ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

OLIVIER RAIMOND

Flots browniens isotropes sur la sphère

Annales de l'I. H. P., section B, tome 35, n° 3 (1999), p. 313-354
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1999__35_3_313_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 35, n° 3, 1999, p. 313-354 *Probabilités et Statistiques*

Flots browniens isotropes sur la sphère

par

Olivier RAIMOND

Université Paris-Sud, Mathématiques,
Bâtiment 425, 91405 Orsay cedex
e-mail: Olivier.Raimond@math.u-psud.fr

RÉSUMÉ. – Nous étudions les flots browniens isotropes sur des espaces homogènes et particulièrement sur la sphère S^{d-1}. Un flot brownien isotrope est dirigé par ξ un champ de vecteurs gaussiens isotrope et est donc caractérisé par une matrice de covariance.

En utilisant les représentations irréductibles de $SO(d)$, nous calculons cette matrice de covariance. Connaissant cette matrice de covariance, nous calculons les exposants de Lyapounov du flot, qui décrivent son comportement asymptotique. En particulier, nous voyons que pour $d \leq 5$, un flot de gradient est toujours stable. © Elsevier, Paris

Mots clés : Flot stochastique, isotropie, représentation de groupe.

ABSTRACT. – We study isotropic Brownian flows on homogeneous spaces and particularly on the sphere S^{d-1}. An isotropic Brownian flow is directed by ξ an isotropic Gaussian vector field and therefore is characterized by a covariance matrix.

Using the irreducible representations of $SO(d)$, we calculate this covariance matrix. Given this covariance matrix, we compute the Lyapounov exponents of the flow, which describe its asymptotic behavior. In particular, we see that for $d \leq 5$ a gradient flow is always stable. © Elsevier, Paris

Classification A.M.S.: 60 G 60, 58 G 32, 60 H 10, 43 A 85, 43 A 90.

INTRODUCTION

Dans cette article, nous étudions les flots browniens isotropes sur des espaces homogènes M et plus particulièrement sur la sphère de dimension $d-1$, S^{d-1}. Les flots browniens isotropes sur $\mathbb{R}^n$ ont déjà été étudiés par Y. Le Jan [13] et par P. Baxendale et T. Harris [5], une étude des flots browniens isotropes sur le plan hyperbolique a aussi été faite dans [15]. Les flots browniens isotropes sur S^{d-1} ont aussi été étudiés par P. Baxendale [4], mais ce travail n'a pas été publié. Les résultats sans preuve de ce travail ont servis de base à cet article.

Dans une première partie, nous définissons ces flots. En particulier, nous montrons qu'ils sont dirigés par ξ, un champ de vecteurs gaussiens isotrope, ce qui veut dire que si G est le groupe des transformations sur M, alors pour tout $g \in G$, $\{(dg_x)^{-1}\xi(gx);\ x \in M\} \stackrel{(\text{loi})}{=} \{\xi(x);\ x \in M\}$.

A l'aide des représentations irréductibles unitaires de G, nous pouvons calculer la matrice de covariance du flot, ou du champ de vecteurs qui dirige le flot. C'est ce que nous faisons dans un cadre général dans la partie 2.1 et pour la sphère dans la partie 2.2. Pour calculer la matrice de covariance des flots browniens isotropes sur S^{d-1}, il faut calculer des éléments matriciels de représentations irréductibles de $SO(d)$, c'est ce qui est fait dans l'appendice, où sont rappelés certains résultats de la théorie de la représentation des groupes.

La matrice de covariance déterminant le flot, il est alors possible d'étudier les propriétés asymptotiques d'un flot brownien isotrope sur S^{d-1}. C'est ce qui est fait dans les parties 3 et 4. Dans la partie 3, nous calculons le spectre de Lyapounov et dans la partie 4, nous étudions le processus distance entre deux points transportés par le flot.

Le premier exposant de Lyapounov permet de discuter de la stabilité du flot. Nous montrons que si $d \leq 5$ et si le flot est un flot de gradient (c'est-à-dire un flot dirigé par un champ de vecteurs qui est le gradient d'un champ de scalaires), le flot est stable ($\lambda_1 < 0$). Si $d > 5$ et le flot est de gradient, le flot est soit stable soit instable ($\lambda_1 \geq 0$). Les flots de divergence nulle (c'est-à-dire les flots dirigés par des champs de vecteurs de divergence nulle et donc qui conserve le volume) sont toujours instables.

1. FLOTS BROWNIENS ISOTROPES

Soit M un espace homogène, c'est-à-dire un espace sur lequel un groupe de Lie G agit transitivement. On a alors $M = G/H$, G est un groupe de transformation sur M et H un sous-groupe de G laissant invariant un point de M. La sphère et le plan hyperbolique sont des exemples d'espaces homogènes.

Sur la sphère $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1\}$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne usuelle, le groupe orthogonal est un groupe de transformation et

$$S^{d-1} = SO(d)/SO(d-1) = O(d)/O(d-1),$$

où $O(d)$ et $SO(d)$ sont respectivement le groupe orthogonal et le groupe spécial orthogonal. Soit $(e_1, ..., e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$, $O(d-1)$ et $SO(d-1)$ sont respectivement les sous-groupes de $O(d)$ et de $SO(d)$ laissant invariant e_d.

Sur le plan hyperbolique $H = \{x \in \mathbb{R}_1^3, \langle x, x\rangle = -1\}$, où $\mathbb{R}_1^3$ est l'espace de Minkovsky muni de la métrique pseudo-euclidienne $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$, les groupes des rotations hyperboliques $O(2,1)$ et $SO(2,1)$ sont des groupes de transformation et

$$H = SO(2,1)/SO(2) = O(2,1)/O(2),$$

$SO(2)$ et $O(2)$ sont respectivement les sous-groupes des rotations de $SO(2,1)$ et $O(2,1)$ laissant invariant e_3.

Nous allons maintenant définir les flots browniens isotropes sur M. On notera $\langle,\rangle$, la métrique sur M (induite par celle de G). Dans [10] et [14], on définit un flot stochastique comme étant un flot de difféomorphisme φ_t de M dans M tel que $\varphi_t(x)$ est solution d'une équation différentielle stochastique

$$d\varphi_t(x) = W(\varphi_t(x), \circ dt), \tag{1.1}$$

avec $\varphi_0(x) = x$. $W(x,t)$ est une semimartingale à valeurs dans les champs de vecteurs et $W(x, \circ dt)$ est le noyau de Stratonovitch associé à W, on notera $W(x, dt)$ le noyau d'Itô associé. Par exemple, si $W(x,t) = \sum_\alpha V_\alpha(x)B_t^\alpha + V(x)t$, où V_α et V sont des champs de vecteurs, $W(x, \circ dt) = \sum_\alpha V_\alpha(x) \circ dB_t^\alpha + V(x)dt$.

On sait (voir [10] et [14]) qu'un flot stochastique est caractérisé par ses caractéristiques locales $\{a, b\}$. Un flot brownien est un flot stochastique dont les caractéristiques locales sont indépendantes de t, c'est le cas si $W(x,t) = \sum_\alpha V_\alpha(x)B_t^\alpha + V(x)t$. En particulier, si φ_t est un flot brownien, alors $\varphi_t(x)$ est un mouvement brownien sur M partant de x.

Les caractéristiques locales a et b représentent respectivement la matrice de covariance et le coefficient de dérive du flot brownien, on a $a(x,y) \in$

$T_xM \times T_yM$ et $b(x) \in T_xM$. Une expression de ces caractéristiques locales est donnée par

$$\begin{aligned}\langle a(x,y), df_x \otimes dg_y \rangle &= a(x,y)(f,g) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} E[(f(\varphi_\varepsilon(x)) - f(x))(g(\varphi_\varepsilon(y)) - g(y))],\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\langle b(x), df_x \rangle = b(x)(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} E[f(\varphi_\varepsilon(x)) - f(x)], \tag{1.3}$$

où f et g sont des fonctions de $C^\infty(M)$ et φ_t est un flot brownien. On remarque que si $W(x,t) = \sum_\alpha V_\alpha(x) B_t^\alpha + V(x)t$, alors $a = \sum_\alpha V_\alpha \otimes V_\alpha$ et $b = V + \frac{1}{2} \sum_\alpha \nabla_{V_\alpha} V_\alpha$, où ∇ est la connexion riemannienne sur M.

DÉFINITION 1.1. – *Un flot brownien φ_t sur un espace homogène $M = G/H$ est isotrope si et seulement si, pour tout $g \in G$:*

$$\{g^{-1}\varphi_t(gx);\ x \in M,\ t \geq 0\} \stackrel{\text{(loi)}}{=} \{\varphi_t(x);\ x \in M,\ t \geq 0\}. \tag{1.4}$$

Un flot brownien étant caractérisé par ses caractéristiques locales, on peut exprimer l'isotropie du flot sur ses caractéristiques locales.

PROPOSITION 1.1. – *Un flot brownien de caractéristiques locales $\{a, b\}$ est isotrope si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout $g \in G$:*

i) $\langle a(gx, gy), dg_x(u) \otimes dg_y(v) \rangle = \langle a(x,y), u \otimes v \rangle$,

ii) $\langle b(gx), dg_x(u) \rangle = \langle b(x), u \rangle$,

pour $(u,v) \in T_xM \times T_yM$ et où g est vu comme une application différentiable de $M \to M$.

Preuve. – Soit φ_t un flot brownien isotrope sur M, il est immédiat de vérifier que ses caractéristiques locales données par (1.2) et (1.3) vérifient *i)* et *ii)*. Réciproquement, soit φ_t un flot brownien dont les caractéristique locales vérifient *i)* et *ii)*. Soit $\psi_t(x) = g^{-1}\varphi_t(gx)$, *i)* et *ii)* entraînent que ψ_t est un flot brownien ayant les mêmes caractéristiques locales que φ_t. Les flots φ_t et ψ_t ont donc la même loi, φ_t est donc isotrope. □

Comme φ_t est un flot brownien, ses caractéristiques locales sont indépendantes de t et il existe ξ un champ de vecteurs gaussiens qui dirige φ_t : a peut alors être définie comme étant la matrice de covariance de ξ et b comme étant l'espérance de ξ. Une conséquence de la proposition 1.1 est la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2. – *Un flot brownien φ_t est isotrope si et seulement si son champ de vecteurs gaussiens associé ξ est isotrope, c'est-à-dire si pour tout $g \in G$,*

$$\{(dg_x)^{-1}\xi(gx);\ x \in M\} \overset{\text{(loi)}}{=} \{\xi(x);\ x \in M\}. \tag{1.5}$$

2. CALCUL DES CARACTÉRISTIQUES LOCALES D'UN FLOT BROWNIEN ISOTROPE

2.1 Cas général

Soit φ_t un flot brownien isotrope sur un espace homogène $M = G/H$. Les caractéristiques locales de φ_t, $\{a, b\}$, sont déterminées par ξ un champ de vecteurs gaussiens isotrope sur M. On a (voir prop. 1.2) $\{(dg_x)^{-1}\xi(gx);\ x \in M\} \overset{\text{(loi)}}{=} \{\xi(x);\ x \in M\}$, pour tout $g \in G$.

Soit U la représentation de H qui à $h \in H$ associe $U(h) = dh_p$, où p est un point de M laissé invariant sous l'action de H (pour S^{d-1}, $p = (0, ..., 0, 1)$). Nous allons nous placer dans le cas où il n'existe pas de vecteur $u \in T_pM$ tel que $U(h)(u) = u$ pour tout $h \in H$. Cette dernière hypothèse entraîne le lemme 2.1. Cette hypothèse est satisfaite dans le cas de la sphère et de l'espace hyperbolique : Dans ces cas $\{dh_p,\ h \in SO(d-1)\} = SO(d-1)$, $T_pM = \mathbb{R}^{d-1}$ et $SO(d-1)$ ne laisse aucun vecteur non nul de $\mathbb{R}^{d-1}$ invariant. Elle n'est par exemple pas satisfaite pour $M = SO(4)/SO(2)$.

LEMME 2.1. – $b(x) = E[\xi(x)] = 0$ *pour tout* $x \in M$.

Preuve. – Comme $M = G/H$, pour tout $x \in M$ il existe $g \in G$ tel que $x = gp$. La relation d'isotropie entraîne que $b(gp) = dg_p b(p)$, donc si $b(p) = 0$, alors $b(x) = 0$ pour tout $x \in M$. Pour tout $h \in H$, $b(p) = b(hp) = dh_p b(p) = U(h)b(p)$, ceci n'est vérifié que si $b(p) = 0$. □

Pour simplifier, nous développerons la méthode de calcul des caractéristiques locales uniquement dans le cas où G est un groupe compact et dans le cas où U est une représentation irréductible de H (cette condition est vérifiée si $M = S^{d-1}$ et $d \geq 4$). Si U n'est pas irréductible, il faudra décomposer U en représentations irréductibles de H. La méthode pour calculer ces caractéristiques locales suit l'article de Yaglom [20].

Nous allons maintenant calculer la matrice de covariance du flot, ce qui revient à calculer $a(x, y)$, la matrice de covariance d'un champ de vecteurs gaussiens isotrope ξ, vérifiant la relation

$$\langle a(gx, gy), dg_x(u) \otimes dg_y(v)\rangle = \langle a(x, y), u \otimes v\rangle, \tag{2.1}$$

pour tout $g \in G$ et pour $(u, v) \in T_xM \times T_yM$, avec $\langle a(x, y), u \otimes v\rangle = E[\langle \xi(x), u\rangle \overline{\langle \xi(y), v\rangle}]$.

Il est possible de définir ξ sur G tel que $\xi(gh) = \xi(g) = \xi(gp) \in T_{gp}M$, pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$. Soit $a(g_1, g_2)$, la nouvelle matrice de covariance, l'isotropie de ξ entraîne que pour $(u, v) \in T_{g_1p}M \times T_{g_2p}M$,

$$\langle a(gg_1, gg_2), dg_{g_1p}(u) \otimes dg_{g_2p}(v)\rangle = \langle a(g_1, g_2), u \otimes v\rangle. \tag{2.2}$$

Le théorème de Peter-Weyl (voir l'appendice) de la théorie de la représentation des groupes permet de décomposer en série de Fourier les fonctions scalaires de $L^2(G)$. C'est pourquoi il est pratique d'introduire le champ gaussien η, avec $\eta(g) = dg_{gp}^{-1}(\xi(g)) \in T_pM$. Comme $\xi(gh) = \xi(g)$,

$$\eta(gh) = dh_p^{-1} \circ dg_{gp}^{-1}(\xi(g)) = dh_p^{-1}(\eta(g)) = U(h^{-1})(\eta(g)). \tag{2.3}$$

La relation d'isotropie (1.5) entraîne que $\{\eta(g_1g);\ g \in G\} \overset{(\text{loi})}{=} \{\eta(g);\ g \in G\}$, pour tout $g_1 \in G$. En effet $\eta(g_1g) = dg_{gp}^{-1} \circ dg_{g_1gp}^{-1}\xi(g_1g) \overset{(\text{loi})}{=} dg_{gp}^{-1}\xi(g) = \eta(g)$. η est un champ gaussien homogène à gauche.

Soit $C(g_1, g_2) = E[\eta(g_1)^t\overline{\eta(g_2)}]$, la matrice de covariance de η. Comme η est homogène à gauche, pour tout g, g_1 et g_2 dans G, on a

$$C(gg_1, gg_2) = C(g_1, g_2). \tag{2.4}$$

Nous voyons que nous pouvons nous limiter au calcul de $C(g, e)$, pour $g \in G$. En effet, $C(g_1, g_2) = C(g_2^{-1}g_1, e)$, où e est l'élément neutre de G.

Le groupe G étant compact, l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles unitaires T^λ de G est dénombrable. Par le théorème de Peter-Weyl, on a la décomposition

$$\eta(g) = \sum_\lambda \sum_{m,n} z_{nm}^\lambda T_{mn}^\lambda(g), \tag{2.5}$$

où $T_{mn}^\lambda(g)$ sont les éléments matriciels de $T^\lambda(g)$, et

$$z_{nm}^\lambda = d_\lambda \int_G \eta(g)\overline{T_{mn}^\lambda(g)}dg, \tag{2.6}$$

où d_λ est la dimension de E^λ, l'espace de base de T^λ et dg la mesure de Haar de G. De plus, on a la condition de convergence

$$\sum_\lambda \sum_{m,n} \frac{1}{d_\lambda} E[\|z_{nm}^\lambda\|^2] < \infty. \tag{2.7}$$

Nous allons maintenant étudier les conditions sur les z_{nm}^λ qu'imposent les relations (2.3) et (2.4).

Comme T^λ restreint à H est une représentation unitaire de H, il existe une famille de sous espaces vectoriels de E^λ, $E^{\lambda\mu}$ tels que $E^\lambda = \oplus_\mu E^{\lambda\mu}$, $E^{\lambda\mu}$ est stable par $T^\lambda(h)$ pour tout $h \in H$ et si $Q^{\lambda\mu}(h) : E^{\lambda\mu} \to E^{\lambda\mu}$, avec $Q^{\lambda\mu}(h)(x) = T^\lambda(h)(x)$ pour $x \in E^{\lambda\mu}$, $Q^{\lambda\mu}$ est une représentation irréductible unitaire de H.

Soit $B^{\lambda\mu}$ une base orthonormée de $E^{\lambda\mu}$, alors $B^\lambda = \cup_\mu B^{\lambda\mu}$ est une base orthonormée de E^λ. De plus, choisissons ces bases de telle sorte que si $Q^{\lambda\mu}$ et $\overline{U}$ sont équivalentes, alors $T_{ij}^\lambda(h) = \overline{U}_{ij}(h)$, où $T_{ij}^\lambda(h)$ (resp. $\overline{U}_{ij}(h)$) sont les éléments matriciels de $T^\lambda(h)$ (resp. de $\overline{U}(h)$) dans $B^{\lambda\mu}$ (resp. dans une base orthonormée de T_pM). On notera Λ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations T^λ qui contiennent une copie de $\overline{U}$ (i.e. des λ pour lesquels il existe μ tel que $Q^{\lambda\mu}$ et $\overline{U}$ sont équivalentes).

LEMME 2.2. – *Les vecteurs z_{nm}^λ de T_pM vérifient la relation*

$$z_{nm,i}^\lambda = 1_\Lambda(\lambda)\delta_{ni} z_m^\lambda, \tag{2.8}$$

avec $z_m^\lambda = z_{im,i}^\lambda$, qui ne dépend pas de i.

Preuve. – Comme U est unitaire, $U(h^{-1}) = U(h)^{-1} = \overline{{}^tU(h)}$. Dans une base de T_pM, (2.3) s'écrit

$$\eta_i(gh) = \sum_k \overline{U}_{ki}(h)\eta_k(g).$$

La décomposition (2.5) entraîne que

$$\sum_\lambda \sum_{m,n} \sum_q z_{nm,i}^\lambda T_{mq}^\lambda(g) T_{qn}^\lambda(h) = \sum_\lambda \sum_{m,n} \sum_k z_{nm,k}^\lambda \overline{U}_{ki}(h) T_{mn}^\lambda(g). \tag{2.9}$$

En multipliant (2.9) par $U_{ji}(h)dh$ et en intégrant sur H, en utilisant les relations d'orthogonalité (A.4) des éléments matriciels des représentations irréductibles de H, on obtient

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_m z_{im,i}^\lambda T_{mj}^\lambda(g) = \sum_\lambda \sum_{m,n} z_{nm,j}^\lambda T_{mn}^\lambda(g). \tag{2.10}$$

Comme $\{T^\lambda_{mn}(g)\}$ forme une base orthogonale de $L^2(G)$, $z^\lambda_{nm,j} = 1_\Lambda(\lambda)\delta_{nj} z^\lambda_{im,i}$. □

Remarque. – Le lemme 2.2 permet de caractériser les champs de vecteurs ξ sur M. Si $x = gp$, $\xi(x) = dg_p(\eta(g))$ et $\eta_i(g) = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_m z^\lambda_m T^\lambda_{mi}(g)$. Ainsi, $\xi = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_m z^\lambda_m \xi^\lambda_m$, où $\xi^\lambda_m(x) = dg_p T^\lambda_m(g)$, avec $T^\lambda_m(g) = \sum_i T^\lambda_{mi}(g)e_i$.

LEMME 2.3. – *Soit* $f^\lambda_{ns} = d_\lambda \int_G C(g,e)\overline{T^\lambda_{sn}(g)}dg$, *les vecteurs* z^λ_{nm} *de* T_pM *vérifient la relation*

$$E[z^\lambda_{nm}\,{}^t\overline{z^{\lambda'}_{sr}}] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{mr} f^\lambda_{ns}, \tag{2.11}$$

avec $f^\lambda_{ns,ij} = 1_\Lambda(\lambda)\delta_{ni}\delta_{sj} f^\lambda$, *où* $f^\lambda = E[z^\lambda_m \overline{z^\lambda_m}]$, *qui ne dépend pas de* m. *De plus, on a la condition de convergence* $\sum_\lambda f^\lambda < \infty$.

Preuve. – On a

$$\begin{aligned} E[z^\lambda_{nm}\,{}^t\overline{z^{\lambda'}_{sr}}] &= E[d_\lambda d_{\lambda'} \int_G\int_G \eta(g_1)\,{}^t\overline{\eta(g_2)T^\lambda_{mn}(g_1)}T^{\lambda'}_{rs}(g_2)dg_1dg_2] \\ &= d_\lambda d_{\lambda'} \int_G\int_G C(g_1,g_2)\overline{T^\lambda_{mn}(g_1)}T^{\lambda'}_{rs}(g_2)dg_1dg_2. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $g = g_2^{-1}g_1$, on obtient

$$\begin{aligned} E[z^\lambda_{nm}\,{}^t\overline{z^{\lambda'}_{sr}}] &= d_\lambda d_{\lambda'} \int_G\int_G C(g,e)\left(\sum_q \overline{T^\lambda_{mq}(g_2)T^\lambda_{qn}(g)}\right)T^{\lambda'}_{rs}(g_2)dg\,dg_2 \\ &= d_\lambda \int_G C(g,e)\delta_{mr}\delta_{\lambda\lambda'}\overline{T^\lambda_{sn}(g)}dg = \delta_{mr}\delta_{\lambda\lambda'} f^\lambda_{ns}. \end{aligned}$$

Comme $f^\lambda_{ns,ij} = E[z^\lambda_{nm,i}\overline{z^\lambda_{sm,j}}]$, le lemme 2.2 permet de conclure. La condition de convergence (2.7) devient $\sum_\lambda f^\lambda < \infty$. □

Ainsi, on calcule la matrice de covariance d'un champ gaussien homogène à gauche sur M :

$$\begin{aligned} C_{ij}(g,e) = E[\eta_i(g)\overline{\eta_j(e)}] &= E\left[\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_m z^\lambda_m T^\lambda_{mi}(g)\right)\left(\sum_{\lambda'\in\Lambda}\sum_{m'} z^{\lambda'}_j \delta_{m'j}\right)\right] \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} f^\lambda T^\lambda_{ji}(g). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Connaissant $C(g,e)$, il est alors facile de calculer la matrice de covariance de ξ.

Réciproquement, la donnée de réels $f^\lambda \geq 0$ tels que $\sum_\lambda f^\lambda < \infty$ permet de construire un champ de vecteurs gaussiens isotrope. Il suffit de se donner des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes z_m^λ de variance f^λ. On peut alors définir $\eta(g)$ par la relation

$$\eta_i(g) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_m z_m^\lambda T_{mi}^\lambda(g).$$

Connaissant η, il est alors facile de calculer ξ.

2.2 Cas où $M = S^{d-1}$

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant, qui donne une décomposition de la matrice de covariance d'un flot brownien isotrope sur S^{d-1}. Par le lemme 2.1 nous savons déjà que le coefficient de dérive du flot est nul.

THÉORÈME 2.1. – *La matrice de covariance d'un flot brownien isotrope (ou d'un champ de vecteurs gaussiens isotrope) sur S^{d-1}, pour $d \geq 3$, s'écrit*

$$\langle a(x,y), u \otimes v\rangle = \alpha(t)\langle u,v\rangle + \beta(t)\langle u,y\rangle\langle v,x\rangle, \tag{2.13}$$

avec $t = \langle x,y\rangle$ *et*

$$\alpha(t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l\gamma_l(t) + \sum_{l=1}^{\infty} b_l\left(t\gamma_l(t) - \frac{1-t^2}{d-2}\gamma_l'(t)\right), \tag{2.14}$$

$$\beta(t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l\gamma_l'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} b_l\left(-\gamma_l(t) - \frac{t}{d-2}\gamma_l'(t)\right), \tag{2.15}$$

où $\gamma_l(t) = C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(t)/C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(1)$. C_l^p *sont les polynômes de Gegenbauer définis dans l'appendice. De plus,* a_l *et* b_l *doivent être positifs et satisfaire aux conditions de convergence* $\sum_l a_l < \infty$ *et* $\sum_l b_l < \infty$.

Remarque. – Comme $S^{d-1} = SO(d)/SO(d-1)$, on immergera S^{d-1} dans $\mathbb{R}^d$ et on identifiera alors dg_x avec g, pour $g \in SO(d)$.

2.2.1 *Preuve du théorème 2.1 dans le cas* $d \geq 4$

Dans le cas $d \geq 4$, la représentation U, telle que $U(h) = h$ pour $h \in SO(d-1)$, est une représentation irréductible de $SO(d-1)$. On peut donc appliquer les résultats de la partie 2.1. Nous avons donc, en utilisant les résultats de l'appendice donnant le calcul des éléments matriciels des représentations de $SO(d)$,

$$C_{ij}(g)=\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_l\alpha_1^l(t)+\sum_{l=1}^{\infty} b_l\alpha_2^l(t)\right)g_{ji}+\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_l\beta_1^l(t)+\sum_{l=1}^{\infty} b_l\beta_2^l(t)\right)g_{di}g_{jd}$$
$$= \alpha(t)g_{ji} + \beta(t)g_{di}g_{jd},$$

en notant $t = g_{dd}$, α_1^l, β_1^l, α_2^l, β_2^l, α et β sont respectivement donnés par (A.33), (A.37), (A.38), (2.14) et (2.15).

Soit x et y deux points de S^{d-1}, il existe g_1 et g_2 tels que $x = g_1p$ et $y = g_2p$, avec $p = (0,...,0,1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. En posant $g = g_2^{-1}g_1$,

$$\begin{aligned}
\langle a(x,y), u \otimes v\rangle &= E[\langle\xi(g_1p), u\rangle\overline{\langle\xi(g_2p), v\rangle}]\\
&= E[\langle\eta(g_1), g_1^{-1}u\rangle\overline{\langle\eta(g_2), g_2^{-1}v\rangle}]\\
&= E[\langle\eta(g), g_1^{-1}u\rangle\overline{\langle\eta(e), g_2^{-1}v\rangle}]\\
&= \alpha(t)g_{ji}(g_1^{-1}u)_i(g_2^{-1}v)_j + \beta(t)g_{di}g_{jd}(g_1^{-1}u)_i(g_2^{-1}v)_j\\
&= \alpha(t)\langle u,v\rangle + \beta(t)\langle u,y\rangle\langle v,x\rangle.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration dans le cas $d \geq 4$.

2.2.2 *Preuve du théorème 2.1 dans le cas* $d = 3$

Comme $\langle a(x,y), u \otimes v\rangle = E[\langle\xi(x), u\rangle\langle\xi(y), v\rangle]$ et ξ est un champ de vecteurs gaussiens isotrope, pour tout $g \in O(3)$, $\langle a(gx,gy), gu \otimes gv\rangle = \langle a(x,y), u \otimes v\rangle$.

Définissons ξ sur $O(3)$ tel que $\xi(gh) = \xi(g) = \xi(gp) \in T_{gp}S^2$ pour tout $g \in O(3)$, tout $h \in O(2)$ et $p = (0,0,1)$. Soit $a(g_1,g_2)$, la nouvelle matrice de covariance. La relation d'isotropie (1.5) entraîne que (2.2) est satisfaite pour tout g, g_1 et g_2 dans $O(3)$.

De la même façon que dans la partie 2.1, on introduit le champ gaussien homogène à gauche $\eta(g) = g^{-1}\xi(g) \in T_pS^2 = \mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. On a $\eta(gh) = h^{-1}\eta(g)$ pour tout $h \in O(2)$ et $C(g_1,g_2) = C(gg_1,gg_2)$ pour tout g, g_1 et g_2 dans $O(3)$.

Nous allons d'abord étudier la restriction de η à $SO(3)$. En utilisant les représentations irréductibles $\{T^{3l}\}$ de $SO(3)$, définies dans l'appendice, pour tout $g \in SO(3)$,

$$\eta(g) = \sum_l \sum_{m,n} z_{nm}^l T_{mn}^{3l}(g), \tag{2.16}$$

où $T^{3l}_{mn}(g)$ sont les éléments matriciels de $T^{3l}(g)$ dans la base canonique de $\mathcal{H}_{3l}$ et

$$z^l_{nm} = d_l \int_{SO(3)} \eta(g)\overline{T^{3l}_{mn}(g)}dg, \tag{2.17}$$

avec $d_l = \dim\mathcal{H}_{3l}$. De plus, on a la condition de convergence

$$\sum_l \sum_{m,n} \frac{1}{d_l} E[\|z^l_{nm}\|^2] < \infty. \tag{2.18}$$

Nous allons maintenant étudier les conditions sur les z^l_{nm} qu'imposent l'isotropie et la relation $\eta(gh) = h^{-1}\eta(g)$ pour tout $h \in SO(2)$. Pour cela, il est utile d'immerger $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ muni de sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel et de faire un changement de base dans $\mathbb{C}^2$ de telle sorte que tout h de $SO(2)$ est diagonalisé. Ainsi, nous décomposons en représentations irréductibles la représentation U de $SO(2)$ telle que $U(h) = h$ pour tout $h \in SO(2)$.

Soient $e_\pm = \frac{e_1 \pm ie_2}{\sqrt{2}}$, alors (e_+, e_-) est une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$. Dans la base (e_1, e_2), une rotation h de $SO(2)$ s'écrit sous la forme

$$h = h(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Dans la base (e_+, e_-), $h(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$ et $z^l_{nm} = (z^l_{nm,+}, z^l_{nm,-})$, avec $z^l_{nm,\pm} = \frac{z^l_{nm,1} \mp iz^l_{nm,2}}{\sqrt{2}}$.

LEMME 2.4. – *Les vecteurs z^l_{mn} vérifient la relation $z^l_{nm,\zeta} = 1_{l\geq 1}\delta_{n\zeta} z^l_{m,\zeta}$, avec $z^l_{m,\zeta} = z^l_{\zeta m,\zeta}$ et $\zeta \in \{+,-\}$.*

Preuve. – La preuve est identique à celle du lemme 2.2. □

LEMME 2.5. – *Soit $f^l_{ns} = d_l \int_{SO(3)} C(g,e)\overline{T^{3l}_{sn}(g)}dg$, les vecteurs z^l_{nm} vérifient la relation*

$$E[z^l_{nm}\, {}^t\overline{z^{l'}_{sr}}] = \delta_{ll'}\delta_{mr} f^l_{ns}, \tag{2.19}$$

avec $f^l_{ns,\zeta\zeta'} = 1_{l\geq 1}\delta_{n\zeta}\delta_{s\zeta'} f^l_{\zeta\zeta'}$, où $f^l_{\zeta\zeta'} = E[z^l_{m,\zeta}\overline{z^l_{m,\zeta'}}]$, qui ne dépend pas de m. De plus, on a la condition de convergence $\sum_{l\geq 1}[f^l_{++} + f^l_{--}] < \infty$.

Preuve. – La preuve est identique à celle du lemme 2.3. □

Connaissant η sur $SO(3)$, il est possible de connaître η sur $O(3)$, en utilisant la rotation τ de $O(2)$, où $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2): Pour tout $g \in O(3)$, $g\tau \in SO(3)$, comme $\eta(g\tau) = \tau\eta(g)$, on a $\eta(g) = \tau\eta(g\tau)$. On vérifie facilement qu'avec une telle définition de η, $\eta(gh) = h^{-1}\eta(g)$ pour tout $g \in O(3)$ et tout $h \in O(2)$ (en effet, pour $g \in SO(3)$ et $h \in SO(2)$, $\eta(g\tau h\tau) = \tau h^{-1}\tau\eta(g) = (h\tau)^{-1}\eta(g\tau)$).

Il faut maintenant que la famille de vecteurs $\{z_m^l\}$ soit telle que η ainsi défini est un champ gaussien homogène à gauche sur $O(3)$, c'est-à-dire que la relation $\{\eta(g_1 g);\ g \in O(3)\} \overset{\text{(loi)}}{=} \{\eta(g);\ g \in O(3)\}$ pour tout g_1 dans $O(3)$. On voit que cette relation est satisfaite si et seulement si $\{\eta(\tau g\tau);\ g \in SO(3)\} \overset{\text{(loi)}}{=} \{\tau\eta(g);\ g \in SO(3)\}$. (En effet, si g_1 et g_2 sont dans $SO(3)$, on a $\eta(g_1\tau g_2\tau) \overset{\text{(loi)}}{=} \eta(\tau g_2\tau) \overset{\text{(loi)}}{=} \tau\eta(g_2) = \eta(g_2\tau)$). Cette condition implique le lemme suivant.

LEMME 2.6. – *La famille de vecteurs $\{z_m^l\}$ vérifie la relation* $(z_{m+}^l, z_{m-}^l) \overset{\text{(loi)}}{=} (z_{m-}^l, z_{m+}^l)$.

Preuve. – Dans la base (e_+, e_-), $\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la relation $\eta(\tau g\tau) \overset{\text{(loi)}}{=} \tau\eta(g)$ implique que

$$\begin{aligned}(z_{m+}^l, z_{m-}^l) &= d_l\left(\int_{SO(3)} \eta_+(g)\overline{T_{m+}^{3l}(g)}dg,\ \int_{SO(3)} \eta_-(g)\overline{T_{m-}^{3l}(g)}dg\right)\\ &\overset{\text{(loi)}}{=} d_l\left(\int_{SO(3)} \eta_-(\tau g\tau)\overline{T_{m+}^{3l}(g)}dg,\ \int_{SO(3)} \eta_+(\tau g\tau)\overline{T_{m-}^{3l}(g)}dg\right).\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $g_1 = \tau g\tau$, $g_1 \in SO(3)$,

$$\begin{aligned}(z_{m+}^l, z_{m-}^l) \overset{\text{(loi)}}{=} d_l\Bigg(&\int_{SO(3)} \eta_-(g_1)\overline{T_{m+}^{3l}(\tau g_1\tau)}dg_1,\\ &\int_{SO(3)} \eta_+(g_1)\overline{T_{m-}^{3l}(\tau g_1\tau)}dg_1\Bigg).\end{aligned}$$

On remarque que $T_{m\pm}^{3l}(\tau g_1\tau) = T_{m\mp}^{3l}(g_1)$, d'où $(z_{m+}^l, z_{m-}^l) \overset{\text{(loi)}}{=} (z_{m,-}^l, z_{m,+}^l)$. $\square$

LEMME 2.7. – *Soit $z_{m\zeta}^l = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_{m1}^l + i\zeta z_{m2}^l)$, les complexes $f_{\zeta\zeta'}^l$ vérifient les relations*

$$f_{++}^l = f_{--}^l = \frac{1}{2}E[|z_{m1}^l|^2 + |z_{m2}^l|^2],$$
$$f_{+-}^l = f_{-+}^l = \frac{1}{2}E[|z_{m1}^l|^2 - |z_{m2}^l|^2].$$

Preuve. – Par définition de $f^l_{\zeta\zeta'}$,

$$f^l_{\zeta\zeta'} = E[z^l_{m\zeta}\overline{z^l_{m\zeta'}}] = \frac{1}{2}E[|z^l_{m1}|^2 + \zeta\zeta'|z^l_{m2}|^2] + \frac{i}{2}\zeta E[z^l_{m2}\overline{z^l_{m1}}] - \frac{i}{2}\zeta' E[z^l_{m1}\overline{z^l_{m2}}].$$

Par le lemme 2.6, $f^l_{++} = f^l_{--}$ et $f^l_{+-} = f^l_{-+}$, ce qui entraîne que $E[z^l_{m2}\overline{z^l_{m1}}] = \overline{E[z^l_{m1}\overline{z^l_{m2}}]}$ et $E[z^l_{m2}\overline{z^l_{m1}}] = -E[z^l_{m1}\overline{z^l_{m2}}]$. Ainsi, $E[z^l_{m2}\overline{z^l_{m1}}] = E[z^l_{m1}\overline{z^l_{m2}}] = 0$, d'où le lemme. □

Remarque. – On a donc $f^l_{++} \geq 0$ et $f^l_{++} \geq f^l_{+-} \geq -f^l_{++}$ et on peut les choisir arbitrairement à condition qu'ils vérifient ces conditions et la condition de convergence $\sum_l f^l_{++} < \infty$.

On peut maintenant calculer la matrice de covariance de η. Comme $C(g_1, g_2) = C(g, e) = C(g)$ où $g = g_2^{-1}g_1$, on peut se restreindre au calcul de $C(g)$. Il suffit en fait de calculer $C(g)$ dans le cas où, dans la base (e_1, e_2, e_3),

$$g = g(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

LEMME 2.8. – *La matrice de covariance d'un champ gaussien homogène à gauche sur $O(3)$ tel que pour tout $h \in O(2)$, $\eta(gh) = h^{-1}\eta(g)$, est telle que*

$$C_{++}(g) = C_{--}(g) = \sum_{l\geq 1} f^l_{++} T^{3l}_{++}(g), \tag{2.20}$$

$$C_{+-}(g) = C_{-+}(g) = \sum_{l\geq 1} f^l_{+-} T^{3l}_{+-}(g), \tag{2.21}$$

avec $f^l_{++} \geq f^l_{+-} \geq -f^l_{++}$ tels que $\sum_l f^l_{++} < \infty$.

Preuve. – Par définition de $C_{\zeta\zeta'}(g)$,

$$\begin{aligned} C_{\zeta\zeta'}(g) &= E\left[\left(\sum_l \sum_m z^l_{m\zeta} T^{3l}_{m\zeta}(g)\right)\left(\sum_{l'} \sum_r \overline{z^{l'}_{r\zeta'} T^{3l'}_{r\zeta'}(e)}\right)\right] \\ &= \sum_{l,l'} \sum_{m,r} E[z^l_{m\zeta}\overline{z^{l'}_{r\zeta'}}] T^{3l}_{m\zeta}(g)\delta_{r\zeta'} = \sum_l f^l_{\zeta\zeta'} T^{3l}_{\zeta'\zeta}(g). \end{aligned}$$

Comme $T^{3l}_{++}(g) = T^{3l}_{--}(g)$ et $T^{3l}_{+-}(g) = T^{3l}_{-+}(g)$, on peut conclure à l'aide du lemme 2.7. □

A partir de la matrice de covariance de η, on peut calculer la matrice de covariance de ξ. (2.2) permet de se restreindre au calcul de $a(g, e)$ pour

$g \in SO(3)$. En fait, nous pouvons nous limiter au calcul de $a(g(\theta), e)$, donc au calcul de $\langle a(x,y), u \otimes v\rangle$ pour $x = g(\theta)y$ et $y = (0,0,1)$. On a alors $\langle a(x,y), u \otimes v\rangle = E[\langle \eta(g), g^{-1}u\rangle \overline{\langle \eta(e), v\rangle}]$. Comme $g^{-1}u \in T_y S^2$ et $v \in T_y S^2$, $g^{-1}u = (u_+, u_-, 0)$ et $v = (v_+, v_-, 0)$ dans la base (e_+, e_-, e_3). Ainsi

$$\begin{aligned}\langle a(x,y), u \otimes v\rangle &= C_{++}(g)(u_+\overline{v_+} + u_-\overline{v_-}) + C_{+-}(g)(u_+\overline{v_-} + u_-\overline{v_+})\\ &= (C_{++}(g) + C_{+-}(g))\langle u, v\rangle - ((1-\cos\theta)C_{++}(g)\\ &\qquad -(1-\cos\theta)C_{+-}(g))\frac{\langle u, y\rangle\langle v, x\rangle}{\sin^2\theta}\end{aligned}$$

Du lemme 2.8 et de (A.34), on déduit que

$$C_{++}(g) = \sum_{l\geq 1} f^l_{++} T^{3l}_{++}(g) = \sum_{l\geq 1} \frac{1}{2} f^l_{++} \frac{d}{d\theta}(\gamma_l(\cos\theta)\sin\theta) + \frac{1}{2} f^l_{++}\gamma_l(\cos\theta),$$

$$C_{+-}(g) = \sum_{l\geq 1} f^l_{+-} T^{3l}_{+-}(g) = \sum_{l\geq 1} \frac{1}{2} f^l_{+-} \frac{d}{d\theta}(\gamma_l(\cos\theta)\sin\theta) - \frac{1}{2} f^l_{+-}\gamma_l(\cos\theta).$$

Soit $a_l = \frac{f^l_{++} - f^l_{+-}}{2} = \frac{1}{2}E[|z^l_{m2}|^2]$ et $b_l = \frac{f^l_{++} + f^l_{+-}}{2} = \frac{1}{2}E[|z^l_{m1}|^2]$, a_l et b_l sont des réels positifs pouvant être choisis arbitrairement tels que $\sum_l a_l < \infty$ et $\sum_l b_l < \infty$. En développant les calculs et en posant $t = \cos\theta$, on retrouve la matrice de covariance du théorème 2.1.

Réciproquement, pour construire un champ de vecteurs gaussiens isotrope à partir de réels positifs a_l et b_l, il suffit de se donner des variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées z^l_{m1} et z^l_{m2} telles que $a_l = \frac{1}{2}E[|z^l_{m2}|^2]$ et $b_l = \frac{1}{2}E[|z^l_{m1}|^2]$, on peut alors construire $\eta(g)$ par la relation (on a $z^l_{m\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(z^l_{m1} + i\zeta z^l_{m2})$)

$$\eta_\zeta(g) = \sum_l \sum_m z^l_{m\zeta} T^{3l}_{m\zeta}(g).$$

On obtient $\xi(g)$ par la relation $\xi(g) = g\eta(g)$ et $\xi(x) = \xi(gp) = \xi(g)$, pour $g \in SO(3)$ tel que $x = gp$. Ceci achève la preuve du théorème 2.1. □

2.2.3 *Les flots de divergence nulle et les flots de gradient*

Soient $(x^i_1, 1 \leq i \leq d-1)$ et $(x^j_2, 1 \leq j \leq d-1)$ deux systèmes de coordonnées locales. On notera $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i_1}$ et $Y_j = \frac{\partial}{\partial x^j_2}$, $X_i \otimes Y_j \in T_{x_1}S^{d-1} \otimes T_{x_2}S^{d-1}$. On note ∇, la connexion riemannienne et Γ^{1k}_{ij} et Γ^{2k}_{ij} les coefficients de Christoffel liés à ces deux systèmes de coordonnées locales, on a alors $\nabla_{X_i}X_j = \Gamma^{1k}_{ij}X_k$. Si V est un champ de vecteurs, on notera $V^i_k = (X_k\delta^i_r + \Gamma^i_{kr})V^r$, on a alors $V^i_k X_i = \nabla_{X_k}V$.

Dans ces systèmes de coordonnées locales, $a = a^{ij} X_i \otimes Y_j$. Soit $C_{kl}^{ij}(x) = (X_k \delta_r^i + \Gamma_{kr}^{1i})(Y_l \delta_s^j + \Gamma_{ls}^{2j}) a^{rs}(x_1, x_2)_{|x_1 = x_2 = x}$, alors $\nabla_{X_k} \nabla_{Y_l} a(x, x) = C_{kl}^{ij}(x) X_i(x) \otimes Y_j(x)$.

LEMME 2.9. – *Si les systèmes de coordonnées locales définis ci-dessus sont identiques et normaux en x (on a alors $\Gamma_{ij}^{1k}(x) = \Gamma_{ij}^{2k}(x) = 0$),*

$$C_{kl}^{ij}(x) = \alpha'(1) \delta_{kl} \delta^{ij} + \alpha(1) \delta_k^i \delta_l^j + \beta(1)(\delta_l^i \delta_k^j + \delta_k^i \delta_l^j).$$

Preuve. – Si les systèmes de coordonnées locales sont normaux en x,

$$\begin{aligned} & X_k Y_l \langle a(x_1, x_2), X_i \otimes Y_j \rangle_{|x_1 = x_2 = x} \\ & \quad = X_k Y_l (a^{rs}(x_1, x_2) \langle X_r, X_i \rangle \langle Y_s, Y_j \rangle)_{|x_1 = x_2 = x} \\ & \quad = X_k Y_l a^{ij}(x, x) = C_{kl}^{ij}(x). \end{aligned}$$

Faisons les calculs pour $x = p$ (on peut toujours s'y ramener par une rotation) et les systèmes de coordonnées locales définis par $x_1^i(y) = x_2^i(y) = y_i$. Alors, en identifiant $X_i(y)$ et $e_i - \frac{y_i}{y_d} e_d$,

$$\begin{aligned} C_{kl}^{ij}(p) = {} & X_k Y_l \Bigg[\alpha(\langle x_1, x_2 \rangle) \left(\delta^{ij} + \frac{x_{1i} x_{2j}}{x_{1d} x_{2d}} \right) \\ & + \beta(\langle x_1, x_2 \rangle) \left(x_{2i} - \frac{x_{1i} x_{2d}}{x_{1d}} \right) \left(x_{1j} - \frac{x_{2j} x_{1d}}{x_{2d}} \right) \Bigg]_{|x_1 = x_2 = p} \\ = {} & X_k \left[\alpha'(x_{1d}) \delta^{ij} x_{1l} + \alpha(x_{1d}) \frac{x_{1i} \delta_l^j}{x_{1d}} + \beta(x_{1d})(\delta_l^i x_{1j} + \delta_l^j x_{1i}) \right]_{|x_1 = p} \\ = {} & \alpha'(1) \delta_{kl} \delta^{ij} + \alpha(1) \delta_k^i \delta_l^j + \beta(1)(\delta_l^i \delta_k^j + \delta_k^i \delta_l^j). \quad \square \end{aligned}$$

LEMME 2.10. – *Soit ξ, un champ de vecteurs gaussiens isotrope sur S^{d-1}, de matrice de covariance donnée par le théorème 2.1, ξ est un champ de gradient si et seulement si $\alpha'(t) = \beta(t)$. ξ est un champ de divergence nulle si et seulement si $\alpha'(1) + (d-1)\alpha(1) + d\beta(1) = 0$.*

Preuve. – a) Soit ξ un champ de vecteurs isotrope. Une condition nécéssaire et suffisante pour que $\operatorname{div} \xi(x) = 0$ presque sûrement est que $E[|\operatorname{div} \xi(x)|^2] = 0$. Dans un système de coordonnées locales normal en x, $\operatorname{div} \xi(x) = X_i(\xi^i)(x)$. Comme $a^{ij} = E[\xi^i \overline{\xi^j}]$,

$$\begin{aligned} E[|\operatorname{div} \xi(x)|^2] & = X_i Y_j a^{ij}(x_1, x_2)_{|x_1 = x_2 = x} = C_{ij}^{ij}(x) \\ & = (d-1)[\alpha'(1) + (d-1)\alpha(1) + d\beta(1)]. \end{aligned}$$

Donc div $\xi(x) = 0$ presque sûrement si et seulement si $\alpha'(1) + (d-1)\alpha(1) + d\beta(1) = 0$.

b) Soit ξ un champ de vecteurs isotrope qui est un champ de gradient, c'est-à-dire tel qu'il existe un champ de scalaires W vérifiant $\xi = \nabla W$. L'isotropie de ξ oblige que

$$\forall g \in SO(d), \quad \{W(gx),\ x \in S^{d-1}\} \stackrel{\text{(loi)}}{=} \{W(x),\ x \in S^{d-1}\} \tag{2.22}$$

et donc $E[W(x)\overline{W(y)}] = f(\langle x, y\rangle)$ pour une certaine fonction de covariance f.

Dans les systèmes de coordonnées (x_1^i) et (x_2^j), qu'on choisit respectivement normaux en x et en y, $\xi^i(x) = X_i W(x)$ et $\xi^j(y) = Y_j W(y)$ et si $(u,v) \in T_x S^{d-1} \times T_y S^{d-1}$,

$$\begin{aligned} a^{ij}(x,y) &= E[X_i W(x) Y_j \overline{W(y)}] = X_i Y_j f(\langle x,y\rangle) \\ &= f'(\langle x,y\rangle)\langle X_i, Y_j\rangle + f''(\langle x,y\rangle)\langle X_i, y\rangle\langle Y_j, x\rangle \\ &= \alpha(\langle x,y\rangle)\langle X_i, Y_j\rangle + \beta(\langle x,y\rangle)\langle X_i, y\rangle\langle Y_j, x\rangle, \end{aligned}$$

d'où $\alpha = f'$ et $\beta = \alpha' = f''$.

Réciproquement, soit ξ un champ de vecteurs gaussiens isotrope tel que sa matrice de covariance donnée par le théorème 2.1 vérifie $\beta = \alpha'$. On sait qu'il existe W et η, un champ de scalaires et un champ de vecteurs de divergence nulle tels que $\xi = \nabla W + \eta$. W et η sont isotropes. Il est alors facile de voir que la matrice de covariance de η s'écrit de la façon suivante $\langle a_\eta(x,y), u \otimes v\rangle = \alpha_2(t)\langle u,v\rangle + \alpha_2'(t)\langle u,y\rangle\langle v,x\rangle$. Comme η est de divergence nulle, $(d-1)\alpha_2(1) + (d+1)\alpha_2'(1) = 0$, ce qui n'est possible que si $\alpha_2 = 0$. On a donc $\eta = 0$ p.s. et $\xi = \nabla W$ p.s. □

LEMME 2.11. – *Soit ξ, un champ de vecteurs gaussiens isotrope, de matrice de covariance donnée par le théorème 2.1, alors*

ξ est un champ de gradient si et seulement si $b_l = 0$ pour tout $l \geq 1$.

ξ est un champ de divergence nulle si et seulement si $a_l = 0$ pour tout $l \geq 1$.

Preuve. – Des expressions de α et de β, données par (2.14) et (2.15), il est clair que si $b_l = 0$ pour tout $l \geq 1$, alors $\beta = \alpha'$. Par le lemme 2.10, ξ est alors un champ de gradient.

Si $a_l = 0$ pour tout $l \geq 1$, on vérifie que $\alpha'(1) + (d-1)\alpha(1) + d\beta(1) = 0$. Par le lemme 2.10, ξ est un champ de divergence nulle.

Enfin, soit ξ un champ de vecteurs gaussiens isotrope, alors $\xi \stackrel{\text{(loi)}}{=} \xi_1 + \xi_2$, où ξ_1 et ξ_2 sont des champs de vecteurs gaussiens isotropes indépendants ayant pour matrices de covariance a_1 et a_2, avec

$$\begin{aligned}\langle a_1(x,y), u \otimes v\rangle &= \sum_{l\geq 1} a_l \gamma_l(t)\langle u,v\rangle + \sum_{l\geq 1} a_l \gamma_l'(t)\langle u,y\rangle\langle v,x\rangle \\ &= \alpha_1(t)\langle u,v\rangle + \beta_1(t)\langle u,y\rangle\langle v,x\rangle, \\ \langle a_2(x,y), u\otimes v\rangle &= \sum_{l\geq 1} b_l\left[t\gamma_l(t) - \left(\frac{1-t^2}{d-2}\right)\gamma_l'(t)\right]\langle u,v\rangle \\ &\quad - \sum_{l\geq 1} b_l\left[\gamma_l(t) + \frac{t}{d-2}\gamma_l'(t)\right]\langle u,y\rangle\langle v,x\rangle \\ &= \alpha_2(t)\langle u,v\rangle + \beta_2(t)\langle u,y\rangle\langle v,x\rangle,\end{aligned}$$

où $(u,v) \in T_xS^{d-1} \times T_yS^{d-1}$. On a bien $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Ainsi, ξ_1 est un champ de gradient et ξ_2 un champ de divergence nulle. Donc, si ξ est un champ de gradient, $\xi_2 = 0$, et si ξ est un champ de divergence nulle, $\xi_1 = 0$. □

Le lemme 2.11 donne une décomposition des champs de vecteurs gaussiens isotropes sur S^{d-1} en une partie champ de gradient et une partie champ de divergence nulle. Ces champs de vecteurs ne sont pas forcément C^∞.

LEMME 2.12. – *Soit ξ un champ de vecteurs gaussiens isotrope, de matrice de covariance donnée par le théorème 2.1, alors ξ est C^∞ si et seulement si pour tout entier k, a_l et b_l vérifient $\sum_{l\geq 1} a_l l^k < \infty$ et $\sum_{l\geq 1} b_l l^k < \infty$.*

Preuve. – Nous avons vu qu'il était possible de trouver W et η tels que $\xi = \nabla W + \eta$, où η est un champ de vecteurs gaussiens isotrope de divergence nulle et W un champ de scalaires isotrope. Comme $\Delta W = \operatorname{div}\xi$, si ξ est C^∞, W doit l'être aussi. On voit donc qu'il faut que $\sum_{l\geq 1} a_l\gamma_l(t)$ soit C^∞.

Pour que ξ soit C^∞, il faut et il suffit que α et β soient C^∞. On voit alors facilement qu'une condition nécéssaire et suffisante pour que ξ soit C^∞ est que $\sum_{l\geq 1} a_l\gamma_l(t)$ et $\sum_{l\geq 1} b_l\gamma_l(t)$ soient C^∞.

Par le lemme de Sobolev (voir [22]), il faut et il suffit que $\sum_{l\geq 1} a_l\gamma_l(t)$ et $\sum_{l\geq 1} b_l\gamma_l(t)$ soient dans $\Omega_k = \{f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\|\frac{d^k}{dt^k} f(t)\|_{L_2}^k < \infty\}$ pour tout entier k, où $\|f\|_{L^2}^k = \int_{-1}^1 f^2(t)(1-t^2)^{k+\frac{d-1}{2}}dt$ (une fonction C^∞ sur $[-1,1]$ sera dans tout les Ω_k).

Comme $\gamma_l(t) = C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(t)/C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(1)$,

$$\frac{d^k}{dt^k}\sum_{l\geq 1} a_l\gamma_l(t) = \sum_{l\geq 1} a_l \frac{1}{C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(1)} \times \frac{2^k\Gamma(\frac{d}{2}+k)}{\Gamma(\frac{d}{2})} C_{l-k-1}^{\frac{d}{2}+k}(t).$$

Donc, $\sum_{l\geq 1} a_l\gamma_l(t) \in \Omega_k$ si et seulement si

$$\sum_{l,\mu\geq k+1} \frac{a_l a_\mu}{C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(1)C_{\mu-1}^{\frac{d}{2}}(1)} \left(\frac{2^k\Gamma(\frac{d}{2}+k)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^2 \times \int_{-1}^{1} C_{l-k-1}^{\frac{d}{2}+k}(t)C_{\mu-k-1}^{\frac{d}{2}+k}(t)(1-t^2)^{k+\frac{d-1}{2}}dt < \infty.$$

Par la relation d'orthogonalité (A.14) des polynômes de Gegenbauer, cette condition de convergence est équivalente à

$$\sum_{l\geq k+1} a_l^2 \left(\frac{(l-1)!\Gamma(d)}{\Gamma(d+l-1)}\right)^2 \left(\frac{2^k\Gamma(\frac{d}{2}+k)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^2 \times \frac{\pi\Gamma(d+k+l-1)}{2^{2k+d-1}(l-k-1)!(\frac{d}{2}+l-1)\Gamma^2(\frac{d}{2}+k)} < \infty.$$

Pour l grand, le terme général de cette série est équivalent à $Ca_l^2 l^{2k-1}$. On voit donc que pour que $\sum_{l\geq 1} a_l\gamma_l(t)$ soit C^∞, il faut et il suffit que pour tout entier k, $\sum_l a_l^2 l^k < \infty$. Cette condition est équivalente à ce que pour tout entier k on ait $\sum_l a_l l^k < \infty$. De même pour b_l. □

3. SPECTRE DE LYAPOUNOV D'UN FLOT BROWNIEN ISOTROPE SUR S^{d-1}

Soit φ_t un flot brownien isotrope sur S^{d-1} dirigé par le champ de vecteurs $W(t)$, solution de (1.1). Ses caractéristiques locales sont données par le lemme 2.1 et le théorème 2.1. Nous allons calculer le spectre de Lyapounov du flot en fonction de ces caractéristiques locales.

THÉORÈME 3.1. – *Le spectre de Lyapounov* $(\lambda_1, ..., \lambda_{d-1})$ *d'un flot brownien isotrope* φ_t, *de matrice de covariance donnée par le théorème 2.1, est, pour* $1 \leq n \leq d-1$,

$$\lambda_n = \frac{d-2n-1}{2}\alpha'(1) - \frac{d-1}{2}\alpha(1) - n\beta(1).$$

Preuve. – Nous allons suivre une démarche analogue à celle de Le Jan dans [13].

On utilise les notations de la section 2.2.3. Soit $(\xi_j, 1 \leq j \leq n)$, n champs de vecteurs. Soit $\psi_t = \xi_1(t) \wedge ... \wedge \xi_n(t)$, où $\xi_j(t) = T\varphi_t(\xi_j)$.

Pour calculer le spectre de Lyapounov, il suffit de calculer $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ pour $1 \leq n \leq d-1$. Par le théorème d'Osedelets (voir [12] et [2]), $\sigma_n = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\psi(t)\|$, où $\|\psi\|^2 = \det(((\xi_i, \xi_j)))$.

Pour trouver l'équation différentielle stochastique satisfaite par ψ_t, il est utile d'introduire le produit intérieur $i(X_k)$ et l'opérateur τ_i^k, où

$$i(X_k)\psi = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\xi_j} \wedge \ldots \wedge \xi_n \; \xi_j^k, \tag{3.1}$$

$$\tau_i^k \psi = X_i \wedge i(X_k)\psi. \tag{3.2}$$

Remarque. – En particulier, on a $\tau_i^k X_1 \wedge \ldots \wedge X_n = 1_{k\leq n}(-1)^{k+1} X_i \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_k} \wedge \ldots \wedge X_n$. τ_i^k remplace X_k par X_i dans ψ.

LEMME 3.1. – *$d\psi_t(x) = \tau_i^k \psi_t(x) W_k^i(\varphi_t(x), \circ dt)$.*

Preuve. – Comme

$$d\xi_j(t)(x) = \nabla W(\varphi_t(x), \circ dt)(\xi_j(t)(x)) = \xi_j^k(t)(x) W_k^i(\varphi_t(x), \circ dt) X_i(\varphi_t(x)),$$

$$d\psi_t(x) = \sum_{j=1}^n \xi_1(t) \wedge \ldots \wedge \circ d\xi_j(t) \wedge \ldots \wedge \xi_n(t)(x) = \tau_i^k \psi_t(x) W_k^i(\varphi_t(x), \circ dt). \square$$

On peut écrire la version Itô de (1.1) :

$$d\varphi_t(x) = M(\varphi_t(x), dt),$$

où $M(t) = W(t) + \frac{1}{2}Vt$, avec $V(x) = \nabla_{X_j} a^{\cdot j}(x,y)_{|x=y}$ et $a^{\cdot j}(x,y) = a^{ij}(x,y) X_i \in T_x S^{d-1}$. $M(t)$ est une martingale sur les champs de vecteurs et l'isotropie entraîne que $V = 0$.

LEMME 3.2. – *Soit $\eta_t = \frac{\psi_t(x)}{\|\psi_t(x)\|}$, alors*

$$\begin{aligned} d \log \|\psi_t(x)\| &= \langle \eta_t, \tau_i^k \eta_t \rangle M_k^i(\varphi_t(x), dt) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big[\nu_{ij}^{kl}(\eta_t) C_{kl}^{ij}(\varphi_t(x)) + \langle \eta_t, \tau_i^k \eta_t \rangle E_k^i(\varphi_t(x))\Big] dt \\ &= dM_t + D_t dt, \end{aligned}$$

avec, pour $x \in S^{d-1}$ et $\eta \in T_x S^{d-1}$, $\nu_{ij}^{kl}(\eta) = \langle \tau_i^k \eta, \tau_j^l \eta \rangle - 2\langle \eta, \tau_i^k \eta \rangle \langle \eta, \tau_j^l \eta \rangle + \langle \eta, \tau_i^k \tau_j^l \eta \rangle$, $C_{kl}^{ij}(x) = (X_k \delta_r^i + \Gamma_{kr}^i)(Y_l \delta_s^j + \Gamma_{ls}^j) a^{rs}(x,y)_{|x=y}$ et $E_k^i(x) = X_j(X_k \delta_r^i + \Gamma_{kr}^i) a^{rj}(x,y)_{|x=y} - V_k^i(x)$.

Preuve. – On a

$$d\log\|\psi_t(x)\| = \langle\eta_t, \tau_i^k\eta_t\rangle W_k^i(\varphi_t(x), \circ dt). \tag{3.3}$$

Comme $d\eta_t = \left(\tau_j^l\eta_t - \eta_t\langle\eta_t, \tau_j^l\eta_t\rangle\right)W_l^j(\varphi_t(x), \circ dt)$,

$$d\langle\eta_t, \tau_i^k\eta_t\rangle = \nu_{ij}^{kl}(\eta_t)W_l^j(\varphi_t(x), \circ dt).$$

Comme $[W_k^i(\varphi_t(x), \circ dt), W_l^j(\varphi_t(x), \circ dt)] = C_{kl}^{ij}(\varphi_t(x))dt$, on a donc

$$\begin{aligned}d\log\|\psi_t(x)\| &= \langle\eta_t, \tau_i^k\eta_t\rangle W_k^i(\varphi_t(x), dt)\\ &+ \frac{1}{2}\Big[\nu_{ij}^{kl}(\eta_t)C_{kl}^{ij}(\varphi_t(x))dt\\ &+\langle\eta_t, \tau_i^k\eta_t\rangle[X_jW_k^i(\varphi_t(x), dt), W^j(\varphi_t(x), dt)]\Big].\end{aligned}$$

En remarquant que $W_k^i(\varphi_t(x), dt) = M_k^i(\varphi_t(x), dt) - \frac{1}{2}V_k^i(\varphi_t(x))dt$, on montre le lemme. □

Afin de calculer D_t et $\frac{d}{dt}[M_t, M_t]$ pour un t donné, nous allons prendre les systèmes de coordonnées locales identiques et normaux en $\varphi_t(x)$ et tels que $\eta_t = X_1 \wedge ... \wedge X_n$. Quitte à changer de base de $\mathbb{R}^d$, il est possible de faire les calculs comme si $\varphi_t(x) = p = (0, ..., 0, 1)$. Nous avons alors :

LEMME 3.3. – $\nu_{ij}^{kl}(\eta_t) = 1_{k,l\le n; i,j>n}\delta_{ij}\delta^{kl} + 1_{i,l\le n; k,j>n}\delta_i^l\delta_j^k$.

Preuve. – On calcule :

$$\begin{aligned}\langle\tau_i^k\eta_t, \tau_j^l\eta_t\rangle &= 1_{k,l\le n; i,j>n}\delta_{ij}\delta^{kl},\\ \langle\eta_t, \tau_i^k\eta_t\rangle &= 1_{k\le n}\delta_i^k,\\ \langle\eta_t, \tau_i^k\tau_j^l\eta_t\rangle &= 1_{i,l\le n; k,j>n}\delta_i^l\delta_j^k,\end{aligned}$$

d'où le lemme. □

LEMME 3.4. – $E_k^i(\varphi_t(x)) = -\delta_k^i[\alpha'(1) + (d-1)\alpha(1) + d\beta(1)]$.

Preuve. – En notant $\varphi_t(x) = p$,

$$\begin{aligned}E_k^i(p) =& X_jX_ka^{ij}(x, p)_{|x=p} + X_j(\Gamma_{kr}^i)(p)a^{rj}(p, p)\\ &- X_k(\Gamma_{jl}^i)(p)a^{lj}(p, p) - X_k(X_ja^{ij}(x, y)_{|x=y})_{|x=p}.\end{aligned}$$

Dans un premier temps, on a

$$\begin{aligned}X_jX_ka^{ij}(x, p)_{|x=p} &= X_jX_k\left[\alpha(x_d)\delta^{ij} - \beta(x_d)\frac{x_ix_j}{x_d}\right]_{|x=p}\\ &= X_j\left[-\alpha'(x_d)\delta^{ij}\frac{x_k}{x_d} - \beta(x_d)\frac{\delta_k^ix_j + \delta_k^jx_i}{x_d}\right]_{|x=p}\\ &= -\alpha'(1)\delta^{ij}\delta_{jk} - \beta(1)(\delta_k^i + \delta_k^j\delta_j^i)\\ &= -(\alpha'(1) + d\beta(1))\delta_k^i.\end{aligned}$$

Soit $R^l_{ijk}(p) = X_j\Gamma^l_{ik}(p) - X_i\Gamma^l_{jk}(p)$, le tenseur de courbure en p, la courbure étant constante, $R^l_{ijk}(p) = \delta_{ik}\delta^l_j - \delta^l_i\delta_{jk}$. Comme $a^{ij}(p,p) = \delta^{ij}\alpha(1)$,

$$X_j(\Gamma^i_{kr})(p)a^{rj}(p,p) - X_k(\Gamma^i_{jl})(p)a^{lj}(p,p) = R^i_{kjj}\alpha(1) = -(d-2)\delta^i_k\alpha(1).$$

Enfin, on a $X_k(X_j a^{ij}(x,y)_{|x=y})_{|x=p} = \delta^i_k\alpha(1)$. D'où le lemme. □

Les lemmes 2.9, 3.3 et 3.4 permettent de calculer D_t :

LEMME 3.5.

$$2D_t = n(d-2-n)\alpha'(1) - n(d-1)\alpha(1) - n(n+1)\beta(1) = 2D.$$

Preuve. – On a

$$\begin{aligned}\nu^{kl}_{ij}(\eta_t)C^{ij}_{kl}(\varphi_t(x)) &= 1_{k\le n; i>n}\delta_{ij}\delta^{kl}(\alpha'(1)\delta^{ij}\delta_{kl}) + 1_{i\le n;k>n}\delta^l_i\delta^k_j(\beta(1)\delta^i_l\delta^j_k)\\ &= n(d-1-n)(\alpha'(1)+\beta(1)),\end{aligned}$$

et, puisque $\langle\eta,\tau^k_i\eta_t\rangle = 1_{k\le n}\delta^k_i$, on a

$$\langle\eta,\tau^k_i\eta_t\rangle E^i_k(\varphi_t(x)) = -n(\alpha'(1)+(d-1)\alpha(1)+d\beta(1)).$$

D'où le lemme. □

Preuve du théorème 3.1. – M_t est une martingale et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[M_t,M_t] &= \langle\eta_t,\tau^k_i\eta_t\rangle\langle\eta_t,\tau^l_j\eta_t\rangle C^{ij}_{kl}(\varphi_t(x))\\ &= 1_{k,l\le n}\delta^k_i\delta^l_j[\alpha'(1)\delta^{ij}\delta_{kl} + \alpha(1)\delta^i_k\delta^j_l + \beta(1)(\delta^i_k\delta^j_l + \delta^i_l\delta^j_k)]\\ &= n\alpha'(1) + n^2\alpha(1) + (n^2+n)\beta(1) = s_n^2.\end{aligned}$$

$\frac{M_t}{s_n}$ est un mouvement brownien standard, ce qui entraîne que $\lim_{t\to\infty}\frac{M_t}{t} = 0$ presque sûrement et donc $\lim_{t\to\infty}\frac{\log\|\psi_t\|}{t} = D$ presque sûrement. On a donc $\sigma_n = D = \frac{n(d-2-n)}{2}\alpha'(1) - \frac{n(d-1)}{2}\alpha(1) - \frac{n(n+1)}{2}\beta(1)$. Il est alors facile d'en déduire $\lambda_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$. □

En particulier, $\lambda_1 = \frac{d-3}{2}\alpha'(1) - \frac{d-1}{2}\alpha(1) - \beta(1)$. Dans le cas où le flot dérive d'un champ de gradient,

$$\lambda_1 = \sum_{l\ge1} a_l\left(\frac{d-3}{2}\gamma'_l(1) - \frac{d-1}{2} - \gamma'_l(1)\right) = \sum_{l\ge1}\frac{a_l}{2}[(d-5)\gamma'_l(1)-(d-1)].$$

Comme $\gamma'_l(1) = (l-1)\frac{(d+l-1)}{(d+1)}$, $\lambda_1 = \sum_{l\ge1}\frac{a_l}{2}\Big[(l-1)(d-5)\frac{(d+l-1)}{(d+1)}$ $-(d-1)\Big]$. Pour $d \le 5$, $\lambda_1 < 0$ et le flot est stable. Il est toujours possible de construire des flots stables, en prenant par exemple $a_1 > 0$ et $a_l = 0$ pour tout $l > 1$. Pour $d > 5$, on peut construire des flots instables en prenant par exemple $a_1 = ... = a_6 = 0$, on a alors

$$\lambda_1 \geq \sum_{l>6} \frac{a_l}{2}[6(d-5)-(d-1)] > 0.$$

Soit $B = \alpha'(1) - \beta(1)$ et $A = \alpha'(1) + d\beta(1) + (d-1)\alpha(1)$, alors $\alpha'(1) = \frac{A+dB}{d+1} - \frac{d-1}{d+1}\alpha(1)$ et $\beta(1) = \frac{A-B}{d+1} - \frac{d-1}{d+1}\alpha(1)$. $B = 0$ si le flot est de gradient et $A = 0$ si le flot est de divergence nulle. A et B sont positifs et peuvent être choisis de façon indépendante, B ne dépendant que des b_l et A ne dépendant que des a_l. On peut écrire λ_1 en fonction de A et B,

$$\lambda_1 = \frac{d-5}{2(d+1)}A + \frac{(d-1)(d+2)}{2(d+1)}B - \frac{(d-1)(d-2)}{d+1}\alpha(1).$$

On voit que le terme de divergence nulle du flot (c'est-à-dire B) amène de l'instabilité.

4. ÉTUDE DE LA DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

Sur S^{d-1}, on définit $d(x,y)$ la distance entre deux points x et y par la relation $\cos d(x,y) = \langle x,y\rangle$ et $d(x,y) \in [0,\pi]$. Dans cette section, nous allons étudier la distance entre deux points transportés par un flot brownien isotrope φ_t, $\theta_t = d(\varphi_t(x), \varphi_t(y))$. En particulier, nous allons décrire son comportement asymptotique en fonction de λ_1, le premier exposant de Lyapounov du flot.

THÉORÈME 4.1. – *Soient x, y dans S^{d-1} et $\theta_t = d(\varphi_t(x), \varphi_t(y))$, θ_t est une diffusion et*

$$d\theta_t = \sqrt{g(\theta_t)}dB_t + f(\theta_t)dt, \tag{4.1}$$

où B_t est un mouvement brownien standard et

$$g(\theta) = 2[\alpha(1) - \alpha(\cos\theta)\cos\theta + \beta(\cos\theta)\sin^2\theta], \tag{4.2}$$

$$f(\theta) = \frac{d-2}{\sin\theta}(\alpha(1)\cos\theta - \alpha(\cos\theta)). \tag{4.3}$$

De plus, si $\lambda_1 < 0$, $\lim_{t\to\infty} \theta_t = 0$ *et si* $\lambda_1 \geq 0$, $P[\limsup \theta_t = \pi] = P[\liminf \theta_t = 0] = 1$.

Preuve. – On reprend les systèmes de coordonnées locales de la section 2.2.3. Comme φ_t est un difféomorphisme, si $\theta_0 \neq 0$, $\theta_t \neq 0$. La distance entre deux points étant singulière quand cette distance vaut π, on a

$$\begin{aligned} d\theta_t &= X_i d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) d\varphi_t^i(x) + Y_j d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) d\varphi_t^j(y) \\ &\quad + \frac{1}{2} X_i X_j d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) d[\varphi_t^i(x), \varphi_t^j(x)] \\ &\quad + \frac{1}{2} Y_i Y_j d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) d[\varphi_t^i(y), \varphi_t^j(y)] \\ &\quad + X_i Y_j d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) d[\varphi_t^i(x), \varphi_t^j(y)] - dL_t \\ &= dN_t + V_t dt - dL_t, \end{aligned}$$

où N_t est une martingale et L_t un processus croissant ne croissant que quand $\theta_t = \pi$. Pour un t donné, prenons les systèmes de coordonnées locales respectivement normaux en $\varphi_t(x)$ et en $\varphi_t(y)$. Nous aurons alors $\frac{d}{dt}[\varphi_t^i(x), \varphi_t^j(y)] = a^{ij}(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) = \alpha(\cos\theta_t)\langle X_i, Y_j\rangle + \beta(\cos\theta_t)\langle X_i, \varphi_t(y)\rangle\langle\varphi_t(x), Y_j\rangle$, et en notant $\Delta_x = \sum_i X_i^2$ et $\Delta_y = \sum_j Y_j^2$,

$$\begin{aligned} V_t = \frac{1}{2}(\Delta_x + \Delta_y) d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \alpha(1) \\ + X_i Y_j d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) a^{ij}(\varphi_t(x), \varphi_t(y)). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} X_i d(x_1, x_2) &= -\frac{\langle X_i, x_2\rangle}{\sin d(x_1, x_2)}, \\ \Delta_x d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) &= \sum_{i=1}^{d-1} \left(\frac{\cos\theta_t}{\sin\theta_t} - \langle X_i, \varphi_t(y)\rangle^2 \frac{\cos\theta_t}{\sin^3\theta_t} \right) \\ &= (d-2)\cos\theta_t = \Delta_y d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)), \\ X_i Y_j d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) &= -\frac{\langle X_i, Y_j\rangle}{\sin\theta_t} - \frac{\cos\theta_t}{\sin^3\theta_t} \langle X_i, \varphi_t(y)\rangle\langle Y_j, \varphi_t(x)\rangle. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{i,j} \langle X_i, Y_j\rangle^2 = d - 2 + \cos^2\theta_t,$$

$$\sum_{i,j} \langle X_i, Y_j\rangle\langle\varphi_t(x), Y_j\rangle\langle X_i, \varphi_t(y)\rangle = -\cos\theta_t \sin^2\theta_t$$

et

$$\sum_j \langle\varphi_t(x), Y_j\rangle^2 = \sin^2\theta_t = \sum_i \langle\varphi_t(y), X_i\rangle^2,$$

$$
\begin{aligned}
a^{ij}X_iY_jd(\varphi_t(x),\varphi_t(y)) &= -\frac{\alpha(\cos\theta_t)}{\sin\theta_t}\langle X_i,Y_j\rangle^2 \\
&\quad - \frac{\beta(\cos\theta_t)}{\sin\theta_t}\langle X_i,Y_j\rangle\langle X_i,\varphi_t(y)\rangle\langle\varphi_t(x),Y_j\rangle \\
&\quad - \alpha(\cos\theta_t)\frac{\cos\theta_t}{\sin^3\theta_t}\langle X_i,Y_j\rangle\langle\varphi_t(x),Y_j\rangle\langle X_i,\varphi_t(y)\rangle \\
&\quad - \beta(\cos\theta_t)\frac{\cos\theta_t}{\sin^3\theta_t}\langle\varphi_t(x),Y_j\rangle^2\langle X_i,\varphi_t(y)\rangle^2 \\
&= -\frac{d-2}{\sin\theta_t}\alpha(\cos\theta_t).
\end{aligned}
$$

On a alors

$$
V_t = \frac{d-2}{\sin\theta_t}[\alpha(1)\cos\theta_t - \alpha(\cos\theta_t)] = f(\theta_t). \tag{4.4}
$$

Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[N_t,N_t] &= \big((X_id)^2+(Y_jd)^2\big)(\varphi_t(x),\varphi_t(y))\alpha(1) \\
&\quad + 2a^{ij}(X_id)(Y_jd)(\varphi_t(x),\varphi_t(y)) \\
&= \alpha(1)\left(\frac{\langle X_i,\varphi_t(y)\rangle^2}{\sin^2\theta_t}+\frac{\langle Y_j,\varphi_t(x)\rangle^2}{\sin^2\theta_t}\right) \\
&\quad + 2\frac{\langle X_i,\varphi_t(y)\rangle\langle Y_j,\varphi_t(x)\rangle}{\sin^2\theta_t}(\alpha(\cos\theta_t)\langle X_i,Y_j\rangle \\
&\quad + \beta(\cos\theta_t)\langle\varphi_t(x),Y_j\rangle\langle X_i,\varphi_t(y)\rangle) \\
&= 2[\alpha(1)-\alpha(\cos\theta_t)\cos\theta_t+\beta(\cos\theta_t)\sin^2\theta_t] = g(\theta_t).
\end{aligned}
$$

Soit $B_t = \int_0^t \frac{dN_t}{\sqrt{g(\theta_t)}}$, B_t est un mouvement brownien. Pour montrer que θ_t est une diffusion solution de (4.1), il nous reste à montrer que p.s., $L_t = 0$ pour tout t, ce qui revient à montrer que $\inf\{t, \theta_t = \pi\} = \infty$ p.s..

En regardant la fonction d'échelle s de θ_t, il est possible de discuter du comportement asymptotique de θ_t en fonction du premier exposant de Lyapounov, λ_1. Soit $\varphi \in]0,\pi[$,

$$
s(x) = \int_\varphi^x \exp\left[-\int_\varphi^y \frac{2f(\theta)}{g(\theta)}d\theta\right]dy. \tag{4.5}
$$

En général, s est finie sur $]0,\pi[$. Eventuellement, $s(0+)$ et $s(\pi-)$ divergent.

Au voisinage de 0,

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \theta\left(\frac{d-2}{2}\right)(\alpha'(1)-\alpha(1)) + \circ(\theta^2), \\
\frac{1}{2}g(\theta) &= \frac{\theta^2}{2}(\alpha'(1)+\alpha(1)+2\beta(1)) + \circ(\theta^3).
\end{aligned}
$$

On a donc $\frac{2f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{(d-2)(\alpha'(1)-\alpha(1))}{\alpha'(1)+\alpha(1)+2\beta(1)} \times \frac{1}{\theta} + o(1)$ et pour une constante strictement positive C_1,

$$\exp\left[-\int_{\varphi}^{y} \frac{2f(\theta)}{g(\theta)} d\theta\right] \sim C_1 y^{-\left(\frac{(d-2)(\alpha'(1)-\alpha(1))}{\alpha'(1)+\alpha(1)+2\beta(1)}\right)}.$$

Ainsi, $s(0+) = -\infty$ si et seulement si $\lambda_1 \geq 0$.

Au voisinage de π, $\frac{2f(\theta)}{g(\theta)} = -\frac{d-2}{\pi-\theta} + o(1)$ et pour une constante strictement positive C_2,

$$\exp\left[-\int_{\varphi}^{y} \frac{2f(\theta)}{g(\theta)} d\theta\right] \sim C_2(\pi - y)^{-(d-2)}.$$

Comme $d \geq 3$, $s(\pi-) = +\infty$. Ainsi, $\inf\{t, \theta_t = \pi\} = \infty$ p.s. (ce qui finit de montrer que θ_t est solution de (4.1).)

Finalement, si $\lambda_1 < 0$, $\lim_{t\to\infty} \theta_t = 0$ et si $\lambda_1 \geq 0$,

$$P[\limsup \theta_t = \pi] = P[\liminf \theta_t = 0] = 1. \quad \square$$

En particulier, nous avons montré que le processus θ_t est récurrent quand le flot est instable. De plus, dans le cas où le flot est stable, on a la propriété suivante.

PROPOSITION 4.1. – *Si* $\lambda_1 < 0$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \theta_t = \lambda_1$ *ps.*

Preuve. – En appliquant la formule d'Itô,

$$\frac{1}{t} \log \theta_t = \frac{1}{t} \log \theta_0 + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sqrt{g(\theta_s)}}{\theta_s} dB_s + \frac{1}{t} \int_0^t \left[\frac{f(\theta_s)}{\theta_s} - \frac{g(\theta_s)}{2\theta_s^2}\right] ds.$$

On sait que θ_t tend vers 0 en $+\infty$, qu'au voisinage de 0, $\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta} \sim \alpha'(1) + \alpha(1) + 2\beta(1)$ et $\left[\frac{f(\theta)}{\theta} - \frac{g(\theta)}{2\theta^2}\right] \sim \lambda_1 < 0$, donc presque sûrement,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \theta_t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\frac{f(\theta_s)}{\theta_s} - \frac{g(\theta_s)}{2\theta_s^2}\right] ds = \lambda_1. \quad \square$$

A. APPENDICE

A.1 Représentation de groupe

Une représentation unitaire T d'un groupe G est une application de G dans l'espace des endomorphismes unitaires d'un espace de Hilbert E telle que pour tout g_1 et g_2 dans G, $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$ et $T(g_1^{-1}) = [T(g_1)]^{-1}$. T est dite irréductible s'il n'existe pas de sous-espace fermé non trivial de E stable par T.

Soient T et T' deux représentations de G, d'espaces de base E et E'. T et T' sont équivalentes si et seulement s'il existe une application linéaire inversible continue ainsi que son inverse de E dans E', A, telle que $T'A = AT$.

Si G est un groupe de Lie compact, les représentations unitaires irréductibles sont de dimensions finies. Soit $\{T^\lambda\}$ la famille des représentations irréductibles non équivalentes de G, cette famille est dénombrable.

Soit E_λ l'espace de base de T^λ, notons $T^\lambda_{ij}(g)$ les éléments matriciels de $T^\lambda(g)$ dans une base orthonormée de E_λ. Par le théorème de Peter-Weyl, $\{T^\lambda_{ij}\}$ est une base orthogonale de $L^2(G)$. Nous pouvons donc décomposer en série de Fourier les fonctions f de $L^2(G)$:

$$f(g) = \sum_\lambda \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} z^\lambda_{ji} T^\lambda_{ij}(g), \tag{A.1}$$

avec

$$z^\lambda_{ji} = d_\lambda \int_G f(g)\overline{T^\lambda_{ij}(g)}dg, \tag{A.2}$$

où $d_\lambda = \dim E_\lambda$ et dg est la mesure de Haar de G. Réciproquement, si on se donne la famille $\{z^\lambda_{ji}\}$, par (A.1) on peut construire une fonction de $L^2(G)$ à condition que

$$\sum_\lambda \frac{1}{d_\lambda} \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} |z^\lambda_{ji}|^2 < \infty. \tag{A.3}$$

En particulier, (A.2) donne la relation d'orthogonalité entre les éléments matriciels :

$$d_\lambda \int_G T^\lambda_{ij}(g)\overline{T^\mu_{kl}(g)}dg = \delta_{\lambda\mu}\delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{A.4}$$

A.2 Représentations irréductibles de $SO(d)$

Dans cette section, nous allons déterminer les représentations unitaires irréductibles de $SO(d)$ telles que leurs restrictions à $SO(d-1)$ contiennent une copie de la représentation naturelle T, telle que $T(h) = h$ pour tout $h \in SO(d-1)$, l'espace de base de T étant $\mathbb{R}^{d-1}$.

On sait que (voir [1]) les représentations de $SO(d)$ sont caractérisées par leurs plus hauts poids $(m_1, ..., m_\nu)$, où $\nu = [d/2]$ et $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_{\nu-1} \geq |m_\nu|$, les m_i sont tous simultanément entiers ou demi-entiers et si d est impair il faut de plus que $m_\nu \geq 0$. Ainsi, dans les cas $d = 2$ ou 3, $\nu = 1$ et les représentations irréductibles de $SO(2)$ et $SO(3)$ sont caractérisées par un entier ou un demi-entier l.

Soit T^{dm} la représentation irréductible de $SO(d)$ de plus haut poids m, m étant un ν-uplet. Si on regarde la restriction de T^{dm} à $SO(d-1)$, on peut décomposer l'espace de base de T^{dm} en sous-espaces tels que T^{dm} restreint à chacun de ces sous-espaces est une représentation irréductible de $SO(d-1)$. On obtient ainsi des représentations irréductibles de $SO(d-1)$ de plus au poids p, où p est un $[(d-1)/2]$-uplet, avec $m_1 \geq p_1 \geq m_2 \geq p_2 \geq ... \geq m_\nu \geq p_\nu \geq -m_\nu$ si d est impair et $m_1 \geq p_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_{\nu-1} \geq p_{\nu-1} \geq |m_\nu|$ si d est pair. De plus, ces représentations de $SO(d-1)$ n'apparaissent qu'une seule fois dans la décomposition en représentations irréductibles de T^{dm} restreint à $SO(d-1)$.

Nous nous intéresserons seulement aux représentations irréductibles T^{dm} de $SO(d)$ telles que leurs restrictions à $SO(d-1)$ contiennent une copie de la représentation naturelle, qui est de plus haut poids $(1, 0, ..., 0)$. On a donc soit $m = (l, 0, ..., 0)$, soit $m = (l, 1, 0, ..., 0)$, où l est un entier positif. Si $d = 3$, on remarque que l'on n'obtient qu'une série de représentations irréductibles.

On peut réaliser, comme dans [1], ces représentations dans respectivement l'espace des tenseurs symétriques sans trace de rang l et l'espace des tenseurs sans trace de rang $l+1$ de symétrie de Young $(l, 1, 0, ..., 0)$. (Un tenseur T est dit sans trace si et seulement si pour tout p et q, on a $\sum_i T_{i_1...i_{p-1}ii_{p+1}...i_{q-1}ii_{q+1}...i_{l+1}} = 0$). Une rotation g de $SO(d)$ agit sur les tenseurs de la façon suivante

$$(g.T)_{i_1...i_r} = g_{i_1}^{j_1} ... g_{i_r}^{j_r} T_{j_1...j_r}. \tag{A.5}$$

On obtient les tenseurs de symétrie de Young $(l, 1, 0..., 0)$ à l'aide de l'opérateur idempotent QP, où

$$P = \sum_{\sigma \in S_{l+1}; \sigma(1)=1} \sigma \quad \text{et} \quad Q = e - (12),$$

où S_{l+1} est le groupe des permutations de $l+1$ éléments, e l'élément neutre de S_{l+1} et (12) la permutation qui permute 1 et 2. Soit F un tenseur de rang $l+1$, alors $T = QP(F)$ est un tenseur de symétrie de Young $(l, 1, 0, ..., 0)$.

A.3 Étude des tenseurs symétriques sans trace de rang l

Remarquons que l'espace des tenseurs symétriques peut être identifié à l'espace des polynômes homogènes à d variables et de $d^o l$, appelons cet espace $\mathcal{R}_{dl}$. Le sous-espace des tenseurs sans trace correspond aux polynômes harmoniques de $\mathcal{R}_{dl}$. Notons $\mathcal{H}_{dl}$ l'espace des polynômes harmoniques de $\mathcal{R}_{dl}$. On munit $\mathcal{R}_{dl}$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{S^{d-1}} f(x)g(x)dx$. On sait (voir [16]) que

$$\mathcal{R}_{dl} = \mathcal{H}_{dl} \oplus r^2\mathcal{R}_{d,l-2}, \tag{A.6}$$

$\mathcal{H}_{dl}$ et $r^2\mathcal{R}_{d,l-2}$ sont orthogonaux. Ainsi si $f \in \mathcal{R}_{dl}$, il existe $h_1 \in \mathcal{H}_{dl}$ et $f_1 \in \mathcal{R}_{d,l-2}$ tels que $f(x) = h_1(x) + r^2 f_1(x)$. h_1 est la projection harmonique de f, on la notera Hf (pour une expression de cette projection harmonique, voir [16]).

$SO(d)$ agit sur $\mathcal{R}_{dl}$ de la façon suivante :

$$g.f(x) = f(g^{-1}x), \tag{A.7}$$

où $g \in SO(d)$ et $f \in \mathcal{R}_{dl}$. Il est clair que $\mathcal{R}_{dl}$ et $\mathcal{H}_{dl}$ sont invariants sous l'action de $SO(d)$ et que $SO(d)$ agit de la même façon sur les polynômes homogènes et sur les tenseurs symétriques correspondants. Cette action laisse aussi invariant le produit scalaire défini ci-dessus, de telle sorte que la représentation ainsi définie est unitaire.

Pour $d > 3$, à $\mathcal{H}_{d-1,s}$ correspond une représentation de plus haut poids $(s,0,...,0)$, et pour $0 \le s \le l$, ces représentations n'apparaissent qu'une seule fois dans la décomposition en espaces irréductibles par $SO(d-1)$ de $\mathcal{H}_{dl}$, on a donc $\dim \mathcal{H}_{dl} = \sum_{s=0}^{l} \dim \mathcal{H}_{d-1,s}$. Comme

$$\mathcal{R}_{dl} = \oplus_{s=0}^{l} x_d^{l-s}\mathcal{H}_{d-1,s} \oplus r^2\mathcal{R}_{d,l-2}, \tag{A.8}$$

en prenant la projection harmonique dans (A.8), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{dl} &= \oplus_{s=0}^{l} H(x_d^{l-s}\mathcal{H}_{d-1,s})\\ &= \oplus_{s=0}^{l}\mathcal{H}_{dls},\end{aligned} \tag{A.9}$$

avec $\mathcal{H}_{dls} = H(x_d^{l-s}\mathcal{H}_{d-1,s})$. $\mathcal{H}_{dls}$ est invariant par $SO(d-1)$, irréductible de plus haut poids $(s,0,0,...,0)$. Soit $h_s \in \mathcal{H}_{d-1,s}$, alors

$$H(x_d^{l-s}h_s(x')) = c(d,l,s)r^{l-s}C_{l-s}^{\frac{d-2}{2}+s}\left(\frac{x_d}{r}\right)h_s(x'), \tag{A.10}$$

où $x' = (x_1, ..., x_{d-1})$ et C_m^p sont les polynômes de Gegenbauer, obtenus en prenant la projection harmonique de x_d^l :

$$H(x_d^l) = c(d,l) r^l C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{x_d}{r}\right). \tag{A.11}$$

Dans le cas de la dimension 3, les représentations irréductibles de $SO(2)$ étant de dimension 1, $\mathcal{H}_{2s}$ n'est pas irréductible. Une base orthogonale de $\mathcal{H}_{2s}$ est $\{(x_2 + ix_1)^s, (x_2 - ix_1)^s\}$. Nous noterons dans la suite $\mathcal{H}_{2,\pm s} = \text{Vect}\{(x_2 \pm ix_1)^s\}$ et $\mathcal{H}_{3,l,\pm s} = \text{Vect}\{r^{l-s} C_{l-s}^{\frac{1}{2}+s}(\frac{x_3}{r})(x_2 \pm ix_1)^s\}$. Ainsi, $\mathcal{H}_{3l} = \oplus_{s=-l}^{l} \mathcal{H}_{3ls}$.

A.4 Les polynômes de Gegenbauer

Dans cette section, nous allons résumer les différentes propriétés des polynômes de Gegenbauer, que l'on peut trouver dans [16]. Les polynômes de Gegenbauer sont définis par (A.11). Comme $H(x_d^l)$ est harmonique, en prenant le laplacien de $H(x_d^l)$, on trouve l'équation différentielle satisfaite par les polynômes de Gegenbauer :

$$(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2} C_l^p(t) - (2p+1)t\frac{d}{dt} C_l^p(t) + l(2p+l) C_l^p(t) = 0, \tag{A.12}$$

où p est un entier ou un demi-entier, par exemple $p = \frac{d-2}{2}$. Nous pouvons aussi voir que

$$\frac{d}{dt} C_l^p(t) = 2p C_{l-1}^{p+1}(t). \tag{A.13}$$

Pour $l \leq 3$, on peut facilement calculer $C_l^p(t)$:

$$C_0^p(t) = 1, \quad C_1^p(t) = C_1 t, \quad C_2^p(t) = C_2\left(t^2 - \frac{1}{2p+2}\right),$$
$$C_3^p(t) = C_3\left(t^3 - \frac{3}{2p+4} t\right).$$

Nous avons aussi la relation d'orthogonalité

$$\int_0^{\pi} C_l^p(\cos\theta) C_m^p(\cos\theta) \sin^{2p}\theta d\theta = \delta_{lm} \frac{\pi\Gamma(2p+l)}{2^{2(p-\frac{1}{2})} l!(l+p)\Gamma^2(p)} \tag{A.14}$$

et

$$C_l^p(1) = \frac{\Gamma(2p+l)}{l!\Gamma(2p)}. \tag{A.15}$$

Remarquons aussi que pour $p = \frac{1}{2}$, $C_l^{\frac{1}{2}}$ est le polynôme de Legendre de degré l.

A.5 Étude des tenseurs de symétrie de Young $(l, 1, 0, ..., 0)$

On remarque que $(PF)_{i_1 i_2 ... i_{l+1}}$ est un tenseur symétrique en $i_2, ..., i_{l+1}$. On peut donc voir ce tenseur comme une 1-forme α :

$$\alpha = P_{i_1}(x)dx^{i_1} = (PF)_{i_1 ... i_{l+1}} x^{i_2} ... x^{i_{l+1}} dx^{i_1},$$

où $P_i \in \mathcal{R}_{dl}$. Comme $T = QPF$, alors $T_{i_1 i_2 ... i_{l+1}} = (PF)_{i_1 i_2 ... i_{l+1}} - (PF)_{i_2 i_1 ... i_{l+1}}$. On peut voir ce tenseur comme une 2-forme exacte ω :

$$\begin{aligned}\omega = 2d\alpha &= (\partial_{i_2} P_{i_1}(x) - \partial_{i_1} P_{i_2}(x)) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \\ &= T_{i_1 i_2 ... i_{l+1}} x^{i_3} ... x^{i_{l+1}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2},\end{aligned}$$

il est trivial de vérifier que $\partial_{i_2} P_{i_1}(x) = (PF)_{i_1 ... i_{l+1}} x^{i_3} ... x^{i_{l+1}}$.

Ainsi, on voit que les tenseurs de symétrie de Young $(l, 1, 0, ..., 0)$ peuvent s'interpréter comme des 2-formes homogènes exactes. Soit $\mathcal{G}_{dl}$ l'espace de ces 2-formes exactes. On remarque que les 2-formes de $\mathcal{G}_{dl}$ qui correspondent à des tenseurs sans trace sont les 2-formes cofermées, c'est-à-dire telles que $\delta\omega = 0$, où δ est la codifférentielle. En effet, il faut que $\sum_i T_{i i_2 i i_4 ... i_{l+1}} = 0$ et $\sum_i T_{i_1 i_2 i i i_4 ... i_{l+1}} = 0$, or

$$\begin{aligned}\delta\omega &= -\partial_{i_1} \omega_{i_1 i_2}(x)\, dx^{i_2} \\ &= -(l-1)! \sum_i T_{i i_2 i i_4 ... i_{l+1}} x^{i_4} ... x^{i_{l+1}} dx^{i_2},\end{aligned} \tag{A.16}$$

donc $\delta\omega = 0$ si T est sans trace. Soit $\Delta = d\delta + \delta d$, le laplacien de De Rahm, on a

$$\Delta\omega = -\Delta\omega_{i_1 i_2}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}. \tag{A.17}$$

On voit donc que T est sans trace si et seulement si $\delta\omega = \Delta\omega = 0$. Une forme exacte et cofermée étant harmonique, les tenseurs sans trace de symétrie de Young $(l, 1, 0, ..., 0)$ correspondent aux 2-formes cofermées de $\mathcal{G}_{dl}$. Soit $\mathcal{F}_{dl}$ l'espace des 2-formes cofermées de $\mathcal{G}_{dl}$. On munit $\mathcal{G}_{dl}$ du produit scalaire :

$$\langle \omega^1, \omega^2 \rangle = \int_{S^{d-1}} \sum_{i,j} \omega^1_{ij}(x) \omega^2_{ij}(x) dx. \tag{A.18}$$

$SO(d)$ agit sur $\mathcal{G}_{dl}$ de la façon suivante :

$$g.\omega = \omega_{ij}(g^{-1}x) d(gx)^i \wedge d(gx)^j, \tag{A.19}$$

où $\omega \in \mathcal{F}_{dl}$ et $g \in SO(d)$. On peut définir de la même façon l'action de $SO(d)$ sur n'importe quelle forme différentiable. Muni de cette action et de ce produit scalaire, $\mathcal{F}_{dl}$ est l'espace de base de la représentation irréductible de plus haut poids $(l, 1, 0, ..., 0)$, l'action sur $\mathcal{F}_{dl}$ étant la même que celle sur les tenseurs sans trace de symétrie de Young $(l, 1, 0, ..., 0)$.

Afin de trouver une expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{F}_{dl}$ et de caractériser les 2-formes de $\mathcal{F}_{dl}$, nous allons d'abord chercher son orthogonal dans $\mathcal{G}_{dl}$. Nous noterons cet orthogonal $\mathcal{F}_{dl}^{orth}$ et nous noterons H la projection orthogonale sur $\mathcal{F}_{dl}$.

LEMME A.1. – *$\mathcal{F}_{dl}^{orth} = \{\omega \in \mathcal{G}_{dl}$ / il existe une 1-forme homogène α telle que $\omega = d(r^2\alpha)\}$. De plus, si $h \in \mathcal{H}_{dl}$, $H(dx^i \wedge dh) = dx^i \wedge dh - \frac{1}{2(d+l-3)} dr^2 \wedge d(\partial_i h)$.*

Preuve. – On sait qu'il est possible de voir $\mathcal{G}_{dl}$ comme un sous-espace de l'espace des tenseurs de rang $l+1$. Dans [1], on trouve la décomposition de tous tenseurs T sous la forme $T = T^0 + Q$, où T^0 est sans trace et $Q_{i_1 \dots i_{l+1}} = \sum_{p<q} \delta_{i_p i_q} R^{(pq)}_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_{q-1} i_{q+1} \dots i_{l+1}}$, avec

$$R^{(pq)}_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_{q-1} i_{q+1} \dots i_{l+1}} = \sum_i R_{i_1 \dots i_{p-1} i i_{p+1} \dots i_{q-1} i i_{q+1} \dots i_{l+1}}, \tag{A.20}$$

R étant un tenseur de rang $l+1$. T^0 et Q sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle T^1, T^2 \rangle = \sum_{i_1 \dots i_{l+1}} T^1_{i_1 \dots i_{l+1}} T^2_{i_1 \dots i_{l+1}}$. Ce produit scalaire coïncide avec celui défini sur $\mathcal{G}_{dl}$. On voit ainsi que si à T correspond une 2-forme de $\mathcal{G}_{dl}$, à T^0 correspond une 2-forme de $\mathcal{F}_{dl}$ et il est facile de voir qu'à Q correspond une 2-forme de $\mathcal{G}_{dl}$ de la forme $r^2\omega_1 + dr^2 \wedge \alpha$. On voit donc que $\mathcal{F}_{dl}^{orth} = \{\omega \in \mathcal{G}_{dl}$ tel qu'il existe $\omega_1 \in \mathcal{G}_{d,l-2}$ et une 1-forme α telle que $\omega = r^2\omega_1 + dr^2 \wedge \alpha\}$.

Soit $\omega \in \mathcal{G}_{dl}$, alors il existe $\alpha = \alpha_i dx^i$, avec $\alpha_i \in \mathcal{R}_{dl}$ tel que $\omega = d\alpha$. Comme $\mathcal{R}_{dl} = \mathcal{H}_{dl} \oplus r^2\mathcal{R}_{d,l-2}$, il existe $h_i \in \mathcal{H}_{dl}$ et $g_i \in \mathcal{R}_{d,l-2}$ tels que $\alpha_i = h_i + r^2 g_i$. On a donc $\omega = d\alpha_i \wedge dx^i = dh_i \wedge dx^i + d(r^2 g_i dx^i)$. Comme $d(r^2 g_i dx^i) \in \mathcal{F}_{dl}^{orth}$, $H(\omega) = H(dh_i \wedge dx^i)$. On remarque ainsi que $\mathcal{F}_{dl} = \{H(dh_i \wedge dx^i), h_i \in \mathcal{H}_{dl}\}$.

Soit $\omega^i = dx^i \wedge dh - \frac{1}{2(d+l-3)} dr^2 \wedge d(\partial_i h)$, comme $dr^2 \wedge d(\partial_i h) \in \mathcal{F}_{dl}^{orth}$, pour montrer que $\omega^i = H(dx^i \wedge dh)$, il suffit de montrer que ω^i est cofermée. D'une part,

$$\delta(dx^i \wedge dh) = -\frac{1}{2}\partial^2_{ij} h dx^j + \frac{1}{2}\Delta h dx^i = -\frac{1}{2} d(\partial_i h).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\delta(dr^2 \wedge d(\partial_i h)) &= -\partial_k(x_k\partial_j\partial_i h)dx^j + \partial_j(x_k\partial_j\partial_i h)dx^k \\ &= -d\, d(\partial_i h) - x_k\partial_k(\partial_j\partial_i h)dx^j + d(\partial_i h) \\ &= -(d+l-3)d(\partial_i h).\end{aligned}$$

On vérifie bien que ω^i est cofermée.

Comme pour toute 2-forme ω de $\mathcal{G}_{dl}$, il existe h_i et g_i tels que

$$\begin{aligned}\omega &= dx^i \wedge dh_i + d(r^2(g_i dx^i)) \\ &= H(dx^i \wedge dh_i) + d\big[r^2(g_i dx^i - Cd(\partial_i h_i))\big],\end{aligned}$$

on a donc $\omega = H(\omega) + d(r^2\alpha)$, où α est une 1-forme homogène, et donc $\mathcal{F}_{dl}^{orth} = \{\omega \in \mathcal{G}_{dl}$ / il existe une 1-forme homogène α telle que $\omega = d(r^2\alpha)\}$. □

Avant d'étudier les sous-espaces de $\mathcal{F}_{dl}$ invariants par $SO(d-1)$, nous établissons le lemme suivant.

LEMME A.2. – *Soit $g \in SO(d)$ et ω une forme différentiable, alors*
i) $g.(d\omega) = d(g.\omega)$.
ii) $g.(\delta\omega) = \delta(g.\omega)$.
iii) Si $\omega \in \mathcal{G}_{dl}$, $g.H(\omega) = H(g.\omega)$.

Preuve. – immédiate. □

Soit $\mathcal{F}_{dls}^1 = \{H(dx_d \wedge dh_s), \text{avec } h_s \in \mathcal{H}_{dls}\}$. On a $\mathcal{F}_{dl0}^1 = \{0\}$, car si $h \in \mathcal{H}_{dl0}$, il existe une constante C telle que $h = CH(x_d^l) = C(x_d^l + r^2 f)$, pour $f \in \mathcal{R}_{d,l-2}$, donc $H(dx_d \wedge dh) = CH(dx_d \wedge dx_d^l) = 0$, car $H[dx_d \wedge d(r^2 f)] = -H[d(r^2 f dx_d)] = 0$.

LEMME A.3. – *Pour $s \neq 0$, $\mathcal{F}_{dls}^1$ est stable, irréductible par $SO(d-1)$ et de plus haut poids $(s, 0, ..., 0)$.*

Preuve. – Soit φ, l'application de $\mathcal{H}_{dls}$ dans $\mathcal{F}_{dls}^1$, qui à h_s associe $H(dx^d \wedge dh_s)$. φ est une application linéaire surjective. De plus, on a pour tout $g \in SO(d-1)$, $\varphi(g.h_s) = g.\varphi(h_s)$. Ainsi, on voit que $\mathcal{F}_{dls}^1$ est stable par $SO(d-1)$. On voit aussi que Ker φ est stable par $SO(d-1)$. Comme $\mathcal{H}_{dls}$ est irréductible par $SO(d-1)$, soit Ker $\varphi = \{0\}$ soit Ker $\varphi = \mathcal{H}_{dls}$. Pour $s \neq 0$, $\mathcal{F}_{dls}^1 \neq \{0\}$ et Ker $\varphi = \{0\}$. φ est donc surjective et $\varphi(g.h_s) = g.\varphi(h_s)$ entraîne que $SO(d-1)$ agit de la même façon sur $\mathcal{F}_{dls}^1$ et $\mathcal{H}_{dls}$, d'où le lemme. □

Soit $\mathcal{F}_{dls}^2$, le sous-espace de $\mathcal{F}_{dl}$ engendré par $\{H(dx^i \wedge dh_s), 1 \leq i \leq d-1,\ h_s \in \mathcal{H}_{dls}\}$. $\mathcal{H}_{dls}$ étant stable par $SO(d-1)$, $\mathcal{F}_{dls}^2$ est stable par

$SO(d-1)$. Par contre, contrairement à $\mathcal{F}^1_{dls}$, $\mathcal{F}^2_{dls}$ n'est pas irréductible. En tout cas, puisque $\mathcal{H}_{dl} = \oplus_{s=0}^{l} \mathcal{H}_{dls}$,

$$\mathcal{F}_{dl} = \oplus_{s=1}^{l} \mathcal{F}^1_{dls} \oplus \oplus_{s=0}^{l} \mathcal{F}^2_{dls}. \tag{A.21}$$

Dans la suite, on ne s'intéressera qu'aux sous espaces de $\mathcal{F}_{dl}$ qui ne sont pas orthogonaux à $\mathcal{F}^1_{dl1}$. Pour déterminer ces sous espaces, on utilisera le lemme suivant.

LEMME A.4. – *Soit F un sous espace de $\mathcal{F}_{dl}$ irréductible par $SO(d-1)$. Soit G un sous-espace de $\mathcal{F}_{dl}$ stable par $SO(d-1)$ tel que $F \cap G = \{0\}$, alors F et G sont orthogonaux.*

Preuve. – Soient p_1 et p_2, les projections orthogonales sur G et sur l'orthogonal de G. Pour tout $x \in F$, $\forall y \in G$, $\langle x, y\rangle = \langle p_1(x), y\rangle$. Soit $g \in SO(d-1)$, alors $\langle g.x, g.y\rangle = \langle g.p_1(x), g.y\rangle$ pour tout $y \in G$, d'où $p_1(g.x) = g.p_1(x)$. De même, on a $p_2(g.x) = g.p_2(x)$.

F étant irréductible, si F n'est pas orthogonal à G, alors les représentations associées à $p_1(F)$ et à F sont équivalentes. Comme $F \cap G = \{0\}$, les représentations associées à $p_2(F)$ et à F sont équivalentes. On voit ainsi que cette représentation apparaît au moins deux fois dans la décomposition en représentation irréductible par $SO(d-1)$ de la représentation associée à $\mathcal{F}_{dl}$, ce qui n'est pas le cas, il faut donc que F et G soient orthogonaux. □

Ce lemme nous sera très utile dans la suite pour montrer qu'un espace est orthogonal à $\mathcal{F}^1_{dl1}$, il suffira en effet de montrer que son intersection avec $\mathcal{F}^1_{dl1}$ est réduite à $\{0\}$. Il est facile de voir que pour $s \neq 1$, $\mathcal{F}^1_{dls}$ et $\mathcal{F}^1_{dl1}$ sont orthogonaux, ces deux sous espaces étant irréductibles par $SO(d-1)$, leur intersection est réduite à $\{0\}$ (sinon ils sont équivalents, ce qui n'est pas le cas).

Nous allons étudier l'intersection entre $\mathcal{F}^1_{dl1}$ et $\mathcal{F}^2_{dls}$. On voit que si $\sum_{i=1}^{d-1} H(dx^i \wedge dh_i) \in \mathcal{F}^2_{dls}$ est aussi dans $\mathcal{F}^1_{dl1}$, alors il existe $h_d \in \mathcal{H}^1_{dl1}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{d} H(dx^i \wedge dh_i) = 0. \tag{A.22}$$

Nous allons donc chercher des solutions à (A.22).

LEMME A.5. – *Soit $(h_i)_{1 \leq i \leq d}$ des polynômes harmoniques de $\mathcal{H}_{dl}$, alors $\sum_{i=1}^{d} H(dx^i \wedge dh_i) = 0$ si et seulement s'il existe $f_{l+1} \in \mathcal{H}_{d,l+1}$ et $f_{l-1} \in \mathcal{H}_{d,l+1}$ tels que*

$$h_i = \partial_i f_{l+1} + H(x_i h_{l-1}). \tag{A.23}$$

Preuve. – On sait que $\sum_{i=1}^{d} H(dx^i \wedge dh_i) = 0$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{d} dx^i \wedge dh_i \in \mathcal{F}_{dl}^{orth}$, donc s'il existe une 1-forme α telle que $d(\sum_{i=1}^{d} h_i dx^i) = d(r^2\alpha) = d(r^2 \sum_{i=1}^{d} \alpha_i dx^i)$, où $\alpha_i \in \mathcal{R}_{d,l-2}$. Cette condition est satisfaite si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{d} h_i dx^i = r^2\alpha + df, \tag{A.24}$$

où $f \in \mathcal{R}_{d,l+1}$ (on vérifie facilement que si $\beta = \sum_{i=1}^{d} \beta_i dx^i$ vérifie $d\beta = 0$ et $\beta \in \mathcal{R}_{dl}$, alors $\beta = df$, pour $f \in \mathcal{R}_{d,l+1}$).

Comme $\mathcal{R}_{d,l+1} = \oplus_{k=0}^{[\frac{l+1}{2}]} r^{2k}\mathcal{H}_{d,l+1-2k}$, alors $f = \sum_{k=0}^{[\frac{l+1}{2}]} r^{2k} f_{l+1-2k}$, avec $f_s \in \mathcal{H}_{ds}$. Comme $h_i = r^2\alpha_i + \partial_i f$ et $r^2\mathcal{R}_{d,l-2}$ est orthogonal à $\mathcal{H}_{dl}$, en prenant la projection harmonique (notée H) de $r^2\alpha_i + \partial_i f$, on trouve que $h_i = \partial_i f_{l+1} + 2H(x_i f_{l-1})$. En particulier, si $f_{l-1} = 0$, alors $\sum_{i=1}^{d} dx^i \wedge dh_i = 0$. □

LEMME A.6. – *Soit $h_s \in \mathcal{H}_{d-1,s}$, alors pour $i \leq d-1$, on a*

i) $\partial_i H(x_d^{l+1-s} h_s) = \left[1 + \frac{c_s}{d+2s-3}\right] H(x_d^{l+1-s}\partial_i h_s) - c_s H(x_d^{l-1-s} H'(x_i h_s)) \in \mathcal{H}_{d,l,s-1} \oplus \mathcal{H}_{d,l,s+1}$.

ii) $H(x_i H(x_d^{l-1-s} h_s)) = H(x_d^{l-1-s} H'(x_i h_s)) - \frac{1}{d+2s-3} H(x_d^{l+1-s} \partial_i h_s) \in \mathcal{H}_{d,l,s-1} \oplus \mathcal{H}_{d,l,s+1}$.

iii) $\partial_d H(x_d^{l+1-s} h_s) = (l+1-s-c_s) H(x_d^{l-s} h_s) \in \mathcal{H}_{dls}$.

iv) $H(x_d H(x_d^{l-1-s} h_s)) = H(x_d^{l-s} h_s) \in \mathcal{H}_{dls}$.

On a noté H' la projection harmonique sur $\mathcal{H}_{d-1,s+1}$ et c_s la constante tel que $C_{l-s}^{\frac{d-2}{2}+s}(t) = C\big(t^{l-s} - \frac{c_{s+1}}{2} t^{l-s-2} + \ldots\big)$.

Preuve. – Comme $H'(x_i h_s) = x_i h_s - \frac{r_{d-1}^2}{d+2s-3}\partial_i h_s$, avec $r_{d-1}^2 = \sum_{i=1}^{d-1} x_i^2 = r^2 - x_d^2$,

$$H(x_d^{l-1-s} x_i h_s) = H(x_d^{l-1-s} H'(x_i h_s)) - \frac{1}{d+2s-3} H(x_d^{l+1-s}\partial_i h_s). \tag{A.25}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\partial_i H(x_d^{l+1-s} h_s) &= \partial_i\left[x_d^{l+1-s} h_s - \frac{c_s}{2} r^2 x_d^{l-1-s} h_s + r^4 f\right]\\ &= H(x_d^{l+1-s}\partial_i h_s) - c_s H(x_d^{l-1-s} x_i h_s)\\ &= \left(1 + \frac{c_s}{d+2s-3}\right) H(x_d^{l+1-s}\partial_i h_s) - c_s H(x_d^{l-1-s} H'(x_i h_s)),\end{aligned}$$

ce qui montre *i)*. De même, on a

$$\begin{aligned}H(x_iH(x_d^{l+1-s}h_s)) &= H(x_d^{l-1-s}x_ih_s)\\ &= H(x_d^{l-1-s}H'(x_ih_s)) - \frac{1}{d+2s-3}H(x_d^{l+1-s}\partial_i h_s),\end{aligned}$$

ce qui montre *ii)*. *iv)* est évident et *iii)* vient de

$$\begin{aligned}\partial_d H(x_d^{l+1-s}h_s) &= \partial_d\left[x_d^{l+1-s}h_s - \frac{c_s}{2}r^2x_d^{l-1-s}h_s + r^4 f\right]\\ &= (l+1-s)H(x_d^{l-s}h_s) - c_sH(x_d^{l-s}h_s). \quad \square\end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons montrer le lemme suivant :

LEMME A.7. – *Si s est différent de 0 et 2, alors $\mathcal{F}^2_{dls}$ et $\mathcal{F}^1_{dl1}$ sont orthogonaux.*

Preuve. – Nous allons montrer que $\mathcal{F}^2_{dlk} \cap \mathcal{F}^1_{dl1} = \{0\}$ pour $k \neq 0, 2$, ce qui est suffisant pour montrer que $\mathcal{F}^2_{dlk}$ et $\mathcal{F}^1_{dl1}$ sont orthogonaux.

Soit $h_d = H(x_d^{l-1}x_1)$, alors $H(dx^d \wedge dh_d) \in \mathcal{F}^1_{dl1}$. Un élément de $\mathcal{F}^2_{dlk}$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{d-1} H(dx^i \wedge dh_i)$, avec $h_i \in \mathcal{H}_{dlk}$. Si $\mathcal{F}^2_{dlk} \cap \mathcal{F}^1_{dl1} \neq \{0\}$, $\mathcal{F}^1_{dl1}$ étant irréductible, alors $\mathcal{F}^1_{dl1} \subset \mathcal{F}^2_{dlk}$ et donc $H(dx^d \wedge dh_d) \in \mathcal{F}^2_{dlk}$, il y a alors une solution à l'équation (A.22).

Le lemme A.5 entraîne qu'il existe h^1 et h^2 respectivement dans $\mathcal{H}_{d,l+1}$ et $\mathcal{H}_{d,l-1}$ tels que pour $1 \le i \le d$, on a $h_i = \partial_i h^1 + H(x_i h^2)$.

Comme $h^1 = \sum_{s=0}^{l+1} H(x_d^{l+1-s}h_s^1)$ et $h^2 = \sum_{s=0}^{l-1} H(x_d^{l-1-s}h_s^2)$, avec h_s^1 et h_s^2 des polynômes de $\mathcal{H}_{dls}$. Pour $1 \le i \le d-1$, en utilisant le lemme A.6, on a

$$\begin{aligned}h_i = \sum_{s=0}^{l+1} a_sH(x_d^{l+1-s}\partial_i h_s^1) - \sum_{s=0}^{l+1} c_sH(x_d^{l-1-s})H'(x_ih_s^1)\\ + \sum_{s=0}^{l-1} -b_sH(x_d^{l+1-s}\partial_i h_s^2) - \sum_{s=0}^{l-1} H(x_d^{l-1-s})H'(x_ih_s^2),\end{aligned} \tag{A.26}$$

avec $a_s = 1 + \frac{c_s}{d+2s-3}$ et $b_s = \frac{1}{d+2s-3}$. De plus, en posant $d_s = l+1-s-c_s$,

$$h_d = \sum_{s=0}^{l+1} d_sH(x_d^{l-s}h_s^1) + \sum_{s=0}^{l-1} H(x_d^{l-s}h_s^2) \tag{A.27}$$

De (A.27), comme $h_d \in \mathcal{H}^1_{dl1}$, on déduit que pour $s \neq 1$, $d_sh_s^1 + h_s^2 = 0$ et $d_1h_1^1 + h_1^2 = x_1$. (A.26) entraîne que pour $s \neq k$,

$$a_{s+1}\partial_i h^1_{s+1} - c_{s-1}H'(x_ih^1_{s-1}) - b_{s+1}\partial_i h^2_{s+1} + H'(x_ih^2_{s-1}) = 0. \tag{A.28}$$

Dans (A.28), on a pris $h_s^2 = 0$ pour $s \geq l$ et $h_{-1}^1 = h_{-1}^2 = h_s^1 = 0$ pour $s \geq l+2$.

Comme $k \neq 0$, pour $s = 0$ et $i \leq d-1$, $a_1 \partial_i h_1^1 - b_1 \partial_i h_1^2 = 0$, ce qui entraîne que $h_1^2 = \frac{a_1}{b_1} h_1^1$. Comme $d_1 h_1^1 + h_1^2 = x_1$, $h_1^1 = \lambda x_1$, où $\lambda = \frac{b_1}{a_1 + b_1 d_1} x_1$.

Comme $k \neq 2$, pour $s = 2$,

$$a_3 \partial_i h_3^1 - \lambda c_1 H'(x_i x_1) - b_3 \partial_i h_3^2 + \frac{\lambda a_1}{b_1} H'(x_i x_1) = 0. \tag{A.29}$$

De plus, $h_3^2 = -d_3 h_3^1$, donc pour $i \leq d-1$, $\partial_i h_3^1 = \mu H'(x_i x_1)$, avec $\mu = (c_1 - \frac{a_1}{b_1}) \frac{\lambda}{a_3 + b_3 d_3}$. Pour $i \neq 1$, $H'(x_i x_1) = x_i x_1$, et donc $h_3^1 = \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^{d-1} x_i^2 x_1 + c x_1^3$. Pour $i = 1$, $H'(x_1^2) = x_1^2 - \frac{r_{d-1}^2}{d-1}$ et $\partial_1 h_3^1 = \mu (x_1^2 - \sum_{i=1}^{d-1} \frac{x_i^2}{d-1}) = \mu \frac{d-2}{d-1} x_1^2 - \frac{\mu}{d-1} \sum_{i=1}^{d-1} x_i^2$. D'autre part $\partial_1 h_3^1 = \frac{\mu}{2} \sum_{i=2}^{d-1} x_i^2 + 3 c x_1^2$. Il faut donc que $\frac{\mu}{2} = -\frac{\mu}{d-1}$, ce qui n'est pas possible, μ étant différent de 0. Il n'y a donc pas de solutions à l'équation (A.22) , ce qui achève la preuve de ce lemme. □

A.6 Calcul des éléments matriciels des représentations irréductibles de $SO(d)$

Nous allons commencer par montrer la formule d'addition des polynômes de Gegenbauer (voir formule 3 page 486 dans [16]) : pour p un entier ou un demi entier et l un entier,

$C_l^p(\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi \cos\psi) =$

$$\sum_{m=0}^{l} C(l,p,m) C_{l-m}^{p+m}(\cos\theta) \sin^m \theta \, C_{l-m}^{p+m}(\cos\varphi) \sin^m \varphi \, C_m^{p+\frac{1}{2}}(\cos\psi).$$

Pour montrer cette formule, nous introduisons la base orthogonale de $\mathcal{H}_{dl}$, Ξ_M^l (voir [16]) où $M = (m_1, ..., \pm m_{d-2})$ avec $l = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_{d-2} \geq 0$ et

$$\Xi_M^l(x) = A_M^l \prod_{j=0}^{d-3} r_{d-j}^{m_j - m_{j+1}} C_{m_j - m_{j+1}}^{\frac{d-j-2}{2} + m_{j+1}} \left(\frac{x_{d-j}}{r_{d-j}} \right) (x_2 \pm i x_1)^{k_{d-2}},$$

où $r_k^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2$. Il est clair que pour $M \neq (0, ..., 0) = 0$, $\Xi_M^l(p) = 0$ si $p = (0, ..., 0, 1)$ et $\Xi_M^l(g^{-1}x) = \sum_K T_{KM}^{dl}(g) \Xi_K^l(x)$ et donc $\Xi_M^l(g^{-1}p) = T_{0M}^{dl}(g) \Xi_0^l(p)$, où $T^{dl} = T^{d,(l,0,...,0)}$. On peut donc calculer $T_{0M}^{dl}(g)$. Pour

$g = g(\theta)$ tel que

$$(g^{-1}(\theta)x)_d = x'_d = \sin\theta x_{d-1} + \cos\theta x_d$$
$$(g^{-1}(\theta)x)_{d-1} = x'_{d-1} = \cos\theta x_{d-1} - \sin\theta x_d = \frac{d}{d\theta}x'_d$$
$$(g^{-1}(\theta)x_i) = x'_i = x_i, \quad \text{pour} \quad i \leq d-2,$$

$\Xi^l_M(g^{-1}p) \neq 0$ si et seulement si $M = (m, 0, ..., 0)$ et $0 \leq m \leq l$. Enfin,

$$\Xi^l_0(gx) = \sum_K T^{dl}_{K0}(g^{-1})\Xi^l_M(x) = \sum_{m=0}^{l} \overline{T^{dl}_{0m}(g)}\Xi^l_m(x),$$

en notant $m = (m, 0, ..., 0)$. Comme $\Xi^l_m(g^{-1}p) = A^l_m C^{\frac{d-2}{2}+m}_{l-m}(\cos\theta)\sin^m\theta$, on en déduit la formule d'addition des polynômes de Gegenbauer.

Dans la suite, nous aurons uniquement besoin de connaître l'action de $SO(d)$ sur $\mathcal{H}_{dl1}$ et sur $\mathcal{F}^1_{dl1}$ pour $d > 3$ et sur $\mathcal{H}_{3l1}$ et $\mathcal{H}_{3l-1}$ pour $d = 3$. Nous allons commencer par chercher une base orthogonale des espaces $\mathcal{H}_{dl1}$ et $\mathcal{F}^1_{dl1}$, pour $d > 3$. Pour $d = 3$, on a $\mathcal{H}_{3l\pm} = \text{Vect}\{r^{l-1}C^{\frac{3}{2}}_{l-1}(\frac{x_3}{r})(x_2 \pm ix_1)\}$, on notera $\Xi^l_\pm(x) = A_1 r^{l-1}C^{\frac{3}{2}}_{l-1}(\frac{x_3}{r})(x_2 \pm ix_1)$, avec A_1 tel que $||\Xi^l_\pm|| = 1$.

On sait que $\mathcal{H}_{dl1} = H(x_d^{l-1}\mathcal{H}_{d-1,1})$. Or une base de $\mathcal{H}_{d-1,1}$ est $\{x_i\}_{1\leq i\leq d-1}$. On vérifie facilement que les polynômes $\Xi^l_i(x) = A_2 r^{l-1}C^{\frac{d}{2}}_{l-1}(\frac{x_d}{r})x_i$, pour $1 \leq i \leq d-1$ forment une base orthogonale de $\mathcal{H}_{dl1}$, on choisit A_2 tel que cette base soit orthonormée.

De la définition de $\mathcal{F}^1_{dl1}$, on trouve que les 2-formes $\omega^l_i = A_3 H(dx_d \wedge d\Xi^l_i)$, pour $1 \leq i \leq d-1$, forment une base orthogonale de $\mathcal{F}^1_{dl1}$. On choisit A_3 de telle sorte que cette base est orthonormée.

Nous allons calculer $T^{dl}_{ij}(g) = \langle g.\Xi^l_i, \Xi^l_j\rangle$. En fait, il suffit de calculer les éléments matriciels pour $g = g(\theta)$. On a donc $g.\Xi^l_i(x) = Ar^{l-1}C^{\frac{d}{2}}_{l-1}(\frac{x'_d}{r})x'_i$.

Pour $i \leq d-1$, en notant $\gamma_l(t) = C^{\frac{d}{2}}_{l-1}(t)/C^{\frac{d}{2}}_{l-1}(1)$, la formule d'addition donne

$$\begin{aligned} r^{l-1}\gamma_l(x'_d)x_i &= \gamma_l(\cos\theta)r^{l-1}\gamma_l(\frac{x_d}{r})x_i \\ &\quad + \frac{\gamma'_l(\cos\theta)}{\gamma'_l(1)}\sin\theta r^{l-2}\gamma'_l\left(\frac{x_d}{r}\right)x_{d-1}x_i + h_\theta, \end{aligned} \tag{A.30}$$

avec $h_\theta \in \oplus^l_{s=3}\mathcal{H}_{dls}$, qui est orthogonale à $\mathcal{H}_{dl1}$, et $r^{l-2}\gamma'_{l-1}(\frac{x_d}{r})x_{d-1}x_i \in \mathcal{H}_{dl2}$. Donc pour $i \leq d-1$,

$$\langle g.\Xi^l_i, \Xi^l_j\rangle = \delta_{ij}c\gamma_l(\cos\theta). \tag{A.31}$$

Comme pour $\theta = 0$, $T_{ij}^{dl}(g(0)) = 1$, $c = 1$ et pour $i \leq d-1$,

$$T_{ij}^{dl}(g(\theta)) = \delta_{ij}\gamma_l(\cos\theta). \tag{A.32}$$

Si $i = d-1$, on montre facilement que $T_{ij}^{dl}(g) = 0$ pour $i \neq j$, et si $i = j$ (c ne désigne pas toujours la même constante)

$$\begin{aligned} T_{ii}^{dl}(g(\theta)) &= \langle g.\Xi_i^l, \Xi_i^l\rangle \\ &= c\int_{S^{d-1}} C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(x'_d)C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(x_d)x'_{d-1}x_{d-1}dx \\ &= c\frac{d}{d\theta}\int_{S^{d-1}} C_l^{\frac{d-2}{2}}(x'_d)C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(x_d)x_{d-1}dx \\ &= c\frac{d}{d\theta}\int_0^\pi\int_0^\pi C_l^{\frac{d-2}{2}}(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\psi)\times \\ &\qquad \times C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(\cos\phi)\sin^{d-1}\phi\cos\psi\sin^{d-3}\psi d\phi d\psi. \end{aligned}$$

En multipliant par $C_1^{\frac{d-3}{2}}(\cos\psi)\sin^{d-3}\psi = C\cos\psi\sin^{d-3}\psi$ la formule d'addition des polynômes de Gegenbauer et en intégrant entre 0 et π, par la relation d'orthogonalité (A.14) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi C_l^{\frac{d-2}{2}}(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\psi)\cos\psi\sin^{d-3}\psi d\psi \\ &\quad = cC_{l-1}^{\frac{d}{2}}(\cos\theta)\sin\theta\, C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(\cos\phi)\sin\phi. \end{aligned}$$

En tenant compte que $T_{d-1,d-1}^{dl}(g(0)) = 1$, on en déduit que

$$T_{d-1,d-1}^{dl}(g(\theta)) = c\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\gamma_l(\cos\theta)) = \cos\theta\gamma_l(\cos\theta) - \sin^2\theta\gamma'_l(\cos\theta).$$

En effectuant un changement de base, on trouve la forme générale des éléments matriciels de T^{dl}:

$$T_{ij}^{dl}(g) = \alpha_1(g_{dd})g_{ij} + \beta_1(g_{dd})g_{id}g_{dj}, \tag{A.33}$$

avec $\alpha_1(t) = \gamma_l(t)$ et $\beta_1(t) = \gamma'_l(t)$.

Pour $d = 3$, par un calcul analogue, on a pour $g = g(\theta)$

$$T_{+\pm}^{3l}(g) = T_{-\mp}^{3l}(g) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\gamma_l(\cos\theta)) \pm \gamma_l(\cos\theta)\right], \tag{A.34}$$

avec $T_{\zeta\zeta'}^{3l}(g) = \langle g.\Xi_\zeta^l, \Xi_{\zeta'}^l\rangle$, avec ζ et ζ' dans $\{+,-\}$.

Notons Q^{dl} la représentation $T^{d,(l,1,0,\dots,0)}$. Comme précédemment, nous allons calculer les éléments matriciels dans le cas où $g = g(\theta)$. Pour $i \leq d-1$,

$$\begin{aligned} g.\omega_i^l &= A_3 g.H\left[dx_d \wedge d\left(r^{l-1}\gamma_l\left(\frac{x_d}{r}x_i\right)\right)\right] \\ &= A_3 \cos\theta H\left[dx_d \wedge d\left(r^{l-1}\gamma_l\left(\frac{x'_d}{r}x_i\right)\right)\right] \\ &\quad + A_3 \sin\theta H\left[dx_{d-1} \wedge d\left(r^{l-1}\gamma_l\left(\frac{x'_d}{r}x_i\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

D'une part, l'équation (A.30) entraîne que

$$H\left[dx_d \wedge d\left(r^{l-1}\gamma_l\left(\frac{x'_d}{r}\right)x_i\right)\right] = \gamma_l(\cos\theta)H\left[dx_d \wedge d\left(r^{l-1}\gamma_l\left(\frac{x_d}{r}\right)x_i\right)\right] + \omega_\theta$$

avec $\omega_\theta \in \oplus_{s=2}^l \mathcal{F}_{dls}^1$, qui est orthogonal à $\mathcal{F}_{dl1}^1$. D'autre part, (A.30) entraîne aussi que

$$\begin{aligned} H&\left[dx_{d-1} \wedge d\left(r^{l-1}\gamma_l\left(\frac{x'_d}{r}\right)x_i\right)\right] \\ &= \frac{\gamma'_l(\cos\theta)}{\gamma'_l(1)} \sin\theta H\left[dx_{d-1} \wedge d\left(r^{l-2}\gamma'_l\left(\frac{x_d}{r}\right)x_i\right)\right] + \omega'_\theta, \end{aligned}$$

avec $\omega'_\theta \in \oplus_{s\neq 0,2}\mathcal{F}_{dls}^2$, qui est orthogonal à $\mathcal{F}_{dl1}^1$ par le lemme A.7.

On connaît l'équation différentielle satisfaite par γ_l :

$$(1-t^2)\gamma''_l(t) - (d+1)t\gamma'_l(t) + (l-1)(d+l-1)\gamma_l(t) = 0. \tag{A.35}$$

Pour $t = 1$, comme $\gamma_l(1) = 1$, on a $\gamma'_l(1) = \frac{(l-1)(d+l-1)}{d+1}$.

Soit a le coefficient du terme de degré $l-1$ du polynôme γ_l, alors

$$H\left[dx_{d-1} \wedge d\left(r^{l-2}\gamma'_l\left(\frac{x_d}{r}\right)x_i\right)\right] = a(l-1)H[dx_{d-1} \wedge d(x_d^{l-2}x_{d-1}x_i)].$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\langle H[dx_{d-1} \wedge d(x_d^{l-2}x_{d-1}x_i)], H[dx_d \wedge d(x_d^{l-1}x_j)]\rangle = \\ &= \frac{\delta_{ij}}{2}\langle H[dx_{d-1}^2 \wedge d(x_d^{l-2}x_i)], H[dx_d \wedge d(x_d^{l-1}x_i)]\rangle \\ &= \frac{\delta_{ij}}{2(d-2)}\langle H[d(r^2 - x_i^2 - x_d^2) \wedge d(x_d^{l-2}x_i)], H[dx_d \wedge d(x_d^{l-1}x_i)]\rangle \\ &= -\frac{\delta_{ij}}{2(d-2)}\left[\left\langle H[d(x_d^2) \wedge d(x_d^{l-2}x_i)] + 2H\left[d\left(\frac{x_i^3}{3}\right) \wedge dx_d^{l-2}\right],\right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. H[dx_d \wedge d(x_d^{l-1}x_i)]\right\rangle\right]. \end{aligned}$$

Soit $\omega = H\Big[d\Big(\frac{x_i^3}{3} - \frac{r_{d-1}^2 x_i}{d+1}\Big) \wedge dx_d^{l-2}\Big]$, $\omega \in \mathcal{F}_{dl3}^1$, qui est orthogonal à $\mathcal{F}_{nl1}^1$, d'où

$$\begin{aligned} H\left[d\left(\frac{x_i^3}{3}\right) \wedge dx_d^{l-2}\right] &= \omega + H\left[d\left(\frac{r_{d-1}^2 x_i}{d+1}\right) \wedge dx_d^{l-2}\right] \\ &= \omega - H\left[d\left(\frac{x_d^2 x_i}{d+1}\right) \wedge dx_d^{l-2}\right] \\ &= \omega + \frac{l-2}{d+1} H[dx_d \wedge d(x_d^{l-1} x_i)]. \end{aligned}$$

On a donc
$\langle H[dx_{d-1} \wedge d(x_d^{l-2} x_{d-1} x_i)], H[dx_{d-1} \wedge d(x_d^{l-2} x_{d-1} x_j)]\rangle =$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\delta_{ij}}{d-2}\left[1 + \frac{l-2}{n+1}\right] \langle H[dx_d \wedge d(x_d^{l-1} x_i)] H[dx_d \wedge d(x_d^{l-1} x_i)]\rangle \\ &= -\frac{\delta_{ij}}{d-2} \frac{d+l-1}{d+1} \times \frac{1}{a^2 A_3^2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \langle g.\omega_i^l, \omega_i^l\rangle &= \cos\theta \gamma_l(\cos\theta) - \frac{l-1}{(d-2)\gamma_l'(1)}\left(\frac{d+l-1}{d+1}\right)\gamma_l'(\cos\theta)\sin^2\theta \\ &= \cos\theta\gamma_l(\cos\theta) - \frac{1}{d-2}\gamma_l'(\cos\theta)\sin^2\theta, \end{aligned}$$

pour $i \leq d-1$. Pour $i \neq j$, $\langle g.\omega_i^l, \omega_j^l\rangle = 0$.

Nous allons maintenant calculer $\langle g.\omega_{d-1}^l, \omega_{d-1}^l\rangle$. Tout d'abord, on remarque que $dx_d \wedge d(x_d^{l-1} x_{d-1}) = \frac{dx_d^l}{l} \wedge dx_{d-1}$, ce qui permet de calculer $H[dx_d \wedge d(x_d^{l-1} x_{d-1})]$:

$$\begin{aligned} H[dx_d \wedge d(x_d^{l-1} x_{d-1})] &= cH\Big[d\Big(r^l C_l^{\frac{d-2}{2}}\Big(\frac{x_d}{r}\Big)\Big) \wedge dx_{d-1}\Big] \\ &= cH\Big[r^{l-1}\gamma_l\Big(\frac{x_d}{r}\Big) dx_d \wedge dx_{d-1}\Big] \\ &= c\,\omega_{d-1}^l, \end{aligned}$$

c ne désignant pas toujours la même constante. Comme $g.(dx_d \wedge dx_{d-1}) = dx_d \wedge dx_{d-1}$,

$$
\begin{aligned}
g.\omega_{d-1}^l &= cH\left[r^{l-1}\gamma_l\left(\frac{x_d'}{r}\right)dx_d \wedge dx_{d-1}\right] \\
&= c\sum_{m=1}^{l} C_m C_{l-m}^{\frac{d-2}{2}+m}(\cos\theta)\sin^{m-1}\theta H \\
&\quad \left[C_{l-m}^{\frac{d-2}{2}+m}\left(\frac{x_d}{r}\right)r_{d-1}^{m-1}C_{m-1}^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{x_{d-1}}{r_{d-1}}\right)dx_d \wedge dx_{d-1}\right] \\
&= c\sum_{m=1}^{l} C_m C_{l-m}^{\frac{d-2}{2}+m}(\cos\theta)\sin^{m-1}\theta C_m' H \\
&\quad \left[dx_d^{l-m+1} \wedge d\left(r_{d-1}^m C_m^{\frac{d-3}{2}}\left(\frac{x_{d-1}}{r_{d-1}}\right)\right)\right] \\
&= c\sum_{m=1}^{l} C_m C_m' C_{l-m}^{\frac{d-2}{2}+m}(\cos\theta)\sin^{m-1}\theta H \\
&\quad \left[dx_d \wedge d\left(x_d^{l-m} r_{d-1}^m C_m^{\frac{d-3}{2}}\left(\frac{x_{d-1}}{r_{d-1}}\right)\right)\right].
\end{aligned}
$$

Comme $H\left[dx_d \wedge d\left(x_d^{l-m} r_{d-1}^m C_m^{\frac{d-3}{2}}\left(\frac{x_{d-1}}{r_{d-1}}\right)\right)\right] \in \mathcal{F}_{dlm}^1$, qui est orthogonal à $\mathcal{F}_{dl1}^1$ pour $m \neq 1$,

$$\langle g.\omega_{d-1}, \omega_{d-1}\rangle = C_1 C_{l-1}^{\frac{d}{2}}(\cos\theta) = \gamma_l(\cos\theta).$$

En effectuant un changement de base, on trouve la forme générale des éléments matriciels de Q^{dl}:

$$Q_{ij}^{dl}(g) = \alpha_2(g_{dd})g_{ij} + \beta_2(g_{dd})g_{id}g_{dj}, \quad \text{avec} \tag{A.36}$$

$$\alpha_2(t) = t\gamma_l(t) - \frac{1-t^2}{d-2}\gamma_l'(t), \tag{A.37}$$

$$\beta_2(t) = -\gamma_l(t) - \frac{t}{d-2}\gamma_l'(t). \tag{A.38}$$

Nous avons ainsi montré le théorème suivant :

THÉORÈME A.1. – *Une représentation irréductible de $SO(d)$ telle que sa décomposition en représentation irréductible de $SO(d-1)$ contienne une copie de la représentation naturelle U de $SO(d-1)$ telle que $U(h) = h$ est équivalente pour $d \geq 4$ à une des représentations T^{dl} ou Q^{dl}, avec $l \geq 1$, et pour $d = 3$ à une des représentations T^{3l}, avec $l \geq 1$. Des éléments matriciels de ces représentations sont donnés par (A.33), (A.36) et (A.34).*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. O. BARUT et R. RACZKA, Theory of group representation and its applications, PWN, Polish scientific publishers, 1977.

[2] P. BAXENDALE, The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms, Lecture Notes **1186**, Springer, 1986.

[3] P. BAXENDALE, Stability and equilibrium properties of stochastic flows of diffeomorphisms, in *Diffusion processes and related problems in analysis*, vol. **2**, Birkhäuser, Boston, 1992.

[4] P. BAXENDALE, Exposé à l'université P. et M. Curie (notes manuscrites), 1986.

[5] P. BAXENDALE et T. E. HARRIS, Isotropic stochastic flows, *Annals of probability*, vol. **14**, 1986, p. 1155-1179.

[6] A. CARVERHILL, Lyapunov exponents for stochastic flows on manifolds, Lecture Notes **1186**, Springer, 1986.

[7] R. W. R. DARLING, Isotropic Stochastic Flows : a survey, in *Diffusion processes and related problems in analysis*, vol. **2**, Birkhäuser, Boston, 1992.

[8] I. M. GELFAND, R. A. MINLOS et Z. Ya. SAPIRO, Representations of the rotationnal group and of the Lorentz group, McMillan, 1963.

[9] S. HELGASON, Differential geometry and symetric spaces, Academic Press, 1962.

[10] H. KUNITA, Stochastic flows and stochastic differential equations, Cambridge university press, 1990.

[11] N. IKEDA et S. WATANABE, Stochastic differential equations and diffusion processes, North Holland, 1981.

[12] F. LEDRAPPIER, Cours à l'Ecole d'Eté de Saint-Flour, Lecture Notes **1097**, Springer, 1982.

[13] Y. LE JAN, On isotropic Brownian motions, *Zeit. fur Wahrsch.*, vol. **70**, 1985, p. 609-620.

[14] Y. LE JAN et S. WATANABE, Stochastic flows of diffeomorphisms, *Proceedings of the Taniguchi Symposium 1982*, North-Holland 1984.

[15] O. RAIMOND, Flots stochastiques isotropes et diffusions auto-attractives, Thèse, université Paris-sud, 1994.

[16] N. Ja. VILENKIN, Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Paris, Dunod, 1969.

[17] N. Ja. VILENKIN et A. V. KLIMYK, Representation of Lie groups and special functions, London, Kluwer, 1992.

[18] H. WEYL, The classical groups - Their invariants and representations, Princeton university press, 1946.

[19] M. I. YADRENKO, Spectral theory of random fields, Optimization software Inc., N.Y, 1983.

[20] A. M. YAGLOM, Second order homogeneous random fields, 4^{th} *Berkeley symposium*, vol. **2**, 1961, p. 593-622.

[21] A. M. YAGLOM, Correlation theory and related random functions, Springer-Verlag, 1987.

[22] K. YOSIDA, Functional analysis, Springer, 1965.

[23] P. P. ZEBOLENKO, Compact Lie groups and their applications, *A.M.S. translations*, 1973.

(Manuscrit reçu le 2 septembre 1997;
version révisée reçue le 3 décembre 1998.)