued functions. J. Math. An. Appl. 12 (1965) 1-12.

[4] BERGE, C. "Espaces topologiques. Fonctions multivoques". Dunod, 1966.

[5] BISMUT, J.M. Intégrales convexes et probabilités. J. Math. An. Appl. 42 (1973) 639-673.

[6] BOUCHITTE, G., Représentation intégrale de fonctionnelles convexes sur un espace de mesures, I. Publication AVAMAC, Université de Perpignan, 1986, n° 2.

[7] BOUCHITTE, G., Calcul des variations en cadre non réflexif. Représentation et relaxation de fonctionnelles intégrales sur un espace de mesures. Applications en Plasticité et homogénéisation. Thèse de doctorat d'Etat, Perpignan 1987.

[8] BOUCHITTE, G. et SUQUET, P. Charges limites, plasticité et homogénéisation : le cas d'un bord chargé. C.R. Acad. Sci. Paris 305 (1987) 441-444.

[9] BOUCHITTE, G. et VALADIER, M. Integral representation of convex functionals on a space of measures. A paraître dans J. of Funct. An.

[10] BOURASS, A.. et VALADIER, M. Condition de croissance associée à l'inclusion des sections (d'après A. Fougère et R. Vaudène). Publications AVAMAC, Université de Perpignan, 1984, n° 3.

[11] CASTAING, C. Sur un théorème de représentation intégrale lié à la comparaison des mesures. C. R. Acad. Sci. Paris. 264 (1967) 1059-1062.

[12] CASTAING, C. Proximité et mesurabilité. Colloque sur la théorie mathématique du Contrôle Optimal. Bruxelles, 1969. pp. 25-33.

[13] CASTAING, C. Intégrales convexes duales. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1976, n° 6.

[14] CASTAING, C. Quelques résultats de convergence dans les inclusions différentielles. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1987, à paraître.

[15] CASTAING, C. et VALADIER, M. Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes. Revue Info. Rech. Op. 16 (1969) 3-16.

[16] CASTAING, C. et VALADIER, M. Convex analysis and measurable multifunctions. Lecture Notes n° 580. Springer Verlag, 1987.

[17] DAL MASO, G. Integral representation on BV(Ω) of Γ-limit of variational integrals. Manuscripta Math. 30 (1980) 387-416.

[18] DE BLASI, F. S. Characterizations of certain class of semi-continuous multifunctions by continuous approximations. J. Math. An. Appl. 101 (1985) 1-18.

[19] DEBORDES, O. "Duality : some results in asymptotical elastoplasticity". Convex Analysis and its applications. Lecture Notes in Econom. and Math. Syst. n° 144 (éd. Auslender) Springer-Verlag 1977 pp. 100-114.

[20] DEBREU, G. Integration of correspondences. Fifth symposium on Probability and Statistics, Berkeley, 1966, Vol. II, part. I (éd. par Le Cam et Neyman) pp. 351-372.

[21] DE GIORGI, E., AMBROSIO, L. et BUTTAZZO, G. Integral representation and relaxation for functionals defined on measure. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1986.

[22] EKELAND, I et TEMAM, R. "Analyse Convexe et Problèmes variationnels." Dunod Gauthier-Villars, 1974.

[23] GAVIOLI, A. Necessary and sufficient conditions for the lower semicontinuity of certain integral functionals. Modena, Preprint.

[24] GIAQUINTA, M. MODICA, G. et SOUČEK, J. Functionals with linear growth in the calculus of variations. Comm. Math. Univ. Carolinae 20, (1979) I pp. 143-156, II pp. 157-172.

[25] GOFFMAN, C. et SERRIN, J. Sublinear functions of measures and variational integrals. Duke Math. J. 31 (1964) 159-178.

[26] HADDAD, J. Topological properties of the sets of solutions for functional differential inclusions. Nonlinear analysis. Th. Meth. and Appl. 5 (1981), 1349-1366.

[27] HIAI, F. et UMEGAKI, H. Integrals conditional expectations and martingales of multivalued functions. J. Multivariate An. 7 (1977) 149-182.

[28] IOFFE, A.D. et LEVIN, V.L. Subdifferential of convex functions. Trudy Mosk. Mat. Ob. 26 (1972), 3-73.

[29] IOFFE A.D. et TIKHOMIROV, V.M. Dualité des fonctions convexes et problèmes d'extremum. Uspehi. Math. Nauk. 23 (1968) 51-116.

[30] KUDO, H. Dependent experiments and sufficient statistics. Nat. Sci. Rept. Ochanomizu Univ. Tokyo 4 (1954) 151-163.

[31] LAGHDIR, M. Solutions des équations régissant le mouvement de particules en contact avec frottement sec et recevant des impulsions. Thèse. Montpellier, 1987.

[32] MICHAEL, E. Continuous selections I. Annals of Math. 63 (1956) 361-382.

[33] MONTEIRO MARQUES, M.D.P. Rafle par un convexe semi-continu inférieurement d'intérieur non vide en dimension finie. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1984, n° 6, 24 pages.

[34] MOREAU J.J. Intersection of moving convex sets in a normed space. Math. Scand. 36 (1975), 159-173.

[35] OLECH, C. The characterization of the weak* closure of certain sets of integrable functions. SIAM J. Control. 12-2 (1974) 311-318.

[36] RESHETNYAK, Y.G. Weak convergence of completely additive vector measures on a set. Sibirskii Mat. Zh. 9 (1968) 1386-1394.

[37] RICHTER, H. Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Masstheorie. Math. Annalen 150 (1963) 85-90 (plus correctif pp. 440 - 441).

[38] ROCKAFELLAR, R.T. Integrals which are convex functionals. Pacific J. Math. 24 (1968) 525-539.

[39] ROCKAFELLAR, R.T. Integrals which are convex functionals II. Pacific J. Math. 39 (1971) 439-469.

[40] ROCKAFELLAR, R.T. "Integral functionals, normal integrands and measurable selections", in Nonlinear operators and the calculus of variations. Lecture Notes n° 543 (éd. par Gossez, Dozo, Mawhin et Waelbroeck). Springer Verlag 1976, pp. 157-207.

[41] SAINTE-BEUVE M.-F. Some topological properties of vector measure with bounded variations and its applications. Ann. Mat. Pura Appl. 116 (1978) 317-379.

[42] SAINT-PIERRE, J. Une extension du théorème de Strassen. C. R. Acad. Sci. Paris, 279 (1974) 5-8.

[43] SCHWARTZ, L. Théorie des distributions. Herman, 1957.

[44] TEMAM, R. Problèmes mathématiques en plasticité. Gauthier-Villars, Paris, 1983.

[45] TRAN CAO NGUYEN, Decomposition of the conjugate integral functional on the space of regular measures. Preprint, Polish Academy of Sci. Institute of Sci. of Vietman, 1978. Publié dans Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1986, n° 2.

[46] VALADIER, M. Contribution à l'analyse convexe. Thèse de Doctorat d'Etat, Paris, 1970.

[47] VALADIER, M. "On the Strassen theorem", in Analyse convexe et ses applications. Lecture Notes in Economics and Math. Syst. n° 102 (éd. par J.P. Aubin) Springer Verlag, 1974, pp. 203-215.

[48] VALADIER, M. Convex integrand on souslin locally convex spaces. Pacific J. Math. 59 (1975) 267-276.

[49] VALADIER, M. "About the Strassen theorem for vector valued sublinear functions". In Intégration vectorielle et multivoque (éd. par A. Costé - distribué par Offilib) Caen (1975).

[50] VALADIER, M. Fermeture étroite et bipolaire vague. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1977, n° 6.

[51] VALADIER, M. Une propriété de l'ensemble des sélections à variation bornée d'une multi-application à rétraction bornée. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1977, 13.

[52] VALADIER, M. Sur l'espérance conditionnelle multivoque, Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier, 1978, n° 9.

[53] VALADIER, M. Closedness in the weak topology of the dual pair L^1, $\mathcal{C}$. J. Math. An. Appl. 69 (1979), 17-34.

[54] VALADIER, M. Fonctions et opérateurs sur les mesures. Formules de dualité. Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier, 1986 n° 3.

[55] VALADIER, M. Functions and operators on the space of bounded measures. Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 34 (1985-86). 353-361

[56] VALADIER, M. Quelques propriétés de l'ensemble des sections continues d'une multifonction s.c.i. Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier, 1986, n° 7.