ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

PIERRE BARAS
MICHEL PIERRE

Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones

Annales de l'I. H. P., section C, tome 2, nº 3 (1985), p. 185-212
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1985__2_3_185_0>

© Gauthier-Villars, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section C » (http://www.elsevier.com/locate/anihpc) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 2, n° 3, 1985, p. 185-212. *Analyse non linéaire*

Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones

par

Pierre BARAS
Laboratoire IMAG, B. P. 68
38042, Grenoble Cedex

et

Michel PIERRE
U. E. R. Mathématiques, B. P. 239
54506, Vandœuvre lès Nancy

RÉSUMÉ. — On donne une condition nécessaire et suffisante sur $f \in L^1_{loc}(U)$, $f \geq 0$, pour que l'équation

$$u(x) = \int_U N(x, y) j(u(y)) dy + f(x) \qquad \text{p. p.} \quad x \in U$$

ait une solution positive ; ici, j est une fonction convexe de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$ et N est un noyau positif de $L^1_{loc}(U \times U)$. Entrent dans ce cadre les équations semi-linéaires elliptiques et paraboliques non monotones avec non-linéarité convexe comme, par exemple, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = u^\gamma + g & \text{sur} \quad \Omega, \qquad g \geq 0 \quad \text{et} \quad \gamma > 1 \text{ donnés} \\ u \geq 0 \qquad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

et sa version parabolique. Les applications à ces exemples sont traitées en détail. Des conditions nécessaires en termes de $W^{2,\gamma'}$-capacité sont explicitées.

ABSTRACT. — We give a necessary and sufficient condition on $f \in L^1_{loc}(U)$, $f \geq 0$ for the existence of a nonnegative solution for the equation

$$u(x) = \int_U N(x, y) j(u(y)) dy + f(x) \qquad \text{a. e.} \quad x \in U .$$

Here j is a convex function from $[0, \infty[$ into $[0, \infty[$ and N is a nonnegative kernel of $L^1_{loc}(U \times U)$. This equation contains as a special case elliptic

and parabolic semilinear equations of nonmonotone type like, for instance

$$\begin{cases} -\Delta u = u^\gamma + g & \text{on } \Omega, \quad g \geq 0 \text{ and } \gamma > 1 \text{ given} \\ u \geq 0, \quad u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

and its parabolic version. These examples are treated in detail. Necessary conditions in terms of $W^{2,\gamma'}$-capacity are also given.

I. INTRODUCTION

On se propose d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une solution positive pour des problèmes elliptiques et paraboliques du type suivant :

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = j(u) + g & \text{sur } \Omega \\ u \geqslant 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = j(u) + g & \text{sur }]0, T[\times \Omega \\ u \geqslant 0 & \text{sur }]0, T[\times \Omega \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega \\ u(0, .) = u_0(.) \quad (\text{ou } u(0, .) = u(T, .)) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, g et u_0 sont des données positives, éventuellement des mesures de Radon, et j une fonction convexe de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$ avec $j(0) = 0$.

Ces équations ont déjà été largement étudiées dans la littérature, en particulier lorsque les données sont des fonctions L^p et lorsque $j(u)$ est une fonction puissance. On y trouve ainsi plusieurs conditions suffisantes d'existence d'au moins une solution positive et plusieurs cas de non existence. Au vu de ces résultats, il apparaît qu'il existe essentiellement deux obstacles possibles à l'existence de solutions positives.

D'abord, les données doivent être suffisamment « petites » : même si g est une fonction C^∞, le problème

$$(E_\gamma) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^\gamma + \lambda g & \text{sur } \Omega \\ u \geqslant 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $g \not\equiv 0$, $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 1$ n'a pas de solution pour λ supérieur à une certaine valeur critique.

D'autre part, il existe un seuil de régularité au-delà duquel aucune solution positive ne peut être générée. Ainsi pour le problème (E_γ), si $g \in L^p$ et si $\gamma > N/(N-2)$, il est nécessaire que $p \geqslant N(\gamma - 1)/2\gamma$. Lorsque g est une mesure de Radon bornée positive sur Ω, nous avons montré dans [*3*] qu'il était nécessaire que g ne soit pas trop « concentrée ». De manière précise, la mesure g ne doit pas charger les ensembles de $W^{2,\gamma'}$-capacité nulle où $1/\gamma + 1/\gamma' = 1$.

Nous montrons ici que (E_γ) a une solution pour tout $\lambda \leqslant 1$ *si et seulement si*

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} \forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega) \quad \text{avec} \quad -\Delta\varphi \geqslant 0 \text{ à support compact} \\ \displaystyle\int_\Omega \varphi g \leqslant \frac{\gamma - 1}{\gamma^{\gamma'}} \int_\Omega \frac{(-\Delta\varphi)^{\gamma'}}{\varphi^{\gamma'-1}}. \end{cases}$$

Cette condition un peu surprenante appelle plusieurs remarques. Elle exprime, en termes de dualité, qu'une certaine norme de g doit être suffisamment petite. L'appartenance de g à l'espace correspondant mesure exactement la régularité nécessaire pour générer une solution positive. D'autre part, la taille optimale est donnée par la constante $(\gamma - 1)/\gamma^{\gamma'}$. Nous verrons que la fonctionnelle qui apparaît ici est naturellement associée à (E_γ) : cette équation peut, en effet, être interprétée (au moins formellement) comme l'équation d'Euler d'un problème de minimisation lié à cette fonctionnelle.

Par ailleurs, (H) contient bien sûr les diverses conditions nécessaires ou suffisantes lorsque g est une fonction de L^p comme nous le vérifions plus loin. Si g est une mesure, elle implique l'existence d'une constante C telle que

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact} \int_K g \leqslant C \,.\, C_{2,\gamma'}(K)$$

où $C_{2,\gamma'}$ est la capacité associée à l'espace de Sobolev $W^{2,\gamma'}$. On retrouve que g ne doit pas être trop « concentrée », cette condition étant cependant beaucoup plus précise. Signalons qu'elle a été largement étudiée dans un cadre différent (voir [*1*] et réf.).

Il s'avère que la méthode que nous utilisons pour étudier (E_γ) est très générale et s'applique, d'une part, au cas où u^γ est remplacé par une fonction convexe $j(u)$ nulle en 0, d'autre part, aux problèmes de type (P). En effet, si on note $N(x, y)$ la fonction de Green du laplacien sur l'ouvert Ω avec conditions de Dirichlet homogènes, le problème (E) s'écrit

$$\text{(E}'\text{)} \qquad u(x) = \int_\Omega N(x, y) j(u(y)) dy + f(x)$$

où

$$f(x) = \int_\Omega \mathrm{N}(x, y) g(y) dy .$$

C'est sous cette forme que nous l'étudions.

La méthode consiste à trouver la condition sur f pour que la suite $(u_n, n \in \mathbb{N})$ donnée par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1}(x) = \int_\Omega \mathrm{N}(x, y) j(u_n(y)) dx + f(x)$$

converge.

En fait, seule la positivité de N est essentielle, elle assure la monotonie de $(u_n, n \in \mathbb{N})$. Ainsi, nous examinons plus généralement les problèmes de type (E′) où N est un noyau mesurable positif et f mesurable positive, j pouvant aussi dépendre de x. Ceci contient bien sûr le problème (P) ainsi que des variantes de (E) ou (P) où $-\Delta$ est remplacé par un opérateur elliptique très général, les conditions au bord pouvant être mixtes.

Le paragraphe suivant est consacré à la résolution de (E′) dans la généralité annoncée. Les applications à (E) et (P) suivent. Le cas des solutions périodiques en temps est traité à part : la valeur critique de γ qui apparaît alors est $\mathrm{N}/(\mathrm{N}-2)$, comme pour (E), alors que celle du problème de Cauchy (P) est $(\mathrm{N}+2)/\mathrm{N}$.

Les auteurs remercient T. Gallouët qui a lu attentivement la première version de ce papier et nous a permis d'en améliorer la rédaction en plusieurs points.

II. RÉSOLUTION DE $u = \mathrm{N}j(u) + f$

II.1. Hypothèses et résultat.

Soit (U, μ) un espace mesuré de mesure positive μ σ-finie. On désigne par $(\mathrm{K}_n)_{n>0}$ une suite croissante de parties mesurables de U telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \mu(\mathrm{K}_n) < \infty, \qquad \bigcup_{n \geqslant 0} \mathrm{K}_n = \mathrm{U} . \tag{1}$$

On munit $\mathrm{U} \times \mathrm{U}$ de la mesure produit et on note $\mathrm{L}_+(\mathrm{U})$ (resp. $\mathrm{L}_+(\mathrm{U} \times \mathrm{U})$) l'espace des fonctions mesurables de U (resp. $\mathrm{U} \times \mathrm{U}$) dans $[0, \infty]$.

On se donne maintenant :

. un noyau $\mathrm{N} \in \mathrm{L}_+(\mathrm{U} \times \mathrm{U})$

(2) . j : $\mathrm{U} \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ mesurable

telle que

(3) p. p. $x \in \mathrm{U}$, $j(x, .)$ est convexe, s. c. i., croissante et $j(x, 0) = 0$.

On rappelle que la fonction conjuguée j^* de j est définie par

$$\text{p. p. } x \in \mathrm{U} \qquad j^*(x, r) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} (r\alpha - j(x, \alpha)) .$$

On vérifie que j^* satisfait (2), (3). Pour simplifier les notations, si $u \in \mathrm{L}_+(\mathrm{U})$, on écrira

$$j(u)(x) = \begin{cases} j(x, u(x)) & \text{si} \quad u(x) < \infty \\ \lim\limits_{r \to \infty} j(x, r) & \text{si} \quad u(x) = \infty . \end{cases}$$

Étant donné $h \in \mathrm{L}_+(\mathrm{U})$, on note :

$$\mathrm{N}h(x) = \int_{\mathrm{U}} \mathrm{N}(x, y) h(y) d\mu(y) \leqslant +\infty$$

$$\overline{\mathrm{N}}h(y) = \int_{\mathrm{U}} \mathrm{N}(x, y) h(x) d\mu(x) \leqslant +\infty .$$

On écrira le plus souvent $\int f$ pour $\int_{\mathrm{U}} f(x) d\mu(x)$ et les espaces $\mathrm{L}^p(\mathrm{U})$ ou $\mathrm{L}^p(\mathrm{U} \times \mathrm{U})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ seront relatifs à la mesure μ. On note

$$\text{(4)} \quad \mathrm{L}_0^\infty(\mathrm{U}) = \{ h \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{U}),\ h \geqslant 0 \text{ p. p. et } \{ x ; h(x) > 0 \} \subset \mathrm{K}_n \text{ pour } n \text{ assez grand} \} .$$

REMARQUE 1. — Le plus souvent, U sera un espace localement compact, muni d'une suite exhaustive de compacts K_n et μ une mesure de Radon. Ainsi L_0^∞ désignera l'espace des fonctions bornées positives à support compact. Les techniques que nous utilisons ne faisant en aucun cas appel à une topologie sur U, nous avons préféré nous placer dans le cadre ci-dessus. Cette généralité n'apporte aucune difficulté supplémentaire et éclaire au contraire la démarche suivie.

Étant donné $f \in \mathrm{L}_+(\mathrm{U})$, notre but est de résoudre le problème

$$\text{(5)} \qquad u \in \mathrm{L}_+(\mathrm{U}), \qquad u = \mathrm{N}j(u) + f .$$

Commençons par faire apparaître une condition nécessaire sur f pour que (5) ait une solution. En multipliant par $h \in \mathrm{L}_0^\infty(\mathrm{U})$ et en intégrant, on obtient en supposant que $uh \in \mathrm{L}^1(\mathrm{U})$

$$\text{(6)} \quad \int fh = \int uh - h\mathrm{N}j(u) = \int uh - j(u)\overline{\mathrm{N}}h = \int \overline{\mathrm{N}}h \left(u \frac{h}{\overline{\mathrm{N}}h} - j(u) \right) \leqslant \int j^* \left(\frac{h}{\overline{\mathrm{N}}h} \right) \overline{\mathrm{N}}h .$$

On fait ainsi apparaître la condition nécessaire suivante :

$$\text{(7)} \qquad \int fh \leqslant \int j^* \left(\frac{h}{\overline{\mathrm{N}}h} \right) \overline{\mathrm{N}}h .$$

Nous allons voir que, sous des hypothèses minimales, elle est en fait suffisante.

Étant donné $C \geqslant 1$ et $h \in L_+(U)$, on note

$$F_C(h) = \begin{cases} \displaystyle\int j^*\left(C\frac{h}{\overline{N}h}\right)\overline{N}h & \text{si} \quad \frac{h}{\overline{N}h} < \infty \text{ p. p.} \quad \text{et} \quad j^*\left(C\frac{h}{\overline{N}h}\right)\overline{N}h \in L^1(U) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

avec la convention que $h(x)/\overline{N}h(x) = 0$ si $h(x) = \overline{N}h(x) = 0$. Si $C = 1$, on note $F = F_C$. On introduit alors

$$X = \{ h \in L_0^\infty(U) \,;\, F(h) < \infty \}$$
$$\hat{X} = \{ h \in L_0^\infty(U) \,;\, \exists C > 1,\ F_C(h) < \infty \}.$$

On a immédiatement $\hat{X} \subset X$.

Dans la suite, on conviendra que

$$uh(x) = 0 \quad \text{si} \quad h(x) = 0 \quad \text{et} \quad u(x) = \infty .$$

THÉORÈME 2.1. — Soit $f \in L_+(U)$. Le problème

$$u \in L_+(U), \quad u(x) = Nj(u)(x) + f(x) \quad \mu\text{-p. p.}. \tag{9}$$

$$uh \in L^1(U) \quad \forall h \in \hat{X} \tag{10}$$

a une solution si et seulement si

$$\forall h \in \hat{X}, \qquad \int fh \leqslant F(h). \tag{11}$$

REMARQUE 2. — Lorsque $\hat{X}$ est réduit à $\{ 0 \}$, l'hypothèse (11) est satisfaite pour tout $f \in L_+(U)$. Seulement dans ce cas, l'assertion (10) est vide et la solution u de (9) peut être identiquement égale à $+\infty$. Le résultat n'a d'intérêt que lorsque $\hat{X}$ n'est pas réduit à $\{ 0 \}$, hypothèse qui garantit en quelque sorte le caractère non linéaire du problème. En effet, (11) implique alors que, pour tout $f \in L_+(U)$ tel que $fh \not\equiv 0$ pour un h dans $\hat{X}$, le problème

$$u = Nj(u) + \lambda f$$

n'a pas de solution pour λ grand.

REMARQUE 3. — L'utilisation de $\hat{X}$ au lieu de X n'est pas seulement due à une difficulté technique : dans certains cas limites — par exemple lorsque j est linéaire à l'infini — il se peut que $\hat{X}$ soit réduit à $\{ 0 \}$ sans que X le soit. On peut vérifier sur des exemples qu'on n'a dans ce cas aucun contrôle sur u. Si $j(r) = r^\gamma$, $\gamma > 1$, il est clair qu'alors $X = \hat{X}$.

REMARQUE 4. — Il serait naturel de démontrer l'existence de u en étudiant les points critiques de la fonctionnelle convexe $h \mapsto F(h) - \int fh$. Formellement, si h_0 est un point critique non trivial, alors $u = j^{*\prime}\left(\frac{h_0}{\overline{N}h_0}\right)$ est solution de (9) comme on le vérifie en montrant

$$\frac{d}{dt} F(h_0+th)\,|_{t=0} = \int h\left[u - N\left(u\frac{h_0}{\overline{N}h_0} - j^*\left(\frac{h_0}{\overline{N}h_0}\right)\right)\right] = \int h\,[u - Nj(u)]\,.$$

Cette méthode donne cependant lieu à trop de difficultés techniques pour pouvoir l'utiliser comme base de démonstration. Il est, en particulier, difficile de dégager un cadre fonctionnel adéquat.

II.2. Schéma de la démonstration.

La méthode utilisée pour démontrer l'existence utilise des arguments de monotonie très élémentaires. Elle consiste à montrer que la suite $u_n \in L_+(U)$ définie pour $\lambda \in]0, 1[$ par

$$u_0 = \lambda f \tag{12}$$

$$u_{n+1} = \lambda(Nj(u_n) + f) \qquad \forall n \geqslant 0 \tag{13}$$

satisfait

$$\forall h \in \hat{X} \qquad \int u_n h \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda} F(h)\,. \tag{14}$$

Puisqu'il est immédiat par récurrence que $n \mapsto u_n$ est croissante, il en résulte que u_n croît vers u_λ solution de

$$\forall h \in \hat{X}, \qquad u_\lambda h \in L^1(U), \qquad u_\lambda = \lambda(Nj(u_\lambda) + f)\,. \tag{15}$$

On concluera alors de la manière suivante : l'équation (15) implique

$$\int u_\lambda h = \lambda \int j(u_\lambda)\overline{N}h + \lambda \int fh \qquad \forall h \in \hat{X}\,.$$

Soit $C > 1$ tel que $F_C(h) < \infty$; on a

$$\lambda \int \left(u_\lambda C \frac{h}{\overline{N}h} - j(u_\lambda)\right)\overline{N}h = (\lambda C - 1)\int u_\lambda h + \lambda \int fh\,,$$

et donc

$$\int u_\lambda h \leqslant \frac{\lambda}{\lambda C - 1} F_C(h)\,.$$

Comme par construction, $\lambda \mapsto u_\lambda$ est croissante, que $r \mapsto j(x, r)$ est

continue à gauche p. p. x, on conclut que, quand λ tend vers 1, u_λ converge vers u solution de (9), (10).

Le point crucial est donc l'estimation (14). Pour cela, on applique l'hypothèse (11) à la fonction ψ solution de

$$\psi(x) = \max\left(\frac{1}{C} j'(u_n)(x)\overline{N}\psi(x), h(x)\right) \tag{16}$$

où $h \in \hat{X}$, $1 < C < 1/\lambda$ et $F_C(h) < \infty$. Admettons pour l'instant l'existence d'un tel ψ. On a, en multipliant (13) par ψ

$$\int u_{n+1}\psi = \lambda \int j(u_n)\overline{N}\psi + \lambda \int f\psi . \tag{17}$$

Mais

$$\int f\psi \leqslant F_c(\psi) \leqslant \int j^*\left(\frac{\max\,(j'(u_n)\overline{N}\psi, Ch)}{\overline{N}\psi}\right)\overline{N}\psi$$

$$\leqslant \int \max\left(j^*(j'(u_n))\overline{N}\psi,\ j^*\left(\frac{Ch}{\overline{N}\psi}\right)\overline{N}\psi\right).$$

Comme $\psi \geqslant h$, on a $\overline{N}\psi \geqslant \overline{N}h$ et, puisque $j^*(\alpha r) \leqslant \alpha j^*(r)$ $\forall \alpha \in [0, 1]$,

$$j^*\left(\frac{Ch}{\overline{N}\psi}\right)\overline{N}\psi \leqslant j^*\left(\frac{Ch}{\overline{N}h}\right)\overline{N}h .$$

D'autre part, $j^*(j'(u_n)) = u_n j'(u_n) - j(u_n)$. Ainsi, revenant à (17), on obtient

$$\int u_{n+1}\psi \leqslant \lambda \int j(u_n)\overline{N}\psi + \lambda \int \overline{N}\psi(u_n j'(u_n) - j(u_n)) + \lambda F_C(h)$$

soit, avec (16)

$$\int u_{n+1}\psi \leqslant \lambda C \int u_n\psi + \lambda F_C(h) .$$

Puisque $u_{n+1} \geqslant u_n$ et $\psi \geqslant h$, on en déduit

$$\int u_{n+1}h \leqslant \int u_{n+1}\psi \leqslant \frac{\lambda}{1 - \lambda C} F_C(h) .$$

et donc (14) en faisant décroître C vers 1.

La démonstration consiste uniquement à justifier tout ceci. Les difficultés sont de deux ordres.

1) Il n'est pas clair que $u_n < \infty$ sur un ensemble de mesure non nulle ; ainsi on ne sait même pas si $u_0 = \lambda f$ est tel que $j(u_0) < \infty$ p. p. Pour contourner cette difficulté et pallier le manque de régularité de j, nous approcherons $j(u_n)$, formellement égal à $u_n j'(u_n) - j^*(j'(u_n))$, par $u_n\beta_n - j^*(\beta_n)$ où les β_n sont des fonctions suffisamment régulières croissant vers « $j'(u_n)$ ».

2) Il faut montrer l'existence de ψ ; ceci est un problème de valeurs propres puisqu'on reconnaît dans le problème (16) une version « améliorée » du problème linéaire

$$\hat{\psi}(x) = j'(u_n)\overline{\mathrm{N}}\hat{\psi} + h$$

qui n'est autre que le dual du linéarisé de (13) pour $\lambda = 1$.

Il faut aussi montrer que ψ appartient à $\hat{\mathrm{X}}$.

II.3. **Démonstration du théorème** 2.1.

La condition nécessaire s'établit avec (6), les justifications d'intégrabilité étant assurées par (10).

Pour démontrer que (11) est suffisante, commençons par remarquer que, pour $r > 0$

$$(18)\quad \begin{cases} \alpha \to r\alpha - j^*(\alpha) \text{ est une fonction strictement croissante de} \\ [0, j'_g(r)] \to [0, j(r)] \text{ où } j'_g(r) \text{ est la dérivée à gauche en } r \text{ de} \\ j(x,.)(j'_g(r) = +\infty \text{ si } j(r) = +\infty). \end{cases}$$

En particulier

$$(19)\qquad rj'_g(r) - j^*(j'_g(r)) = j(r)$$

(si $j'_g(r) = +\infty$, il faut comprendre : $j(r) = \lim\limits_{\alpha \uparrow \infty} r\alpha - j^*(\alpha)$).

Soit donc $f \in \mathrm{L}_+(\mathrm{U})$ vérifiant (11) et $\lambda \in]0, 1[$. Si K_n est la suite définie en (1), on note

$$\mathrm{I}_{\mathrm{K}_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathrm{K}_n \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathrm{K}_n \end{cases}$$

et

$$\mathrm{N}_k(x, y) = \min\{ 1_{\mathrm{K}_k}(x) 1_{\mathrm{K}_k}(y) \mathrm{N}(x, y), k \} \quad \text{p. p.}$$
$$f_n(x) = \min\{ 1_{\mathrm{K}_n}(x) f(x), n \} \quad \text{p. p..}$$

Pour *k fixé*, on considère les suites définies par récurrence

$$(20)\qquad u_0 = \lambda f_0$$

$$(21)\qquad \forall n \geqslant 0, \qquad \beta_n = \inf\{ 1_{\mathrm{K}_n} j'_g(u_n), n \}$$

$$(22)\qquad u_{n+1} = \lambda \mathrm{N}_k(u_n \beta_n - j^*(\beta_n)) + \lambda f_n .$$

Pour simplifier les notations, on n'a écrit ici que l'indice n mais en fait on a $u_n = u(n, k, \lambda)$ et $\beta_n = \beta(n, k, \lambda)$. Les suites $u(n, k, \lambda)$ et $\beta(n, k, \lambda)$ ainsi définies appartiennent à $\mathrm{L}_0^\infty(\mathrm{U})$ (voir la définition (4)). D'autre part, on vérifie en utilisant (18), (19) et par récurrence que

$$(23)\qquad \forall n \geqslant 0, \qquad \forall k \geqslant 0, \qquad \forall \lambda \in [0, 1],$$
$$u(n, k, \lambda) \leqslant u(n + 1, k, \lambda) \qquad \text{et} \qquad \beta(n, k, \lambda) \leqslant \beta(n + 1, k, \lambda)$$

$$(24)\quad k \mapsto u(n, k, \lambda) \qquad \text{et} \qquad \lambda \mapsto u(n, k, \lambda) \quad \text{sont croissants pour } n \text{ fixé}.$$

Donc $u(n, k, \lambda)$ croît vers $u(k, \lambda) \leqslant \infty$ quand n tend vers l'infini. Comme f_n croît vers f et $u_n\beta_n - j^*(\beta_n)$ croît vers $u_k j'_g(u_k) - j^*(j'_g(u_k)) = j(u_k)$, où $u_k = u(k, \lambda)$ et avec la convention que

$$j(x, \infty) = \begin{cases} \infty \text{ s'il existe } r > 0 \quad \text{avec} \quad j(x, r) \neq 0 \\ 0 \text{ si } \quad j(x, r) = 0 \qquad \forall r > 0, \end{cases}$$

on a à la limite

$$u_k(x) = \lambda(\mathrm{N}_k j(u_k)(x) + f(x)) \text{ p. p. } \quad x \in \mathrm{U}.$$

Grâce à (24), quand k tend vers l'infini, $u(k, \lambda)$ croît vers u_λ solution de

$$u_\lambda(x) = \lambda(\mathrm{N}j(u_\lambda)(x) + f(x)) \text{ p. p. } \quad x \in \mathrm{U}$$

et u_λ est elle-même croissante en λ.

Pour achever la démonstration, il nous suffit de montrer que

$$\forall h \in \hat{\mathrm{X}}, \qquad u_\lambda h \in \mathrm{L}^1(\mathrm{U}). \tag{25}$$

En effet, u_λ vérifie alors (15) et on utilise les arguments développés à cet endroit.

Pour obtenir (25), nous allons montrer que pour tout n, k, $\lambda \in [0, 1[$, on a

$$\forall h \in \hat{\mathrm{X}}, \qquad \int u(n, k, \lambda) h \leqslant \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathrm{F}(h). \tag{26}$$

L'estimation (25) s'en déduit grâce aux monotonies. Comme annoncé dans II.2, on obtiendra (26) en appliquant l'hypothèse (11) à la fonction ψ_n donnée par le

LEMME 1. — Soit $h \in \hat{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{C} \in]1, 1/\lambda[$ tel que $\mathrm{F}_\mathrm{C}(h) < \infty$. Alors, pour tout $n \geqslant 0$, il existe $\psi_n \in \mathrm{L}_0^\infty(\mathrm{U})$ solution de

$$\psi_n = \sup \left\{ \frac{1}{\mathrm{C}} \beta_n \overline{\mathrm{N}}_k \psi_n, h \right\}. \tag{27}$$

On remarque que (27) n'est autre que (16) modulo les approximations.

Admettons pour l'instant ce lemme et établissons (26). Vérifions que $\psi_n \in \hat{\mathrm{X}}$; on a

$$\mathrm{F}_\mathrm{C}(\psi_n) \leqslant \int j^*\left(\frac{\max \{ \beta_n \overline{\mathrm{N}}_k \psi_n, \mathrm{C}h \}}{\overline{\mathrm{N}}\, \psi_n} \right) \overline{\mathrm{N}} \psi_n,$$

soit puisque j^* est croissante

$$\mathrm{F}_\mathrm{C}(\psi_n) \leqslant \int \max \left\{ j^*\left(\beta_n \frac{\overline{\mathrm{N}}_k \psi_n}{\overline{\mathrm{N}} \psi_n} \right), j^*\left(\frac{\mathrm{C}h}{\overline{\mathrm{N}} \psi_n} \right) \right\} \overline{\mathrm{N}} \psi_n,$$

soit encore en utilisant $\overline{\mathrm{N}} \geqslant \overline{\mathrm{N}}_k$, $\psi_n \geqslant h$ et $j^*(\alpha r) \leqslant \alpha j^*(r)$ $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$\mathrm{F}_\mathrm{C}(\psi_n) \leqslant \int \max \left\{ j^*(\beta_n) \overline{\mathrm{N}}_k \psi_n, j^*\left(\frac{\mathrm{C}h}{\overline{\mathrm{N}} h} \right) \overline{\mathrm{N}} h \right\}$$

et

$$\text{(28)} \qquad F_C(\psi_n) \leqslant \int j^*(\beta_n)\overline{N}_k\psi_n + F_C(h).$$

Le membre de droite est fini puisque $\overline{N}_k\psi_n \leqslant k\mu(K_k)\,\|\psi_n\|_\infty$ et que $j^*(\beta_n) \leqslant u_n\beta_n \in L_0^\infty(U)$. Ceci prouve que $\psi_n \in \hat{X}$ et autorise qu'on lui applique l'hypothèse (11).

Multipliant alors (22) par ψ_n, on obtient

$$\text{(29)} \qquad \int u_{n+1}\psi_n = \lambda \int [u_n\beta_n - j^*(\beta_n)]\overline{N}_k\psi_n + \lambda \int f_n\psi_n$$
$$\leqslant \lambda \int [u_n\beta_n - j^*(\beta_n)]\overline{N}_k\psi_n + \lambda F_C(\psi_n).$$

En utilisant (28), on obtient

$$\text{(30)} \qquad \int u_{n+1}\psi_n \leqslant \lambda \int u_n\beta_n\overline{N}_k\psi_n + \lambda F_C(h),$$

et avec (27) :

$$\int u_{n+1}\psi_n \leqslant \lambda C \int u_n\psi_n + \lambda F_C(h).$$

Puisque $u_{n+1} \geqslant u_n$ et $\psi_n \geqslant h$, on en déduit

$$\text{(31)} \qquad \int u_{n+1}h \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda C} F_C(h).$$

On fait alors décroître C vers 1. Puisque $r \to j^*(x, r)$ est continue en tout point r_0 tel que $j^*(x, r_0) < \infty$, on a $F_C(h) \to F(h)$, on obtient ainsi (26).

Démonstration du lemme 1. — Soit A_n l'opérateur de $L^2(U)$ défini par

$$A_n\psi = \beta_n\overline{N}_k\psi.$$

Soit r_n son rayon spectral. Supposons momentanément que

$$\text{(32)} \qquad r_n < C.$$

Alors, $(CI - A_n)^{-1} = \sum_{p \geqslant 0} C^{-(p+1)}A_n^p$ est un opérateur continu positif sur $L^2(U)$. Il existe donc une solution de

$$\text{(33)} \qquad \hat{\psi} \in L^2(U), \qquad \hat{\psi} \geqslant 0, \qquad \hat{\psi} = \frac{1}{C}A_n\hat{\psi} + h.$$

De plus $\hat{\psi} \in L_0^\infty(U)$ puisque h, $\beta_n \in L_0^\infty(U)$ et que

$$\text{(34)} \qquad \|\overline{N}_k\psi\|_{L^\infty} \leqslant k\int_{K_k} \psi \leqslant k\mu(K_k)^{1/2}\,\|\psi\|_{L^2}.$$

Posant alors

$$v_0 = h, \qquad v_{p+1} = \sup\left(\frac{1}{C} A_n v_p, h\right), \tag{35}$$

on a immédiatement par récurrence

$$\forall p \geqslant 0, \qquad v_p \leqslant v_{p+1} \leqslant \hat{\psi}.$$

Donc, v_p croît vers une solution ψ_n de (27).

Reste à montrer (32). Puisque $\beta_n(x)\overline{N}_k(x, y) \in L^2_+(U \times U)$, A_n est un opérateur compact et positif de $L^2(U)$. Donc, le rayon spectral r_n est une valeur propre et la fonction propre associée peut être choisie positive (voir [*10*]). On a par ailleurs $r_0 = 0$ puisque $\beta_0 \equiv 0$.

Supposons $r_{n-1} < C$ et montrons qu'alors $r_n < C$. L'application de $L^\infty_0(U)$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à β associe le rayon spectral $r(\beta)$ de $\psi \mapsto \beta\overline{N}_k\psi$ est continue pour la norme L^∞ et croissante. Donc, si $r_n \geqslant C$, il existe $\beta_* \in L^\infty_0(U)$ vérifiant

$$\beta_{n-1} \leqslant \beta_* \leqslant \beta_n, \qquad r(\beta_*) = C. \tag{36}$$

Puisque $C = r(\beta_*)$, il existe $v \in L^2_+(U)$, $v \not\equiv 0$ solution de

$$Cv = \beta_* \overline{N}_k v. \tag{37}$$

D'après (34), $v \in L^\infty_0(U)$ et on vérifie que $v \in \hat{X}$ en remarquant que

$$Cv/\overline{N}v \leqslant Cv/\overline{N}_k v \leqslant \beta_* \leqslant j'_g(u_n).$$

Soit u_* donné par

$$u_* = \lambda N_k(u_n\beta_* - j^*(\beta_*)) + \lambda f_n. \tag{38}$$

En multipliant (38) par v et en intégrant, on obtient par un calcul analogue à (28)-(31)

$$\int u_* v \leqslant \lambda C \int u_n v. \tag{39}$$

Mais d'après (18), (19), (36), (22) et (38), $u_* \geqslant u_n$. Donc (39) implique

$$\int u_* v = 0. \tag{40}$$

On va en déduire $v \equiv 0$, d'où la contradiction cherchée. Si $K = \{ x \in U ; v(x) > 0 \}$, (40) implique $\int_K u_* = 0$. Revenant à (38), on a

$$0 \geqslant \lambda \int_K dx \int_K N_k(x, y)[u_n(y)\beta_*(y) - j^*(\beta_*)(y)]dy.$$

Mais d'après (36)

$$K \subset \{ x ; \beta_*(x) > 0 \} \subset \{ x ; (u_n\beta_* - j^*(\beta_*))(x) > 0 \}$$

et donc

$$N_k(x, y) = 0 \text{ p. p. sur } K \times K .$$

Mais alors $\overline{N}_k v = 0$ sur K et donc $v \equiv 0$. Ce qui termine la démonstration du lemme 1.

On peut déduire du théorème 2.1 le résultat suivant qui ne suppose plus $f \geqslant 0$, ni $j(x, r) = 0$ pour $r \leqslant 0$ et produit des solutions u non nécessairement positives.

Soit $j : U \times \mathbb{R} \to]-\infty, \infty]$ mesurable vérifiant (3), $f : U \mapsto]-\infty, \infty]$ mesurable. On suppose qu'il existe une sous-solution de (9), (10), plus précisément qu'il existe v tel que

$$\forall n, \quad v \in L^1(K_n), \quad N(.,.)j(v)(.) \in L^1(K_n \times U) \tag{41}$$

$$v \leqslant Nj(v) + f \text{ p. p. sur } U . \tag{42}$$

On définit alors j_v^* et $\hat{X}_v$ par

$$j_v^*(x, r) = \sup_{\alpha \geqslant v(x)} (r\alpha - j(x, \alpha))$$

$$\hat{X}_v = \left\{ h \in L_0^\infty(U) \; ; \; \exists C > 1 \quad \text{tel que} \quad j_v^*\left(C \frac{h}{\overline{N}h}\right)\overline{N}h \in L^1(U) \right\}.$$

COROLLAIRE 2.2. — Il existe $u : U \mapsto]-\infty, \infty]$ mesurable, solution de

$$\begin{cases} u \geqslant v, & u = Nj(u) + f \text{ p. p.} \\ uh \in L^1(U), & \forall h \in \hat{X}_v \end{cases} \tag{43}$$

si et seulement si

$$\forall h \in \hat{X}_v, \qquad \int fh \leqslant \int j_v^*\left(\frac{h}{\overline{N}h}\right)\overline{N}h . \tag{44}$$

Démonstration. — On pose $w = u - v$ et on définit $g(x, r)$ par :

$g(x, r) = 0$ pour tout x et pour $r \leqslant 0$,

$g(x, r) = j(x, r + v(x)) - j(x, v(x))$ pour $j(x, v(x)) < +\infty$ et $r > 0$,

$g(x, r) = +\infty$ si $j(x, v(x)) = +\infty$ et $r > 0$.

Alors g vérifie (2), (3) et puisque (41) implique en particulier

$$N(x, y) = 0 \text{ p. p. } \quad (x, y) \quad \text{tel que} \quad j(y, v(y)) = +\infty ,$$

on vérifie que (43) équivaut à

$$\begin{cases} w \in L_+(U), & w = Ng(w) + f + Nj(v) - v \\ wh \in L^1(U) & \forall h \in \hat{X}_v \end{cases} \tag{45}$$

On vérifie que

$$g^*(x, r) = j_v^*(x, r) + j(v)(x) - rv(x) \quad \text{si} \quad j(v)(x) < +\infty$$
$$g^*(x, r) = 0 \qquad \text{sinon}.$$

Donc si $h \in L_0^\infty(U)$, on a presque partout sur $\{ x ; j(v)(x) < +\infty \}$

$$g^*\left(C\frac{h}{\overline{N}h}\right)\overline{N}h = j_v^*\left(C\frac{h}{\overline{N}h}\right)\overline{N}h + j(v)\overline{N}h - chv. \tag{46}$$

On déduit de (46) et (41) que $g^*\left(C\frac{h}{\overline{N}h}\right)\overline{N}h \in L^1(U)$ si et seulement si $j^*\left(C\frac{h}{\overline{N}h}\right)\overline{N}h \in L^1(U)$. Le corollaire 2.2 est alors une conséquence immédiate du théorème 2.1 appliqué au problème (45).

III. APPLICATIONS

III.1. Équations elliptiques.

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, borné si $N = 1$ ou 2, $j : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto [0, \infty]$ vérifiant (2), (3) (et donc $j(x, r) = 0 \; \forall r \leqslant 0$) et μ une mesure de Radon sur Ω. Considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = j(x, u) + \mu \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{E}$$

Nous nous intéressons à l'existence d'au moins une solution pour (E) sans imposer *a priori* la positivité de u.

Soit N la fonction de Green du laplacien avec conditions de Dirichlet nulles au bord. Par solution de (E), on entend ici :

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \tag{47}$$

$$u(x) = \int_\Omega N(x, y) j(y, u(y)) dy + f(x) \text{ p. p.} \quad x \in \Omega \tag{48}$$

où $f(x) = \int_\Omega N(x, y) d\mu(y)$. On supposera que

$$\int_\Omega N(., y) d|\mu|(y) \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{49}$$

On note

$$Y = \{ \xi \in W_0^{1,\infty}(\Omega) ; -\Delta\xi \in L_0^\infty(\Omega) \}$$

où $L_0^\infty(\Omega)$ désigne ici l'espace des fonctions de $L^\infty(\Omega)$ positives et à support compact (on choisit pour K_n une suite exhaustive de compacts). Rappelons qu'on note $j(u)(x) = j(x, u(x))$.

THÉORÈME 3.1. — On suppose qu'il existe $C > 1$ et $\xi_0 \in Y$ avec $\xi_0 \not\equiv 0$ tels que :

$$j^*\left(-C\frac{\Delta\xi_0}{\xi_0}\right)\xi_0 \in L^1(\Omega). \tag{50}$$

Si μ est une mesure de Radon satisfaisant (49), (E) a au moins une solution au sens (47)-(48) si et seulement si

$$\forall \xi \in Y, \qquad \int_\Omega \xi d\mu \leqslant \int_\Omega j^*\left(\frac{-\Delta\xi}{\xi}\right)\xi. \tag{51}$$

Si de plus $f \geqslant 0$, alors, sous l'hypothèse (51), (E) a au moins une solution positive.

Remarque. — L'apparition du quotient $-\dfrac{\Delta\xi}{\xi}$ est à rapprocher de la caractérisation classique de la première valeur propre des problèmes du type

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda a(x)u && \text{sur} \quad \Omega \text{ borné} \\ u &> 0 && \text{sur} \quad \Omega \\ u &= 0 && \text{sur} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

où $a(.) \geqslant 0$, à savoir (sous des hypothèses à préciser)

$$\lambda_1 = \inf_{\xi \in Y}\left\{\sup_{x\in\Omega} \text{ess} \frac{-\Delta\xi(x)}{a(x)\xi(x)}\right\}.$$

Dans ce cas, on a

$$j^*(x, r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r \leqslant \lambda a(x) \\ +\infty & \text{si} \quad r > \lambda a(x). \end{cases}$$

Démonstration du théorème 3.1. — Elle est une application du corollaire 2.2. Pour le voir, posons :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \\ f(x) & \text{si} \quad f(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Alors, $Nj(v) \equiv 0$ et $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ d'après (49). Ainsi, (41) et (42) sont vérifiées, $j_v^* = j^*$ sur $[0, \infty[$ et $\hat{X}_v = \hat{X}$ est non réduit à $\{0\}$ d'après (50). Puisque toute solution de (E) vérifie *a priori* $u \geqslant v$, le problème (E) équivaut à

$$\begin{cases} u \geqslant v, \qquad u \equiv Nj(u) + f \\ u \in L^1_{loc}(\Omega). \end{cases}$$

Par ailleurs, (51) équivaut à (44) : en effet, si $\xi \in Y$, on a

$$h = -\Delta\xi \Leftrightarrow \xi = \overline{N}h.$$

Le théorème 3.1 est donc une conséquence du corollaire 2.2 à ceci près qu'il nous faut vérifier

$$uh \in L^1(\Omega) \qquad \forall h \in \hat{X} \Rightarrow u \in L^1_{loc}(\Omega) \tag{52}$$

pour la solution de (43). La seule hypothèse $\hat{X} \neq \{0\}$ suffit. En effet, si $\xi_0 \in Y$, $\xi_0 \not\equiv 0$ et ξ_0 vérifie (50), on a $u\Delta\xi_0 \in L^1$ et donc $u \not\equiv +\infty$, ce qui, revenant à l'équation, implique en particulier l'existence de $x_0 \in \Omega$ tel que

$$N(x_0, .)j(u)(.) \in L^1(\Omega). \tag{53}$$

Soit alors K un compact de Ω et K_0 un voisinage compact de $K \cup \{x_0\}$ dans Ω. En comparant les solutions de

$$\begin{cases} -\Delta w_x = \delta_x & \text{sur } \Omega \\ w_x = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta w_{x_0} = \delta_{x_0} & \text{sur } \Omega \\ w_{x_0} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

(δ_x désigne la masse de Dirac en x), on montre l'existence d'une constante $k > 0$ telle que

$$\forall x \in K, \qquad \forall y \in \Omega \backslash K_0 \qquad N(x, y) \leqslant kN(x_0, y), \tag{54}$$

puisque $w_x(y) = N(x, y)$.

De (53), (54), on déduit

$$\int_K dx \int_{\Omega \backslash K_0} N(x, y)j(y, u(y))dy \leqslant k\,(\text{mes } K) \int_\Omega N(x_0, y)j(u)(y)dy < \infty.$$

Par ailleurs, (53) implique $j(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ et donc

$$\int_K dx \int_{K_0} N(x, y)j(y, u(y))dy < \infty.$$

On en déduit $Nj(u) \in L^1(K)$ pour tout K et donc $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ puisque $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Remarque. — Dans beaucoup de situations, en particulier si $j(r) = r^\gamma$, l'espace X est suffisamment riche pour que l'implication (52) soit immédiate.

Nous allons maintenant expliciter le résultat du théorème 3.1 sur l'exemple suivant :

$$(E_\gamma) \qquad \begin{cases} -\Delta u = (u^+)^\gamma + \lambda v & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $u^+(x) = \max(u(x), 0)$, $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 1$ et v est une mesure de Radon bornée sur Ω. Lorsque v et u sont positifs, on retrouve le problème évoqué dans l'introduction.

COROLLAIRE 3.1. — Le problème (E_γ) a au moins une solution au sens de (47)-(48) si et seulement si

$$\forall \xi \in Y, \qquad \lambda \int_\Omega \xi dv \leqslant \frac{\gamma - 1}{\gamma^{\gamma'}} \int_\Omega \frac{(-\Delta\xi)^{\gamma'}}{\xi^{\gamma' - 1}} dx \tag{55}$$

où $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$. Sous cette hypothèse, la solution obtenue est positive dès que $Nv \geqslant 0$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème 3.1 : on remarque qu'ici tout élément continu de Y vérifie (50), car si $\xi \in Y$, alors $\xi > 0$ sur Ω et $-\Delta\xi$ est borné et à support compact.

Nous allons expliciter ce résultat en examinant en particulier le cas où les données sont des fonctions de L^p. On note encore v une mesure de Radon bornée et $v = v^+ - v^-$ sa décomposition de Jordan.

COROLLAIRE 3.2. — On suppose Ω borné de frontière régulière. Alors (E_γ) a au moins une solution au sens de (47)-(48) pour λ assez petit si

i) $\quad N = 1, 2 \quad$ ou $\quad N \geqslant 3 \quad$ et $\quad \gamma < N/(N-2)$

ou

ii) $\quad N \geqslant 3, \quad \gamma > N/(N-2) \quad$ et $\quad v^+ \in L^p(\Omega) \quad$ avec $\quad p \geqslant N(\gamma-1)/2\gamma$

ou

iii) $\quad N \geqslant 3, \quad \gamma = N/(N-2) \quad$ et $\quad v^+ \in L^p(\Omega) \quad$ avec $\quad p > 1$.

Remarque. — La condition $\gamma \geqslant N/(N-2)$ équivaut à $N(\gamma - 1) \geqslant 2\gamma$. Si la valeur limite $p = N(\gamma - 1)/2\gamma$ est permise lorsque $\gamma > N/(N-2)$, elle ne l'est plus lorsque $\gamma = N/(N-2)$ comme nous le démontrons plus loin. Les conditions sont en fait optimales en termes d'espaces L^p.

La démonstration qui suit a essentiellement pour but d'expliciter sur une situation simple le résultat abstrait. Il est clair que, dans ce cas particulier, une démonstration plus directe peut être facilement imaginée.

Démonstration du corollaire 3.2. — Il faut montrer que λv vérifie (55) pour λ assez petit. Soit donc $\xi \in Y$ et w défini par

$$-\Delta\xi = w^{1/\gamma'}\xi^{1/\gamma}. \tag{56}$$

Il s'agit de montrer l'existence d'une constante C telle que

$$\int \xi dv \leqslant C \int w,$$

Si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leqslant 1$, on a

$$\int \xi dv \leqslant \int \xi dv^+ \leqslant C \| v^+ \|_p \, \| \xi \|_q. \tag{57}$$

Par ailleurs, d'après les injections de Sobolev, si

$$\frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{q} + \frac{2}{N} \left(\frac{1}{s} < \frac{2}{N} \quad \text{si} \quad q = \infty \right) \tag{58}$$

on a, en utilisant aussi (56) et pour $1 < s < +\infty$

$$\| \xi \|_q \leqslant C \| \xi \|_{W^{2,s}} \leqslant C \| \Delta\xi \|_s \leqslant C \left[\int w^{s/\gamma'} \xi^{s/\gamma} \right]^{1/s}.$$

Si de plus

$$s \leqslant \gamma' \tag{59}$$

on obtient

$$\| \xi \|_q \leqslant C \left(\int w \right)^{1/\gamma'} \left[\int \xi^{s\gamma'/\gamma(\gamma'-s)} \right]^{(\gamma'-s)/\gamma' s}.$$

Si maintenant

$$q \geqslant s\gamma'/\gamma(\gamma' - s) \tag{60}$$

on en déduit

$$\| \xi \|_q \leqslant C \int w$$

ce qui avec (57) donne l'égalité cherchée. Pour satisfaire (58), (59), (60), on choisit

$$q = \infty, \qquad s > N/2 \quad \text{si} \quad N = 1, 2 \quad \text{ou} \quad N \geqslant 3$$

$q < \infty$ et s réalisant l'égalité dans (58) si $N \geqslant 3$, $\gamma = N/(N-2)$.

$1 - 1/q = 2\gamma'/N$ et s réalisant l'égalité dans (58) si $N \geqslant 3$, $\gamma > N/(N-2)$ et $p \geqslant N(\gamma - 1)/2\gamma$.

Nous allons maintenant établir des conditions nécessaires sur la donnée μ en termes de capacité associée à l'espace de Sobolev

$$W^{2,\gamma'}(\mathbb{R}^N) = \left\{ v \in L^{\gamma'}(\mathbb{R}^N) \,;\, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^{\gamma'}(\mathbb{R}^N), \quad i, j = 1, \ldots, N \right\}.$$

Nous notons $\| \,.\, \|_{2,\gamma'}$ une norme de cet espace et la capacité associée est définie pour un compact K de $\mathbb{R}^N$ par

$$C_{2,\gamma'}(K) = \inf \{ \| v \|_{2,\gamma'}^{\gamma'} \,;\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ 0 \leqslant v \leqslant 1,\ v = 1 \text{ sur } K \}. \tag{61}$$

Nous renvoyons à [7] [2] [3] pour plus de détails et, en particulier, pour la possibilité de « tronquer » les fonctions-test v dans la définition ci-dessus.

PROPOSITION 3.1. — Soit μ une mesure de Radon positive à support compact dans Ω vérifiant (55) avec $\mu = \lambda v$. Alors, il existe $k = k(\gamma, N, \mu)$ tel que

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact}, \qquad \mu(K) \leqslant k C_{2,\gamma'}(K). \tag{62}$$

En particulier, si $B_r = \{ x \in \Omega \,;\, | x - x_0 | < r \}$, il existe $k' = k'(\gamma, N, \mu)$ tel que, pour r assez petit,

$$\mu(B_r) \leqslant \begin{cases} k' r^{N-2\gamma'} & \text{si} \quad \gamma > N/(N-2) \\ k' \, [\operatorname{Log}(1/r)]^{1-\gamma'} & \text{si} \quad \gamma = N/(N-2). \end{cases} \tag{63}$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que (55) implique :

$$\forall v \in C_0^2(\Omega)^+ \int_\Omega v d\mu \leqslant \frac{\gamma - 1}{\gamma^{\gamma'}} \int \frac{|\Delta v|^{\gamma'}}{v^{\gamma'-1}}. \tag{64}$$

En effet, étant donné un tel v, il suffit d'appliquer (55) à la solution ξ de

$$-\Delta\xi = |\Delta v|, \qquad \xi|_{\partial\Omega} = 0$$

qui majore v d'après le principe du maximum,

Étant donné $v \in C_0^\infty(\Omega)^+$, appliquant (64) à $v^{2\gamma'}$, on obtient

$$\int_\Omega v^{2\gamma'} d\mu \leqslant C(\gamma) \int |2\gamma' v^{2\gamma'-1}\Delta v + 2\gamma'(2\gamma' - 1)v^{2\gamma'-2}|\nabla v|^2|^{\gamma'} v^{(1-\gamma')2\gamma'}$$
$$\leqslant C(\gamma)\left[\|v\|_\infty^{\gamma'} \int |\Delta v|^{\gamma'} + \int |\nabla v|^{2\gamma'}\right].$$

soit, en utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg [*8*]

$$\int_\Omega v^{2\gamma'} d\mu \leqslant C(\gamma')\|v\|_\infty^{\gamma'} \|v\|_{2,\gamma'}^{\gamma'}. \tag{65}$$

Étant donné $K \subset \Omega$ compact, appliquant (65) aux fonctions-test définissant $C_{2,\gamma'}(K)$ dans (61) (après localisation sur un voisinage du support de μ), on obtient

$$\mu(K) \leqslant \inf_v \int_\Omega v^{2\gamma'} d\mu \leqslant k C_{2,\gamma'}(K).$$

La propriété (63) est alors une conséquence de (62) et des résultats de [*7*].

COROLLAIRE 3.3. — Si ν est positive, les conditions (*ii*) et (*iii*) du corollaire 3.2 sont optimales, c'est-à-dire :

si $N \geqslant 3$ et $\gamma = N/(N-2)$, il existe $\nu \in L^1(\Omega)$ tel que $\forall\lambda > 0$, E_γ n'a pas de solution,

si $N \geqslant 3$, $\gamma > N/(N-2)$, $1 \leqslant p < N(\gamma - 1)/2\gamma$, il existe $\nu \in L^p(\Omega)$ tel que $\forall\lambda > 0$, E_γ n'a pas de solution.

Démonstration. — Supposons $\gamma = N/(N-2)$ et $\mu \in L^1(\Omega)$. D'après la proposition 3.1, une condition nécessaire pour que (E_γ) ait une solution positive avec $\mu = \lambda\nu$ est

$$\exists C, r_0 > 0 \text{ tels que } \int_{|x-x_0|<r} \mu(x) \leqslant C(\operatorname{Log} 1/r)^{1-\gamma'} \text{ pour } x_0 \in \Omega \text{ et } r < r_0. \tag{66}$$

Mais des fonctions ayant des singularités en $|x-x_0|^{-N}[\operatorname{Log}(1/|x-x_0|)]^{-1-\varepsilon}$ avec $0 < \varepsilon < \gamma' - 1$ produisent des fonctions de L^1 qui ne vérifient pas (66).

Si $\gamma > N/(N-2)$, il existe des fonctions de $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < N(\gamma-1)/2\gamma$

ayant des singularités en $|x-x_0|^{-N(1-\varepsilon)/p}$ avec $\varepsilon > 0$ et $2\gamma' < N(1-\varepsilon)$. Ces fonctions ne vérifient pas (63).

Remarque. — La propriété (62) a été largement étudiée dans la littérature dans un autre objectif (voir par exemple [*1*] et ses références). Rappelons que (62) est équivalente à la formulation « de type fort »

$$\forall \varphi \in W^{2,\gamma'}(\mathbb{R}^N) \int \varphi^{\gamma'} d\mu \leqslant C \| \varphi \|_{2,\gamma'}^{\gamma'}.$$

Il a été démontré récemment par D. R. Adams et le second auteur qu'elle était aussi équivalente à l'existence de $C_1 > 0$ telle que

$$\int \xi d\mu \leqslant C_1 \int (-\Delta\xi)^{\gamma'} \xi^{1-\gamma'} \qquad \forall \xi \in W^{2,\gamma'}, \qquad \xi, -\Delta\xi \geqslant 0.$$

Le cas des mesures $C_{2,\gamma'}$-capacitaires est examiné par les auteurs dans [*9*].

Tous les résultats de ce paragraphe s'étendent bien sûr au cas d'opérateurs elliptiques plus généraux que $-\Delta$, éventuellement non symétriques.

III.2. Équations paraboliques.

Pour simplifier les énoncés, nous appliquerons le théorème 2.1 à l'exemple suivant

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^{\gamma} + g \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \Omega, \quad u \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \Omega \\ u(t, .) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \qquad u(0, .) = \mu. \end{cases}$$

où μ et g sont des mesures de Radon positives bornées sur Ω et $]0, T[\times \Omega$ respectivement. Ici Ω est un ouvert régulier borné ou non.

On note $e^{\Delta t}\delta_x(.) = u(t, .)$ la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{sur} \quad]0, \infty[\times \Omega \\ u(0, .) = \delta_x(.), \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad]0, \infty[\times \partial\Omega \end{cases}$$

où $x \in \Omega$. Le noyau N associé au problème (P) est alors défini sur $Q \times Q$ où $Q = [0, T[\times \Omega$ par

$$\text{(67)} \qquad N(t, x, s, y) = \begin{cases} e^{\Delta(t-s)}\delta_x(y) & \text{si} \quad t > s \\ 0 & \text{si} \quad t \leqslant s \end{cases}$$

et on appelle solution de (P) toute fonction u vérifiant

$$\text{(68)} \qquad \begin{aligned} & u \in L^1_{loc}(Q), \qquad u \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad Q \\ & u(t, x) = \int_0^t \int_\Omega N(t, x, s, y) u^{\gamma}(s, y) dy ds + f(x, t) \end{aligned}$$

où f est la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} - \Delta f = g \\ f(0,.) = \mu, \qquad f = 0 \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \partial\Omega . \end{cases}$$

On vérifie que, pour $h \in L_0^\infty(Q)$ (espace des fonctions positives bornées à support compact dans Q), $\xi = \overline{N}h$ équivaut à

$$(69) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta\xi = h \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \Omega, \\ \xi(T,.) = 0, \qquad \xi = 0 \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \partial\Omega . \end{cases}$$

On note Y_T l'espace de toutes les fonctions ξ ainsi définies.

THÉORÈME 3.2. — Le problème (P) a une solution au sens de (68) si et seulement si, pour tout $\xi \in Y_T$

$$(70) \qquad \int_\Omega \xi(0,.)d\mu + \int_{]0,T[\times\Omega} \xi dg \leqslant \frac{\gamma - 1}{\gamma^{\gamma'}} \int_0^T \int_\Omega \frac{(-\xi_t - \Delta\xi)^{\gamma'}}{\xi^{\gamma'-1}} .$$

Démonstration. — On applique le théorème 2.1 avec U = Q muni de la mesure de Lebesgue et K_n une suite exhaustive de compacts de Q. La correspondance $h \in \hat{X} \mapsto \xi \in Y_T$ est donnée par (69). De plus, (11) est équivalent à (70) puisque

$$\int_0^T \int_\Omega f(-\xi_t - \Delta\xi) = \int_\Omega \xi(0,.)d\mu + \int_{]0,T[\times\Omega} \xi dg .$$

Le théorème 2.1 fournit une solution u telle que $uh \in L^1(Q)$ $\forall h \in \hat{X}$. Reste à montrer que ceci implique $u \in L^1_{loc}(Q)$. Soit K un compact de Ω, $0 < T_1 < T$, $\xi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi_0 \geqslant 0$, $\xi_0 = 1$ sur K ; on pose

$$\xi_1(t, x) = \{ (T_1 - t)^+ \}^{\gamma'} \xi_0(x)^{2\gamma'} \qquad \text{et} \qquad h = (-\xi_{1t} - \Delta\xi_1)^+ .$$

On a donc $h > 0$ sur $]0, T_1[\times K$ et, en remarquant que ξ donné par (69) est supérieur à ξ_1, on vérifie aisément que $h \in \hat{X}$.

Lorsque $g \equiv 0$, on retrouve les résultats d'existence classique (cf. [*11*] et ses références).

COROLLAIRE 3.4. — On suppose Ω borné, régulier et

i) si $\gamma < (N + 2)/N$, μ est une mesure de Radon positive bornée
ii) si $\gamma > (N + 2)/N$, $\mu \in L^p(\Omega)$, $\mu \geqslant 0$, $p \geqslant N(\gamma - 1)/2$
iii) si $\gamma = (N + 2)/N$, $\mu \in L^p(\Omega)$, $\mu \geqslant 0$, $p > 1$.

Alors il existe $T > 0$ pour lequel le problème

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^{\gamma} \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \Omega, \qquad u \geqslant 0 \\ u(0,.) = \mu, \qquad u = 0 \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution.

La démonstration de ce corollaire est identique à celle du corollaire 3.2. Elle consiste à montrer que μ satisfait la condition (70). Ceci est obtenu en faisant des estimations sur

$$-\xi_t - \Delta\xi = w^{1/\gamma'}\xi^{1/\gamma}$$

en utilisant les injections de Sobolev et les propriétés régularisantes du semi-groupe de la chaleur. Nous omettons les détails qui n'apportent rien de nouveau. Signalons seulement que pour $\gamma > (N + 2)/N$, on aboutit à l'estimation :

Si $\quad \mu = \mu_1 + \mu_2 \quad$ avec $\quad \mu_2 \in L^{\infty}(\Omega), \qquad \mu_1 \in L^{N(\gamma-1)/2}(\Omega)$

$$(72)\quad \forall \xi \in Y_T,$$

$$\int \xi(0,.)d\mu \leqslant C(\| \mu_1 \|_{N(\gamma-1)/2} + T^{1/(\gamma-1)} \| \mu_2 \|_{L^{\infty}}) \int_0^T \int_{\Omega} \frac{(-\xi_t - \Delta\xi)^{\gamma'}}{\xi^{\gamma'-1}},$$

avec C indépendant de T.

Comme dans le cas elliptique, les résultats ci-dessus sont optimaux en termes d'espaces L^p. On a, en effet :

PROPOSITION 3.2. — Soit μ une mesure de Radon positive à support compact dans Ω. Si μ vérifie

$$(73)\qquad \int_{\Omega} \xi(0,.)d\mu \leqslant C \int_0^T \int_{\Omega} \frac{(-\xi_t - \Delta\xi)^{\gamma'}}{\xi^{\gamma'-1}} \qquad \forall \xi \in Y_T,$$

alors, il existe $k > 0$ tel que

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact}, \qquad \mu(K) \leqslant k C_{2/\gamma,\gamma'}(K).$$

En particulier, il existe $k' = k'(\gamma, N, \mu)$ tel que pour r assez petit

$$(74)\qquad \mu(B_r) \leqslant \begin{cases} k' r^{N-2/(\gamma-1)} & \text{si} \quad \gamma > (N+2)/N \\ k' \, [\operatorname{Log}(1/r)]^{1-\gamma'} & \text{si} \quad \gamma = (N+2)/N. \end{cases}$$

Démonstration. — Ici, $C_{2/\gamma,\gamma'}$ désigne la capacité associée à l'espace de Sobolev $W^{2/\gamma,\gamma'}$ (voir [*4*]).

Comme dans le cas elliptique, on commence par remarquer que, si μ vérifie (70), la même estimation est vérifiée pour toute $v \in C_0^{\infty}(]-T, T[\times \Omega)$.

On l'applique alors à $v^{2\gamma'}$ et un calcul en tout point analogue à celui du cas elliptique permet d'obtenir

$$\left(\int_\Omega v^{2\gamma'}(T)d\mu\right) \leqslant C(\gamma) \| v \|_\infty^{\gamma'} \| v \|_{2,1,\gamma'}^{\gamma'}$$

où $\| \cdot \|_{2,1,\gamma'}$ est une norme sur l'espace

$$W^{2,1,\gamma'} = \left\{ u \in L^{\gamma'} ; \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^{\gamma'}, i, j = 1, \ldots, N \right\}.$$

On en déduit (voir [*4*], proposition 2.4)

$$\mu(K) \leqslant k C_{2,1,\gamma'}(\{0\} \times K) \leqslant k C_{2/\gamma,\gamma'}(K).$$

D'où la proposition, (74) se déduisant des résultats de [*7*].

COROLLAIRE 3.5. — *i*) Les résultats (*ii*) et (*iii*) du corollaire 3.4 sont optimaux.

ii) Si $\Omega = \mathbb{R}^N$ et $g \equiv 0$

α) si $1 < \gamma \leqslant (N + 2)/N$, (P) n'a pas de solution globale (i. e. $T = +\infty$) autre que $u \equiv 0$

β) si $\gamma > (N + 2)/N$, (P) a une solution globale si $\| \mu \|_{N(\gamma-1)/2}$ est assez petite.

Remarque. — Les résultats de (*ii*) ne sont pas nouveaux. Nous renvoyons à [*5*] [*6*] pour $\gamma < (N + 2)/N$ et à [*12*] pour le reste. Nous voulons seulement indiquer ici comment ils peuvent être obtenus comme conséquence de notre résultat général. Dans (*i*), l'optimalité est comprise comme dans le corollaire 3.3.

Démonstration du corollaire 3.5. — Le point (*i*) se déduit de la proposition 3.2 puisqu'on peut construire des fonctions de L^p ne vérifiant pas (74) si p ne vérifie pas (*ii*) et (*iii*) du corollaire 3.4 (cf. corollaire 3.3).

Pour (*ii*)-α, on procède par l'absurde. Si $\mu \geqslant 0$ est la donnée initiale d'une solution globale, on a en réécrivant (70)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi(T, .)d\mu \leqslant \frac{\gamma - 1}{\gamma^{\gamma'}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\xi_t - \Delta\xi)^{\gamma'}}{\xi^{\gamma'-1}} \text{ (noté } F(T, \quad))$$

et ce pour toute solution de

$\xi_t - \Delta\xi = h$, $\xi(0, .) = 0$, $\xi(t, x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$, $h \in L_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$.

Appliquant cette inégalité à $\eta_\lambda(t, x) = \xi(\lambda^2 t, x_0 + \lambda x)$ avec $T = T_0/\lambda^2$, on obtient après changement de variable dans l'intégrale de droite

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi(x_0 + \lambda x, T_0)d\mu \leqslant \lambda^{2\gamma'-N-2} F(T_0, \xi).$$

Si $\gamma < (N+2)/N$, soit $2\gamma' - N - 2 > 0$, faisant tendre λ vers 0, on a

$$\xi(T_0, x_0) \int d\mu = 0 \Rightarrow \int d\mu = 0,$$

ce qui démontre (ii)-α dans ce cas, Si $\gamma = (N+2)/N$, on aura

$$\xi(T_0, x_0) \int d\mu \leqslant F(T_0, \xi) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^N$$

soit

$$\| \xi(T_0, .) \|_\infty \int d\mu \leqslant F(T_0, \xi).$$

Si $\int d\mu > 0$, ceci prouverait, en revenant à la formulation (70)

$$\forall \xi \in Y_{T_0}, \qquad \| \xi(0, .) \|_\infty \leqslant \left[\int d\mu \right]^{-1} \frac{\gamma - 1}{\gamma^{\gamma'}} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(-\xi_t - \Delta\xi)^{\gamma'}}{\xi^{\gamma'-1}}.$$

Ainsi toute mesure bornée de mesure totale inférieure à $\int d\mu$ vérifierait (70), ce qui contredit le point (i).

Enfin pour (ii)-β, on utilise (72) avec $\mu_2 \equiv 0$. Puisque la constante C y est indépendante de T, (70) (avec $g \equiv 0$) est satisfaite pour tout $T > 0$ dès que $\| \mu \|_{N(\gamma-1)/2}$ est assez petit.

III.3. Problèmes périodiques.

Considérons le problème

$$P_{(0,T)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^\gamma + g \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \mathbb{R}^N \\ u \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \mathbb{R}^N \\ u(0, .) = u(T, .) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

où g est une mesure de Radon positive bornée sur $]0, T[\times \mathbb{R}^N$. Ce problème peut être, comme les précédents, écrit sous la forme

$$u = N_1(u^\gamma + g) \tag{75}$$

où N_1 est un noyau positif et par solution de $P_{(0,T)}$, on désigne toute fonction de $L^1_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ vérifiant (75). On note $| \, . \, |_p$ la norme dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

THÉORÈME 3.3. — $i)$ Si $1 < \gamma \leqslant N/(N-2)^+$, $P_{(0,T)}$ n'a pas d'autre solution que $u \equiv 0$.

$ii)$ Si $N \geqslant 3$ et $\gamma > N/(N-2)$, il existe $C > 0$ tel que si g est une mesure de $]0, T[$ vers $L^\beta(\mathbb{R}^N) \cap L^{\beta/\gamma}(\mathbb{R}^N)$ où

$$\beta = N(\gamma - 1)/2 \tag{76}$$

avec

$$\int_0^T |dg|_\beta + |dg|_{\beta/\gamma} \leqslant C, \tag{77}$$

P(0, T) a une solution.

Démonstration. — Par application du théorème 2.1 avec $U = [0, T] \times \mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue et L_0^∞ l'espace des fonctions de $L^\infty(U)$ à support compact dans U, on obtient que $P_{0,T}$ a une solution si et seulement si

$$\int_{]0,T[\times\mathbb{R}^N} \xi dg \leqslant \frac{\gamma - 1}{\gamma'} \int_0^T \int_\Omega \frac{(-\xi_t - \Delta\xi)^{\gamma'}}{\xi^{\gamma'-1}} \tag{78}$$

pour tout $\xi \geqslant 0$ tel que $-\xi_t - \Delta\xi \in L_0^\infty$, $\xi(0,.) = \xi(T,.)$. On dispose d'assez de fonctions-tests ξ pour affirmer que la solution, quand elle existe, appartient à $L^1_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ (prendre ξ indépendante de t).

Montrons (*i*) : si $P_{(0,T)}$ a une solution u non nulle, $v = \frac{1}{2}u$ vérifie

$$v_t - \Delta v = v^\gamma + (2^{\gamma-1} - 1)v^\gamma + g/2.$$

Donc v est solution d'un problème $P_{(0,T)}$ avec donnée non identiquement nulle même si $g \equiv 0$. Il nous suffit donc de montrer que si $g \geqslant 0$ vérifie (78), alors $g \equiv 0$.

Soit $\eta \in W_0^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ avec $-\Delta\eta \in L_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\xi(x) = \eta(x_0 + \lambda(x - x_0))$. Si g vérifie (78), on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta(\lambda(x - x_0) + x_0) \int_0^T dg(.,x) \leqslant CT\lambda^{2\gamma'-N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(-\Delta\eta)^{\gamma'}}{\eta^{\gamma'-1}}.$$

On fait tendre λ vers 0. Pour $N = 1, 2$ ou $N \geqslant 3$ et $1 < \gamma < N/(N-2)$, la conclusion suit si on a pris la précaution de choisir x_0 tel que $\eta(x_0) \neq 0$. Si $N \geqslant 3$ et $\gamma = N/(N-2)$, on a pour tout η

$$\|\eta\|_L^\infty \int_{]0,T[\times\mathbb{R}^N} dg \leqslant CT \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(-\Delta\eta)^{\gamma'}}{\eta^{\gamma'-1}}.$$

Si $g \not\equiv 0$, ceci exprime que la norme L^∞ de η peut être estimée par la fonctionnelle $\int (-\Delta\eta)^{\gamma'}\eta^{1-\gamma'}$. Calculant comme dans la démonstration de la proposition 3.1, on en déduirait que pour $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^+$, la norme L^∞ de v peut être estimée par sa norme $W^{2,\gamma'}$, ce qui est faux pour $2\gamma' = N$.

Pour démontrer (*ii*), commençons par établir que, pour toute fonction-test ξ, on a :

$$\left| \int_0^T \xi(s,.)ds \right|_p \leqslant C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(-\xi_t - \Delta\xi)^{\gamma'}}{\xi^{\gamma'-1}} \tag{79}$$

où p est tel que $p' = \beta/\gamma$. Soit w la fonction sous le signe intégral de droite ; on a :

$$-\xi_t - \Delta\xi = w^{1/\gamma'}\xi^{1/\gamma}$$

et donc, en intégrant sur (0, T)

$$-\Delta\int_0^T \xi \leqslant \left[\int_0^T w\right]^{1/\gamma'}\left[\int_0^T \xi\right]^{1/\gamma}.$$

Multipliant par $\left(\int_0^T \xi\right)^{q-1}$ où $q > 1$, on obtient en intégrant par parties et en utilisant les inégalités de Sobolev

$$\left|\int_0^T \xi\right|_{Nq/(N-2)}^q \leqslant C\left[\int_Q w\right]^{1/\gamma'}\left|\int_0^T \xi\right|_{(q-1)\gamma+1}^{q-1+1/\gamma}.$$

On obtient (79) en prenant q tel que $(q-1)\gamma + 1 = Nq/(N-2)$.

Soit alors g régulière et v la solution de

$$\text{(80)} \qquad \begin{cases} v_t - \Delta v = g \quad \text{sur} \quad]0, T[\times \mathbb{R}^N \\ v(0,.) = v(T,.), \end{cases}$$

solution au sens de (75) i. e. $v = N_1 g$.

On a :

$$\int_Q \xi dg = \int_Q v(-\xi_t - \Delta\xi) \leqslant \left(\int_Q v^\gamma \xi\right)^{1/\gamma}\left(\int_Q w\right)^{1/\gamma'}.$$

Donc, au vu de (79), (78) sera vérifié si, pour C assez petit

$$|\sup_{(0,T)} v^\gamma(x,t)|_{L^{\beta/\gamma}} \leqslant C$$

soit

$$\text{(81)} \qquad |\sup_{(0,T)} v(x,t)|_{L^\beta} \leqslant C.$$

Or, par transformée de Fourier, on voit que la solution de (80) s'écrit

$$\text{(82)} \qquad v(t) = G_T * e^{\Delta t} w_0(T) + w_0(t)$$

où $e^{\Delta t}$ est le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^N$, $\hat{G}_T = 1/(1 - e^{-T|\xi|^2})$ et

$$w_0(t) = \int_0^t e^{\Delta(t-s)} g(s) ds.$$

On utilise que pour tout $h \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^N$

$$e^{\Delta t} h(x) \leqslant Mh(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^N} \int_{|x-y|\leqslant r} h(y) dy.$$

Ainsi

$$(83)\quad w_0(t) \leqslant \int_0^t Mg(s)ds \quad \text{d'où :} \quad \sup_t w_0(t) \leqslant \int_0^T Mg(s)ds.$$

$$\Rightarrow |\sup_t w_0(t)|_\beta \leqslant \int_0^T |Mg(s)|_\beta \leqslant C\int_0^T |g(s)|_\beta.$$

De même

$$e^{\Delta t}w_0(T) \leqslant \int_0^T Mg(s)ds$$

implique

$$(84)\qquad |\sup_t e^{\Delta t}w_0(T)|_\beta \leqslant C\int_0^T |g(s)|_\beta.$$

Par ailleurs, on vérifie que $\hat{G}_T = 1 + \dfrac{1}{T|\xi|^2} + \hat{H}_T$ où $H_T \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On en déduit avec (82), (83), (84)

$$(85)\qquad |\sup_t v(t,.)|_\beta \leqslant C\left[\int_0^T |g(s)|_{\beta/\gamma} + |g(s)|_\beta\right].$$

(La norme β/γ provient de la convolution de la transformée de Fourier de $1/|\xi|^2$ avec un élément de L^β).

L'inégalité (85) est valable par densité pour tout g satisfaisant (77). Il suffit alors de choisir C assez petit dans (77) pour obtenir (81).

Remarque. — Des résultats analogues à ceux du théorème 3.3, (*ii*) pourraient aussi être déduits du cas abstrait pour le même problème posé sur un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ avec conditions de Dirichlet nulles au bord.

RÉFÉRENCES

[*1*] D. R. ADAMS, On the existence of capacitary strong type estimates in $\mathbb{R}^N$. *Arkiv för Matematik*, t. **14**, 1, 1976, p. 125-140.

[*2*] D. R. ADAMS et J. C. POLKING, The equivalence of two definitions of capacity. *Proc. of A. M. S.*, t. **37**, 1973, p. 529-534.

[*3*] P. BARAS et M. PIERRE, Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. **34**, 1, 1984.

[*4*] P. BARAS et M. PIERRE, *Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures.* A paraître.

[*5*] H. FUJITA, On the blowing up of solutions of the Cauchy problems for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, t. **13**, 1966, p. 109-124.

[*6*] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[*7*] N. G. MEYERS, A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes. *Math. Scand.*, t. **26**, 1970, p. 255-292.

[*8*] L. NIRENBERG, On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. **13**, 1959, p. 115-162.

[*9*] M. PIERRE, *Problèmes semi-linéaires avec données mesures.* Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, École Polytechnique, Exposé n° XIII, 1983.

[*10*] H. H. SCHAEFER, *Topological vector spaces*. Springer, New York, 1971.
[*11*] F. B. WEISSLER, Local existence and non-existence for semilinear parabolic equations in L^p. *Indiana Math. J.*, t. **29**, 1980, p. 79-102.
[*12*] F. B. WEISSLER, Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation. *Israel J. of Math.*, t. **38**, 1981, p. 29-40.

(Manuscrit reçu le 3 juillet 1984)