ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ABDELAZIZ KONDAH
VÉRONIQUE MAUME
BERNARD SCHMITT

**Vitesse de convergence vers l'état d'équilibre pour des dynamiques markoviennes non höldériennes**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 33, nº 6 (1997), p. 675-695
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1997__33_6_675_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 33, n° 6, 1997, p. 675-695 *Probabilités et Statistiques*

# Vitesse de convergence vers l'état d'équilibre pour des dynamiques markoviennes non höldériennes

par

**Abdelaziz KONDAH**

Université IBN TOFAIL, Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques BP, 133 Kenitra, Maroc.

**Véronique MAUME**

Université de Bourgogne, Faculté des Sciences Mirande,
Laboratoire de Topologie, BP 400, 21011 Dijon Cedex.

**Bernard SCHMITT**

Université de Bourgogne, Faculté des Sciences Mirande,
Laboratoire de Topologie, BP 400, 21011 Dijon Cedex.
E-mail : schmittb@u-bourgogne.fr

RÉSUMÉ. – On étudie la vitesse de convergence vers l'état d'équilibre pour des dynamiques markoviennes non höldériennes. On obtient une estimation de la vitesse de mélange sur un sous-espace $B$ dense dans l'espace des fonctions continues. En outre, on montre que le spectre de l'opérateur de Perron-Frobenius, restreint à $B$, est un disque fermé dont chaque point est une valeur propre. Ceci implique que la vitesse de convergence vers l'état d'équilibre ne peut pas être exponentielle.

ABSTRACT. – We study the convergence speed to equilibrium state for Markovian non hölderian dynamics. In particular, an estimation of the mixing speed is obtained on a subspace $B$ which is dense in the space of continuous functions. Moreover, we show that the spectrum of the Perron-Frobenius operator as acting on $B$ is a whole closed disk of which each point is an eigenvalue. This implies that the convergence speed cannot be exponential.

## INTRODUCTION

Y. Sinaï [Si] et D. Ruelle [Ru1] ont introduit le formalisme thermodynamique voici une trentaine d'années. Ce point de vue a permis en particulier de comprendre la notion de mesure d'équilibre associée à une fonction de poids (ou interaction).

Des résultats concernant l'existence et les propriétés des mesures d'équilibre ont été établis pour différents types de systèmes dynamiques ([Bo], [Pa, Po], [Ru1] pour le cas symbolique; [Bo], [Ru2] pour les difféomorphismes de type Axiome A ; [Co], [H, K], [Le], [Sc], [Wa] pour les endomorphismes unidimensionnels et les applications dilatantes etc...). Dans cet article, on s'intéresse à la vitesse de convergence vers l'état d'équilibre (ou vitesse de mélange). Pour ce type de questions, il n'est pas restrictif de se placer dans le cadre de la dynamique symbolique : en utilisant les partitions markoviennes, on peut représenter de nombreux systèmes par des sous-décalages de type fini.

Ainsi, considérons un système symbolique ayant un nombre fini d'états et une interaction $\phi$ vérifiant une condition plus large que celle de sommabilité du module de continuité envisagée dans [Sc] et [Gor] (voir section 1 pour une définition précise). Des résultats classiques montrent que le cas des sous-décalages apériodiques de type fini se réduit au cas du décalage plein, c'est pourquoi nous n'envisageons que cette situation.

Lorsque le module de continuité de $\phi$ est géométrique (c'est à dire que $\phi$ est höldérienne), la situation est bien connue ([Bo], [Ru2], [Ru1]) : l'opérateur de Perron-Frobenius P (ou opérateur de transfert) en tant qu'opérateur sur l'espace des fonctions höldériennes est quasi-compact. Ceci implique que la vitesse de convergence vers l'état d' équilibre, sur cet espace, est exponentielle. Cette propriété dite du trou spectral ou de la vitesse exponentielle des corrélations peut aussi être établie en utilisant les métriques projectives introduites par G. Birkhoff [Bi1]. Plus précisément, on peut montrer l'existence d'un cône convexe fermé et borné $\Lambda$ de fonctions höldériennes positives tel que $P\Lambda$ soit inclus strictement dans $\Lambda$. L'opérateur $P$ contracte alors strictement la métrique projective associée à $\Lambda$ ; cette propriété de stricte contraction permet alors de conclure [Fe, Sc].

Dans le cadre non höldérien dans lequel nous nous plaçons, il n'existe pas, à priori, de cône strictement $P-$invariant. Afin d'obtenir une estimation de la vitesse de mélange sur un sous-espace $B$ dense dans l'espace des fonctions continues (théorème 1.1), nous suivons une nouvelle approche en introduisant une suite de cônes. Précisément, on construit une suite $(\Lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de cônes convexes de fonctions continues positives et une suite

$(n_l)_{l \in \mathbb{N}^\star}$ d'entiers tels que : $P^{n_l} \Lambda_{l-1} \subset \Lambda_l$, $l \geq 1$ et pour lesquels, $P^{n_l}$ est une contraction de $\Lambda_{l-1}$ dans $\Lambda_l$, de coefficient de contraction uniforme $\gamma < 1$. Le captage d'une corrélation non exponentielle provient alors du fait que $P^{n_1 + \dots + n_l}$ est une contraction de $\Lambda_0$ dans $\Lambda_l$, dont le coefficient de contraction est majoré par $\gamma^l$. Évidemment, dans le cas Hölder, la suite $n_l$ est identiquement égale à 1 et on retrouve une vitesse de convergence exponentielle. Cette méthode nous permet d'estimer la vitesse dans d'autres cas ; par exemple, si le module de continuité de $\phi$ est en $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha > 0$, la vitesse de mélange est polynomiale. Ce dernier cas représente une dynamique markovienne $C^1$ par morceaux et dilatante de l'intervalle et dont le module de continuité de la dérivée est en $(1 + |\log t|)^{-1-\alpha}$, $\alpha > 0$ ([Co]).

Nous obtenons aussi une condition suffisante, portant sur le coefficient de mélange, pour que le théorème de la limite centrale soit vérifié (théorème 4.2). Cette condition est celle donnée dans [I, L] pour des processus stationnaires mélangeants.

Enfin, nous montrons que le spectre de l'opérateur $P$ restreint à $B$ est un disque fermé dont chaque point est une valeur propre (théorème 1.2). Ceci implique en particulier que la vitesse de mélange sur $B$ ne peut pas être exponentielle. Nous obtenons ce résultat en adaptant la construction des fonctions propres de $P$ donné dans [C, I] pour le cas unidimensionnel.

## 1. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS

On considère $A$, un alphabet fini, $X = A^{\mathbb{N}}$ sur lequel la topologie est donnée par la distance : $d(x, y) = \rho^n$, si $x_j = y_j$ pour $j = 0, \cdots, n-1$ et $x_n \neq y_n$ avec $0 < \rho < 1$. On notera $x \overset{n}{\sim} y$ si $d(x, y) \leq \rho^n$.

Pour $f \in C(X) = C(X, \mathbb{R})$, on définit le module de continuité de $f$ comme étant la suite $(v_f(n))_{n \geq 0}$ avec :

$$v_f(n) = \sup_{x \overset{n}{\sim} y} | f(x) - f(y) | .$$

On considère sur $X$ le décalage $\sigma$ et une fonction de poids $\phi \in C(X)$ pour laquelle on définit pour $x$ et $y$ dans $X$ :

$$C_\phi(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}^\star} \sup_{a \in A^n} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^i(ax) - \phi \circ \sigma^i(ay) \right| .$$

Où $ax$ désigne le concaténé de $a$ et $x$, pour $a \in A^n$ et $x \in X$. On suppose qu'il existe une constante $C_\phi$ telle que $C_\phi(x,y) \leq C_\phi$ $\forall x, y$. Soit :

$$C_\phi(p) = \sup_{x \overset{p}{\sim} y} C_\phi(x,y).$$

On dira que $\phi$ vérifie l'hypothèse (H) due à P. Walters [Wa] si :

*La suite* $(C_\phi(p))_{p\in\mathbb{N}}$ *est strictement positive et décroît vers* 0.

*Remarque* 1.1. – On a $v_\phi(p+1) \leq C_\phi(p) \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} v_\phi(n)$ ; en particulier, si le module de continuité de $\phi$ est sommable, $\phi$ vérifie l'hypothèse (H) et la suite $C_\phi(p)$ est majorée par une suite géométrique si et seulement si la suite $v_\phi(p)$ l'est aussi.

L'opérateur de transfert agissant sur $C(X)$, associé à $\phi$ est défini par :

$$Pf(x) = \sum_{\alpha\in A} e^{\phi(\alpha x)} f(\alpha x) \text{ pour } f \in C(X).$$

On considère d'autre part $P^\star$ l'opérateur dual de $P$ défini par :

$$\int h d(P^\star \mu) = \int P h d\mu \quad \forall h \in C(X)$$

pour $\mu$ une mesure borélienne sur $X$.

Dans toute la suite, on suppose que $\phi$ vérifie l'hypothèse (H). On peut alors voir $C_\phi$ comme une métrique sur $X$ en posant $d'(x,y) = C_\phi(n)$ si $d(x,y) = \rho^n$, $d'(x,x) = 0$. On considère $B_\phi$, l'espace des fonctions lipschitziennes par rapport à cette métrique ; plus précisément :

$$B_\phi = \{f \in C(X) \ / \ \exists K \geq 0 \ / \ \forall n \geq 0,\ v_f(n) \leq K C_\phi(n)\}.$$

Pour $f \in B_\phi$, on définit alors :

$$K_\phi(f) = \inf\{K \ / \ \forall n \geq 0,\ v_f(n) \leq K C_\phi(n)\}$$

$$\| f \|_{B_\phi} = \max(\| f \|_\infty, K_\phi(f)).$$

Il est clair que $\| \ \|_{B_\phi}$ définit une norme sur $B_\phi$ qui en fait un espace de Banach. De plus, $B_\phi$ est dense dans $C(X)$ par Stone-Weierstrass.

Pour une constante $D > 1$, on définit une suite d'entiers $n_l$ strictement positifs par :

$$n_1 = \inf\{n > 0 \,/ DC_\phi(n) \le C_\phi\},$$
$$n_2 = \inf\left\{n > 0 \,\Big/ \frac{2D^2}{D-1} C_\phi(n) \le C_\phi\right\}, \ldots,$$
$$n_l = \inf\left\{n > 0 \,\Big/ \frac{2D^l}{D-1} C_\phi(n) \le C_\phi\right\}.$$

Si on considère maintenant un entier $n$, il existe un unique entier $l(n)$ tel que :

$$n_1 + \cdots + n_{l(n)} \le n < n_1 + \cdots + n_{l(n)+1}$$

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. – *L'opérateur $P$ admet une plus grande valeur propre réelle, positive, simple $c$, de fonction propre $h_0$ continue et strictement positive. De plus, il existe une probabilité borélienne $\nu$ et des constantes $0 < \gamma < 1$, $C > 0$ vérifiant :*

1. *Pour tout $f \in B_\phi$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :*
$$\left\| \frac{P^n f}{c^n} - h_0 \nu(f) \right\|_\infty \le C\, \gamma^{l(n)} \|f\|_{B_\phi}.$$
2. $P^\star \nu = c\nu$.
3. *La mesure $\mu = h_0\nu$ est une mesure de Gibbs invariante par le décalage.*
4. *Sous l'hypothèse $\nu(h_0) = 1$, le triplet $(h_0, c, \nu)$ est unique.*

*Remarque* 1.2.

- L'existence du triplet $(h_0, c, \nu)$ est connue ([Wa] pour le cas général considéré ici, [Bo], [Ru1] pour le cas où le module de continuité de $\phi$ est sommable). Pour démontrer le théorème 1.1, nous utilisons la propriété de contraction des métriques projectives. Cette méthode a été initiée dans [Fe, Sc] et plus récemment utilisée dans [Li1]. Elle nous permet ainsi de donner une autre construction de $(h_0, c, \nu)$.
- Dans le cas où $\sum_{n\ge1} \sum_{k\ge n} v_\phi(k) < \infty$, A. Raugi ([Ra]) a montré :
$$\sum_n \|P^n f\|_\infty < \infty$$
pour $f$ vérifiant $\sum_{n\ge1}\sum_{k\ge n} v_f(k) < \infty$ et $\int f d\nu = 0$. Cependant, la vitesse de convergence à zéro de $\|P^n f\|_\infty$ n'est pas connue.

D'autre part, on va déterminer le spectre de $P$ sous l'hypothèse suivante sur la suite $(C_\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ :

- $(H1)$ $\forall q \in \mathbb{N}^\star$, la suite

$$\frac{C_\phi\left(\left[\frac{n}{q}\right]\right)}{C_\phi(n)}$$

est bornée ($\left[\frac{n}{q}\right]$ désignant la partie entière de $\frac{n}{q}$).

*Remarque* 1.3.

- Cette hypothèse $(H1)$ peut paraître artificielle ; c'est elle qui assurera l'appartenance des fonctions propres à $B_\phi$. Remarquons tout d'abord que les suites géométriques ne la vérifient pas.
- D'autre part, en prenant $q = 2$ et $n = 2^k$, on tire de $(H1)$ l'existence d'une constante $d > 1$ telle que $C_\phi(2^k) \geq d^{-k} C_\phi(1)$. On en déduit immédiatement :

$$\forall\theta < 1, \text{ la suite } \left(\frac{\theta^n}{C_\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

Nous utiliserons cette propriété dans la cinquième partie de l'article.

Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. – *Si $\phi$ vérifie l'hypothèse $(H1)$, le spectre de $P$, en tant qu'opérateur sur $B_\phi$ est le disque fermé de centre* 0 *et de rayon c. De plus, chaque point de ce disque est une valeur propre.*

Pour démontrer ce théorème, on reprend la construction des fonctions propres faite dans [C, I].

## 2. GÉNÉRALITÉS SUR LES CÔNES ET MÉTRIQUES PROJECTIVES

Étant donné un cône $\Lambda$ convexe fermé, formé de fonctions positives, on considère l'espace projectif associé $\dot\Lambda$ identifié par :

$$\dot\Lambda = \left\{ f \in \Lambda \Big/ \int f dm = 1 \right\}$$

où $m$ est une mesure finie sur $X$, dont le support est $X$.

Si $f$ et $g$ sont dans $\dot{\Lambda}$, il existe un plus grand réel $\lambda(f,g)$ (éventuellement nul) et un plus petit réel $\beta(f,g)$ (éventuellement, $\beta(f,g) = \infty$) tels que :

$$\lambda(f,g)f \leq g \leq \mu(f,g)f \text{ et } g - \lambda(f,g)f \in \dot{\Lambda}\,\Lambda\ \mu(f,g)f - g \in \dot{\Lambda}\,.$$

On définit alors une pseudo-métrique sur $\dot{\Lambda}$ par :

$$\theta_\Lambda(g,f) = \log \frac{\mu(f,g)}{\lambda(f,g)}.$$

L'intérêt d'introduire cette métrique sur $\dot{\Lambda}$ réside dans les trois propositions suivantes, dues à G. Birkhoff et que l'on énonce, ici, dans le cas particulier de cônes de fonctions continues.

Proposition 2.1. – *[Bi1]*

*Soit $f \in C^+(X)$, l'ensemble $\pi_f = \{g \in C^+(X)\ /\ \theta_{C^+(X)}(g,f) < \infty\}$ est un espace métrique complet pour la métrique $\theta_{C^+(X)}$ associée au cône $C^+(X)$ des fonctions continues positives.*

Considérons, d'autre part un opérateur $P$ sur $C^+(X)$ positif et deux cônes $\Lambda$ et $\Lambda'$ tels que $P\Lambda \subset \Lambda'$. On définit :

$$diam_{\theta_{\Lambda'}}(P\Lambda) = \sup_{f,g\in\Lambda} \theta_{\Lambda'}(Pf,Pg).$$

On a alors le résultat fondamental suivant.

Proposition 2.2. – *[Bi1] [Bi2]*

*Soit un opérateur $P$ sur $C^+(X)$ positif et deux cônes $\Lambda$ et $\Lambda'$ tels que $P\Lambda \subset \Lambda'$ alors pour tout $f$ et $g \in \Lambda$, on a :*

$$\theta_{\Lambda'}(Pf,Pg) \leq \tanh\left[\frac{1}{4} diam_{\theta_{\Lambda'}}(P\Lambda)\right]\theta_\Lambda(f,g).$$

Enfin, la proposition suivante relie la métrique projective $\theta_\Lambda$ et la norme $\|\ \|_\infty$.

Proposition 2.3. – *[Bi1]*

*Pour $f$ et $g$ dans $\Lambda$ avec $\int f dm = 1$ et $\int g dm = 1$, on a :*

$$\|f-g\|_\infty \leq (e^{\theta_\Lambda(f,g)} - 1)\|g\|_\infty.$$

## 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1

### 3.1. Construction de $c$ et $h_0$.

On va maintenant construire une suite de cônes dans $B_\phi$.

Considérons le cône de fonctions positives suivant :

$$\Lambda_0 = \left\{ g \in C^+(X) \ / \ g(x) \leq \exp(C_\phi(p))g(y) \text{ si } x \overset{p}{\sim} y \right\}.$$

On vérifie facilement que les fonctions non identiquement nulles de $\Lambda_0$ sont strictement positives et dans $B_\phi$. De plus, si $f \in \Lambda_0$, alors :

$$P^n f(x) \leq P^n f(y) \exp(C_\phi(p) + C_\phi(n+p)) \text{ pour } x \overset{p}{\sim} y. \tag{1}$$

Ceci nous amène à considérer le cône suivant :

$$\Lambda^1_{n,D} = \left\{ g \in C^+(X) \ / \ g(x) \leq \exp(C^1_n(p))g(y) \text{ si } x \overset{p}{\sim} y \right\}$$

avec $C^1_n(p) = D(C_\phi(p) + C_\phi(n+p))$ et $D > 1$. D'après (1), on a : $P^n\Lambda_0 \subset \Lambda^1_{n,1}$. On souhaite estimer $\theta_{\Lambda^1_{n,D}}(P^n f, P^n g)$ pour $f$ et $g$ dans $\Lambda_0$. Des estimations similaires ont été obtenues dans [Fe, Sc].

LEMME 3.1. – *Soient $D > 1$ et $n$ tel que $DC_\phi(n) \leq C_\phi$, on a :*

$$diam_{\theta_{\Lambda^1_{n,D}}} \Lambda^1_{n,1} \leq 2 \log \frac{D+1}{D-1} + 2(D+1)C_\phi := M.$$

*Preuve.* – On commence par évaluer $\mu(f,g)$ et $\lambda(f,g)$, pour $f$ et $g$ dans $\Lambda^1_{n,1}$. Soit $\mu$ tel que $\mu f - g \in \Lambda^1_{n,D}$.

$\mu f - g \geq 0 \implies \mu \geq \|\frac{f}{g}\|_\infty$

$\mu$ vérifie, de plus, pour tout $p$ et $x \overset{p}{\sim} y$,

$$\mu f(x) - g(x) \leq e^{C^1_n(p)}(\mu f(y) - g(y)).$$

Ce qui donne :

$$\mu(f,g) = \sup_p \sup_{x \sim^p y} \frac{\exp(C^1_n(p))f(x) - f(y)}{\exp(C^1_n(p))g(x) - g(y)} \geq \sup_{x \in X} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De même, on a :

$$(\lambda(f,g))^{-1} = \sup_p \sup_{x \sim^p y} \frac{\exp(C^1_n(p))g(x) - g(y)}{\exp(C^1_n(p))f(x) - f(y)}.$$

De plus, comme $f$ et $g$ sont dans $\Lambda^1_{n,1}$, on a pour $x \overset{p}{\sim} y$ :

$$e^{-D^{-1}C^1_n(p)} f(y) \leq f(x) \leq e^{D^{-1}C^1_n(p)} f(y)$$

et

$$e^{-D^{-1}C^1_n(p)} g(y) \leq g(x) \leq e^{D^{-1}C^1_n(p)} g(y).$$

Ce qui nous donne :

$$\theta_{\Lambda^1_{n,D}}(f,g) \leq \log \sup_p \sup_{x,z\in X} \frac{[\exp(C^1_n(p)) - \exp(-D^{-1}C^1_n(p))]^2 f(x)g(z)}{[\exp(C^1_n(p)) - \exp(D^{-1}C^1_n(p))]^2 f(z)g(x)}. \tag{2}$$

Pour obtenir le lemme 3.1, on majore alors $\frac{f(x)}{f(z)}$ et $\frac{g(x)}{g(z)}$ par $\exp(D^{-1}C^1_n(0))$ et en utilisant des inégalités classiques sur l'exponentielle, on obtient :

$$\theta_{\Lambda^1_{n,D}}(f,g) \leq 2\log\left(\frac{D+1}{D-1}\right) + 2C^1_n(0)$$

et $C^1_n(0) \leq (D+1)C_\phi$ si $n$ est tel que $DC_\phi(n) \leq C_\phi$. □

Ce résultat nous suggère d'utiliser une récurrence pour construire une suite de cônes.

PROPOSITION 3.2. – *Il existe une suite $(n_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers strictement positifs et une suite $(\Lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de sous-cônes de $C^+(X)$ vérifiant :*

– $P^{n_l}\Lambda_{l-1} \subset \Lambda_l$

– $\forall f,\ g\ \in \Lambda_{l-1}$ on a : $\theta_{\Lambda_l}(P^{n_l}f, P^{n_l}g) \leq M$.

*Preuve.* – On commence avec $\Lambda_0$, $n_1 = \inf\{n \geq 1\ /DC_\phi(n) \leq C_\phi\}$, $\Lambda_1 = \Lambda^1_{n_1,D}$ et $C^1_{n_1}(p) = C_1(p)$. On considère alors les cônes :

$$\Lambda^2_{m,D} = \left\{g \in C^+(X)\ /\ g(x) \leq \exp(C^2_m(p))g(y) \text{ si } x \overset{p}{\sim} y\right\},$$

avec $C^2_m(p) = D(C_\phi(p)+C_1(m+p))$. En remplaçant, dans la démonstration du lemme 3.1, $C^1_n(p)$ par $C^2_m(p)$, on obtient :

$$\forall f,g \in \Lambda_1,\ \theta_{\Lambda^2_{m,D}}(P^m f, P^m g) \leq M \text{ dès que } DC_1(m) \leq C_\phi.$$

On prend $n_2 = \inf\{m > 0\ /DC_1(m) \leq C_\phi\}$, $\Lambda_2 = \Lambda^2_{n_2,D}$ et $C^2_{n_2}(p) = C_2(p)$. Par induction, on définit alors :

$$C_l(p) = D(C_\phi(p) + C_{l-1}(n_l+p)) \text{ avec } n_l > 0 \text{ tel que } DC_{l-1}(n_l) \leq C_\phi$$

et on considère les cônes :

$$\Lambda_l = \left\{ g \in C^+(X) \ / \ g(x) \leq \exp(C_l(p))g(y) \text{ si } x \overset{p}{\sim} y \right\}.$$

Les suites $(n_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$ et $(\Lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ conviennent. □

En posant $\delta = \tanh \frac{M}{4}$ et en utilisant la proposition 2.2, on obtient, pour $f$ et $g$ dans $\Lambda_0$ :

$$\theta_{\Lambda_l}(P^{n_l+\cdots+n_1}f, P^{n_l+\ldots+n_1}g) \leq \delta^{l-1}\theta_{\Lambda_1}(P^{n_1}f, P^{n_1}g) \leq M\delta^{l-1}.$$

Si on considère maintenant un entier $n$, il existe un unique entier $l(n)$ tel que :

$$n_1 + \cdots + n_{l(n)} \leq n < n_1 + \cdots + n_{l(n)+1}.$$

D'autre part, comme les cônes $\Lambda_l$ sont des sous-cônes de $C^+(X)$, la proposition 2.2 donne $\theta_{C^+(X)}(f,g) \leq \theta_{\Lambda_l}(f,g)\ \forall f,g \in \Lambda_l$. D'où finalement pour $f,g \in \Lambda_0$ :

$$\theta_{C^+(X)}(P^n f, P^n g) \leq M\delta^{l(n)-1}. \tag{3}$$

On a alors le lemme suivant.

LEMME 3.3. – *La suite $(P^n\mathbf{1})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la métrique $\theta_{C^+(X)}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^n\mathbf{1} \in \{f \in C^+(X)\ /\theta_{C^+(X)}(f,\mathbf{1}) < \infty\}$.*

*Preuve.* – Soient $m > n$, on écrit $n = n_1 + \cdots + n_{l(n)} + r$ et $m = n_1 + \cdots + n_{l(n)} + \cdots + n_{l(m)} + s$. En utilisant (3) et le fait que $P^k\mathbf{1} \in \Lambda_0\ \forall k \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned}\theta_{C^+(X)}(P^n\mathbf{1}, P^m\mathbf{1}) &= \theta_{C^+(X)}(P^{n_1+\cdots+n_{l(n)-1}}(P^{n_l+r}\mathbf{1}),\\ &\qquad P^{n_1+\cdots+n_{l(n)-1}}(P^{n_l+\cdots+n_{l(m)}+s}\mathbf{1}))\\ &\leq M\delta^{l(n)-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(P^n\mathbf{1})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

D'autre part, il est facile de voir que :

$$\theta_{C^+(X)}(f,\mathbf{1}) = \frac{\sup f}{\inf f}.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x,y \in X$, on a $e^{-C_\phi}P^n\mathbf{1}(y) \leq P^n\mathbf{1}(x) \leq e^{C_\phi}P^n\mathbf{1}(y)$. Ce qui donne le résultat. □

On note alors $h_0$ la limite au sens $\theta_{C^+}$ de la suite $(P^n\mathbf{1})_{n\in\mathbb{N}}$ ; $h_0$ vérifie

$$\theta_{C^+(X)}(h_0,\mathbf{1}) < \infty \text{ ce qui implique } \inf h_0 > 0.$$

De plus, $Ph_0 = h_0$ projectivement, c'est à dire qu'il existe $c > 0$ tel que $Ph_0 = ch_0$. Dans toute la suite, on considère que $\dot{\Lambda}_0$ est l'ensemble des fonctions $f$ de $\Lambda_0$ telles que $m(f) = 1$ (où $m$ est une probabilité sur $X$, dont le support est $X$). Par la proposition 2.3 $h_0$ est aussi la limite au sens $\| \ \|_\infty$ de la suite $\left(\frac{P^n\mathbf{1}}{\int P^n\mathbf{1}dm}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

On déduit de ceci que $h_0$ est dans $\Lambda_l$ pour tout $l$ (les cônes $\Lambda_l$ sont fermés pour la norme $\| \ \|_\infty$).

### 3.2. Construction de la mesure $\nu$

Les résultats de la section précédente nous permettent de construire la mesure $\nu$. On note $m(l) = n_1+\cdots+n_l$. Fixons $f \in \Lambda_0$, alors $P^{m(l)}f \in \Lambda_l$. Par conséquent, il existe un plus grand réel $\lambda_l$ et un plus petit réel $\mu_l$ vérifiant :

$$\lambda_l h_0 \leq \frac{P^{m(l)}f}{c^{m(l)}} \leq \mu_l h_0 \tag{4}$$

$$\begin{cases} r_l = P^{m(l)}f - \lambda_l c^{m(l)}h_0 \in \Lambda_l \\ s_l = \mu_l c^{m(l)}h_0 - P^{m(l)}f \in \Lambda_l. \end{cases}$$

Remarquons que $\lambda_{l+1} \geq \lambda_l$ et $\mu_{l+1} \leq \mu_l$ : il suffit d'appliquer l'opérateur positif $P^{n_{l+1}}$ aux inéquations (3.1). D'autre part, par le lemme 3.1, on a :

$$\begin{aligned}\theta_{\Lambda_l}(h_0, P^{n_{l+1}}r_l) &= \theta_{\Lambda_l}(P^{n_{l+1}}h_0, P^{n_{l+1}}r_l)\\ &\leq M.\end{aligned}$$

Ainsi, par définition de la métrique projective, il existe $\alpha_{l+1}$ et $\beta_{l+1}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha_{l+1}h_0 \leq P^{n_{l+1}}\ r_l \leq \alpha_{l+1}e^M h_0 \\ \beta_{l+1}h_0 \leq P^{n_{l+1}}\ s_l \leq \beta_{l+1}e^M h_0. \end{cases} \tag{6}$$

Suivant (5), ceci nous donne :

$$\begin{aligned}(\alpha_{l+1}+\beta_{l+1})h_0 &\leq (\mu_l - \lambda_l)c^{m(l+1)}h_0\\ &\leq e^M(\alpha_{l+1}+\beta_{l+1})h_0.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P^{m(l+1)}f &= P^{n_{l+1}}r_l + \lambda_l c^{m(l+1)}h_0 \\ &\geq (\alpha_{l+1} + \lambda_l c^{m(l+1)})h_0, \\ P^{m(l+1)}f &= \mu_l c^{m(l+1)}h_0 - P^{n_{l+1}}s_l \\ &\leq (\mu_l c^{m(l+1)} - \beta_{l+1})h_0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} P^{m(l+1)}f &- (\alpha_{l+1} + \lambda_l c^{m(l+1)})h_0 \\ &= P^{n_{l+1}}r_l - \alpha_{l+1}h_0 \in \Lambda_{l+1}. \end{aligned}$$

De même, $(\mu_l + c^{m(l+1)}\beta_{l+1})h_0 - P^{m(l+1)}f \in \Lambda_{l+1}$. Ceci implique

$$\begin{cases} \lambda_{l+1} \geq \lambda_l + \frac{\alpha_{l+1}}{c^{m(l+1)}} \\ \mu_{l+1} \leq \mu_l - \dfrac{\beta_{l+1}}{c^{m(l+1)}}. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &(\mu_{l+1} - \lambda_{l+1}) \leq (\mu_l - \lambda_l) - \frac{\alpha_{l+1} + \beta_{l+1}}{c^{m(l+1)}} \leq (\mu_l - \lambda_l)(1 - e^{-M}) \\ &(\mu_{l+1} - \lambda_{l+1}) \leq (\mu_1 - \lambda_1)(1 - e^{-M})^l. \end{aligned}$$

**Finalement, $\mu_l$ et $\lambda_l$ convergent vers la même limite que l'on note $\nu(f)$.**

En utilisant (4), il est aisé de vérifier que l'on a :

$$\left\| \frac{P^{m(l)}f}{c^{m(l)}} - h_0\nu(f) \right\|_\infty \leq (\mu_1 - \lambda_1)(1 - e^{-M})^{l-1}\|h_0\|_\infty.$$

Remarquons maintenant que

1.

$$\mu_1 = \sup_p \sup_{x \sim^p y} \frac{\exp(C_1(p))P^{n_1}f(x) - P^{n_1}f(y)}{\exp(C_1(p))P^{n_1}h_0(x) - P^{n_1}h_0(y)}.$$

Ainsi, on peut majorer $\mu_1$ par $\frac{D+1}{D-1}e^{2C_\phi(D-1)}\frac{\|f\|_\infty}{\inf h_0}$ en procédant comme dans la démonstration du lemme 3.1. Comme $\lambda_1$ est positif, ceci nous donne :

$$\left\| \frac{P^{m(l)}f}{c^{m(l)}} - h_0\nu(f) \right\|_\infty \leq \frac{D+1}{D-1}e^{2C_\phi(D-1)}\frac{\sup h_0}{\inf h_0}\gamma^{l-1}\|f\|_\infty$$

avec $\gamma = 1 - e^M$.

2. Soit $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{P^r\mathbf{1}}{c^r} = \frac{P^r\mathbf{1}}{P^r h_0} h_0 \leq \frac{\sup h_0}{\inf h_0}.$$

Considérons maintenant $n \in \mathbb{N}$, on écrit $n = n_1 + \cdots + n_l + r$ et on a :

$$\left\| \frac{P^n f}{c^n} - h_0\nu(f) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{P^{m(l)} f}{c^{m(l)}} - h_0\nu(f) \right\|_\infty \left\| \frac{P^r\mathbf{1}}{c^r} \right\|_\infty \tag{7}$$

$$\leq Cte\gamma^{l(n)-1}\|f\|_\infty \tag{8}$$

la constante ne dépendant pas de $f$. On souhaite, pour finir, obtenir une majoration de $\left\| \frac{P^n f}{c^n} - h_0\nu(f) \right\|_\infty$ pour $f$ dans $B_\phi$ ; en écrivant $f = f^+ - f^-$, on se ramène au cas où $f \geq 0$. Soit $\beta = \|f\|_\phi > 0$ si $f \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \overset{n}{\sim} y$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) + \beta}{f(y) + \beta} &= \exp\left[\log(f(x) + \beta) - \log(f(y) + \beta)\right] \\
&\leq \exp\left[\frac{f(x) - f(y)}{\beta}\right] \\
&\leq \exp\left[\frac{\|f\|_\phi C_\phi(n)}{\beta}\right] \\
&\leq e^{C_\phi(n)}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $h + \beta \in \Lambda_0$. De plus, la fonction constante égale à $\beta$ est clairement dans $\Lambda_0$. Ceci nous permet, d'une part, d'étendre $\nu$ à $B_\phi$ (donc à $C(X)$ par densité) et, d'autre part, d'écrire en utilisant (8) :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{P^n f}{c^n} - h_0\nu(f) \right\|_\infty &\leq \left\| \frac{P^n(f + \beta)}{c^n} - h_0\nu(f + \beta) \right\|_\infty + \left\| \frac{P^n\beta}{c^n} - h_0\nu(\beta) \right\|_\infty \\
&\leq Cte\ \gamma^{l(n)-1}(\|f + \beta\|_\infty + \beta) \\
&\leq Cte\ \gamma^{l(n)-1}\|f\|_{B_\phi}.
\end{aligned}$$

Par densité de $B_\phi$ dans $C(X)$, $\left\| \frac{P^n f}{c^n} - h_0\nu(f) \right\|_\infty$ converge vers 0 pour tout $f$ dans $C(X)$ (évidemment, on perd le contrôle de la vitesse de convergence pour $f$ dans $C(X)$), $P^\star\nu = c\nu$ résulte directement de ce fait. Pour finir, en remplaçant $\nu$ par $\frac{\nu}{\nu(\mathbf{1})}$ et $h_0$ par $h_0\nu(\mathbf{1})$, on obtient le théorème 1.1. $\square$

*Remarque* 3.1.

- Dans le cas où $C_\phi(n) = \theta^n$, on voit facilement que la suite $n_l = 1 \; \forall l$ convient à condition de prendre $1 < D < \frac{1}{\theta}$. On retrouve bien alors une convergence exponentielle.
- Dans le cas général, remarquons que $C_{l-1}(n_l) \leq \dfrac{2D^l}{D-1} C_\phi(n_l)$ ; ainsi, pour que la démonstration du théorème 1.1 fonctionne, il suffit que la suite $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ vérifie $\dfrac{2D^l}{D-1} C_\phi(n_l) \leq C_\phi$.

En particulier, si $C_\phi(n)$ est de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, on obtient une convergence en $n^{\log\gamma[\log(D^{\frac{1}{\alpha}})]^{-1}}$.

## 4. THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRALE

Nous allons maintenant donner une condition suffisante sur la suite $(\gamma^{l(n)})_n$ pour que le théorème de la limite centrale soit vérifié. Cette condition est la même que celle donnée dans [I, L] pour des processus stationnaires mélangeants. Nous donnons ici, les grandes lignes de la démonstration dans notre cadre particulier.

Cette question de la généralisation du théorème de la limite centrale à des processus non i.i.d. a été abordée par de nombreux auteurs dans le cadre des processus stationnaires et des systèmes dynamiques : [Go], [D], [Ch], [Li2].

On introduit tout d'abord quelques notations. Pour $g \in B_\phi$ fixée, on note $X_j = g \circ \sigma^j$, $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_j$ et, pour $f \in L^1(\mu)$, $< f >= \int f d\mu$ ; $\mu$ étant la mesure invariante par $\sigma$ donnée par le théorème 1.1.

Par des arguments classiques, le lemme suivant découle du théorème 1.1.

LEMME 4.1 (Décroissance des corrélations). – *Il existe une constante $C$ telle que pour $g_1 \in B_\phi$ et $g_2 \in L^1(\mu)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a :*

$$|< g_1 \, g_2 \circ \sigma^n > - < g_1 >< g_2 >| \leq C \|g_1\|_\phi \, \|g_2\|_1 \, \gamma^{l(n)}.$$

Énonçons maintenant le théorème de la limite centrale.

THÉORÈME 4.2 (Théorème de la limite centrale). – *Si $\sum \gamma^{l(n)} < \infty$ alors pour toute fonction $g$ dans $B_\phi$ telle que $< g >= 0$, on peut définir :*

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \left( \sum_{i=0}^{n-1} g \circ \sigma^i \right)^2 d\mu \\ &= \sum_j \int g \, g \circ \sigma^j d\mu. \end{aligned}$$

*Si, de plus,* $\tau \neq 0$ *alors :*

$$\frac{S_n}{\tau\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}.$$

Où $\mathcal{N}$ désigne la loi normale centrée et réduite.

*Preuve.* – L'existence et l'égalité des deux limites utilisées pour définir $\tau$ résultent directement de la sommabilité de la suite $\gamma^{l(n)}$ et de la décroissance des corrélations. Fixons $n \in \mathbb{N}^\star$, soient $m = [\sqrt{n}\log n]$, $q = [n/m]$ et $k = [n/(m+q)]$. On considère alors :

$$\begin{aligned}
\zeta_j &= \sum_{p=j(m+q)}^{j(m+q)+m-1} X_p \\
\eta_j &= \sum_{p=j(m+q)+m}^{(j+1)(m+q)-1} X_p \quad 0 \leq j \leq k-1 \\
\eta_k &= \sum_{p=k(m+q)}^{n} X_j.
\end{aligned}$$

On a $S_n = \sum_{j=0}^{k-1} \zeta_j + \sum_{j=0}^{k} \eta_j := S_{n,1} + S_{n,2}$.

La démonstration ce fait en deux étapes :

1. On montre que $\frac{S_{n,2}}{\tau\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{proba}} 0$.
2. On montre que $\frac{S_{n,1}}{\tau\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}$.

*Démonstration du point* 1. – Il suffit de montrer que $< \left(\frac{S_{n,2}}{\tau\sqrt{n}}\right)^2 >$ tend vers 0.

On a :

$$<(S_{n,2})^2>=k <\eta_0^2>+2\sum_{j=1}^{k-1}(k-j) <\eta_0\ \eta_j>+2\sum_{j=0}^{k-1} <\eta_i\ \eta_k>+<\eta_k^2> .$$

Or, il résulte du lemme 4.1 que :

$$\begin{aligned}
&| < \eta_0\ \eta_j > | \leq Cte\ q^2\gamma^{l(mj)} \quad j \leq k-1 \\
&| < \eta_j\ \eta_k > | \leq Cte\ q(m+q)\gamma^{l(m(k-j))} \\
&< \eta_0^2 >= O(q) \text{ et } < \eta_k^2 >= O(m+q).
\end{aligned} \tag{9}$$

Par les choix de $q$ et $m$, $O(q) = o(n)$ et $O(m+q) = o(n)$. En utilisant (9), on obtient :

$$\left\langle \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)\eta_0\eta_j \right\rangle \leq Cte\ q^2 k \sum_{j=1}^{k-1} \gamma^{l(mj)}.$$

De plus, la sommabilité des $\gamma^{l(n)}$ implique que $\sum_{j=1}^{k-1} \gamma^{l(mj)} \leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{l(j)}$. D'où :

$$\left\langle \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)\eta_0\eta_j \right\rangle \leq Cte\ \frac{q^2 k}{m} = o(n)$$

par les choix de $m$, $q$ et $k$.

De la même manière, on montre :

$$\left\langle \sum_{j=0}^{k-1} \eta_i\eta_k \right\rangle = o(n).$$

Ceci permet de montrer le point 1.

*Démonstration du point* 2. – Pour démontrer le point 2, on utilise la méthode des fonctions caractéristiques de P. Levy. On note $\Psi_n$ la transformée de Fourrier de $\frac{\zeta_0}{\tau\sqrt{n}}$ et on montre :

$$| < e^{it\frac{S_{n,1}}{\tau\sqrt{n}}} > -(\Psi_n)^k | \longrightarrow 0. \tag{10}$$

Pour cela, on applique successivement le lemme 4.1 à

$$\exp\left[\frac{it}{\tau\sqrt{n}}(\zeta_0 + \ldots \zeta_{l-2})\right] \text{ et } \exp\left[\frac{it}{\tau\sqrt{n}}\zeta_{l-1}\right] \quad l \leq k-1$$

on obtient :

$$| < e^{it\frac{S_{n,1}}{\tau\sqrt{n}}} > -(\Psi_n)^k | \leq Cte\ k\gamma^{l(q)}.$$

Comme la série des $\gamma^{l(n)}$ est convergente et décroissante, on en déduit (10). Pour terminer on utilise l'estimation standard suivante :

$$\left\langle \exp\left(i\frac{t\zeta_0}{\tau\sqrt{n}}\right)\right\rangle = 1 - \frac{t^2}{\tau^2 n} < \zeta_0^2 > +r$$

avec $|r| \leq Cte\ n^{-2} < (\zeta_0)^4 >$. En procédant comme dans la démonstration du point 1., on montre que $< (\zeta_0)^4 >= O(m^2)$. Il est alors aisé de voir que

$$(\Psi_n)^k = \left\langle \exp\left(i\frac{t\zeta_0}{\tau\sqrt{n}}\right)^k \right\rangle \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Le théorème de la limite centrale découle alors de (10). □

## 5. SPECTRE DE $P$ EN TANT QU'OPÉRATEUR SUR $B_\phi$.

Dans le cas où $v_n(\phi) \leq K\theta^n$ pour un $0 < \theta < 1$ (ou, ce qui revient au même, dans le cas où $\phi$ est höldérienne d'ordre $\theta$ par rapport à la métrique $d$), on sait (voir [Ru2]) que $P$, en tant qu'opérateur sur l'espace $B_\phi$ des fonctions höldériennes d'ordre $\theta$ par rapport à la métrique $d$, est quasi-compact. Son spectre essentiel est le disque fermé $D(0, c\theta)$ dont chaque point est une valeur propre.

On suppose maintenant que $\phi$ vérifie l'hypothèse $(H1)$ et on va montrer le théorème 1.2 : chaque point du disque $D(0, c)$ est une valeur propre de $P$ en tant qu'opérateur sur $B_\phi$. Pour cela, on reprend les fonctions propres construites dans [C, I] et on montre qu'elles appartiennent à $B_\phi$.

Remarquons tout d'abord que $c$ vérifie :

$$c = \lim_{n\to\infty} \|P^n\mathbf{1}\|_\infty^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\inf P^n\mathbf{1})^{1/n}.$$

En effet, on déduit du théorème 1.1 que $c$ est le rayon spectral de $P$ en tant qu'opérateur sur $C(X)$, ce qui donne la première inégalité ; la seconde résulte du fait que pour $x$ et $y \in X$, $e^{-C_\phi}P^n\mathbf{1}(y) \leq P^n\mathbf{1}(x) \leq e^{C_\phi}P^n\mathbf{1}(y)$.

D'autre part, la fonction propre $h_0$ associée à $c$ est la limite en norme uniforme de $\frac{P^n\mathbf{1}}{c^n}$, le cône $\Lambda_0$ étant fermé pour cette norme, $h_0$ appartient à $\Lambda_0$, donc à $B_\phi$. En particulier, $c$ est aussi le rayon spectral de $P$ comme opérateur sur $B_\phi$.

Dans toute la suite, on considère $P$ en tant qu'opérateur sur $B_\phi$.

### 5.1. Noyau de $P^q$, $q \in \mathbb{N}^\star$

LEMME 5.1. – *Pour tout $q \in \mathbb{N}^\star$, le noyau de $P^q$ est de dimension infinie.*

*Preuve.* – Fixons $q \in \mathbb{N}^\star$ et numérotons les éléments $\varepsilon$ de $A^q$, soit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k^q}$ (si $\#A = k$). On note : $E_j = \{x \in X \;/ (x_1, \ldots, x_q) = \varepsilon_j\}$.

- Soit $f \in B_\phi$ et $f_1 = f\mathbf{1}_{E_1}$. Alors $f_1$ appartient à $B_\phi$ et est à support dans $E_1$.

En effet, considérons $n \in \mathbb{N}$ et $x \sim^n y$, alors :

- Si $n \geq q$, $x \in E_1 \;\Leftrightarrow\; y \in E_1$ et donc $v_{f_1}(n) \leq v_f(n)$.
- Si $n < q$, on majore $|f_1(x) - f_1(y)|$ par $2\|f\|_\infty$, on a alors $v_{f_1}(n) \leq 2\|f\|_\infty \frac{C_\phi(n)}{C_\phi(q)}$.

Ainsi, $f_1 \in B_\phi$ et $K(f_1) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{C_\phi(q)}$.

- Pour $2 \leq j \leq k^q$, on définit :

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f_1(\varepsilon_1\sigma^q x) \text{ si } x \in E_j \\ &\quad 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Alors, $f_j$ est à support dans $E_j$ et appartient à $B_\phi$.

- Soit maintenant :

$$r_q = \frac{\sum_{j=1}^{k^q} \exp(\frac{2i\pi(j-1)}{k^q}) f_j}{\exp(\sum_{j=0}^{q-1} \phi \circ \sigma^j)}.$$

On vérifie facilement que $P^q r_q = 0$. D'autre part, $f$ étant générique dans $B_\phi$, on aura que $Ker P^q$ est de dimension infinie dès lors que $r_q \in B_\phi$. C'est ce que nous vérifions maintenant.

Remarquons tout d'abord que si $f, g \in B_\phi$, alors $fg \in B_\phi$ et $K(fg) \leq \|f\|_\infty K(g) + \|g\|_\infty K(f)$ ; et si $f \in B_\phi$, $f > 0$ alors $\frac{1}{f} \in B_\phi$ et $K(\frac{1}{f}) \leq \frac{1}{(\inf f)^2} K(f)$.

On a déjà vu que $f_j \in B_\phi$, il suffit donc de vérifier que $\exp(\sum_{j=0}^{q-1} \phi \circ \sigma^j) \in B_\phi$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \sim^n y$, alors :

$$\left| \exp\left(\sum_{j=0}^{q-1} \phi \circ \sigma^j(x)\right) - \exp\left(\sum_{j=0}^{q-1} \phi \circ \sigma^j(y)\right) \right|$$
$$\leq \left(e^{\|\phi\|_\infty}\right)^q \left( \exp\left( \sum_{j=0}^{q-1} (\phi \circ \sigma^j(x) - \phi \circ \sigma^j(y) \right) - 1 \right).$$

On a :

$$\sum_{j=0}^{q-1} (\phi \circ \sigma^j(x) - \phi \circ \sigma^j(y)) \leq C_\phi(n-q) \text{ si } n \geq q$$
$$\leq 2q\|f\|_\infty \text{ si } n < q.$$

Pour $n \geq q+1$, on a $n - q \geq \left[\frac{n}{q+1}\right]$. Ainsi, en utilisant l'hypothèse $(H_1)$, on obtient : $C_\phi(n-q) \leq Cte.C_\phi(n)$, où la constante ne dépend que de $q$. On en déduit que $\exp(\sum_{j=0}^{q-1} \phi \circ \sigma^j) \in B_\phi$. Ce qui achève la preuve du lemme. □

### 5.2. Construction de valeurs propres pour $P^q$.

LEMME 5.2. – *Tout point du disque $|z| < \frac{(\inf P^q \mathbf{1})^2}{\|P^q \mathbf{1}\|_\infty}$, est une valeur propre de multiplicité infinie de $P^q$.*

*Preuve.* – Considérons tout d'abord $|z| < \inf P^q \mathbf{1}$ et $r_q$ comme dans la démonstration du lemme 5.1. Soit :

$$g_{z,q} = r_q \circ \sigma^{lq} + \sum_{l=1}^{\infty} z^l \frac{r_q \circ \sigma^{lq}}{\Pi_{j=1}^{l} P^q \mathbf{1} \circ \sigma^{jq}}.$$

La fonction $g_{z,q}$ appartient à $C(X)$ et vérifie $P^q g_{z,q} = z g_{z,q}$. En faisant varier les fonctions $r_q$, on construit une famille infinie linéairement indépendante de fonctions propres associées à $z$. Reste à voir que ces fonctions appartiennent à $B_\phi$.

*Évaluation de* $v_{g_{z,q}}(p)$.

Fixons $p \in \mathbb{N}$, $x \overset{p}{\sim} y$ et posons :

$$f_{l,q} = \frac{r_q \circ \sigma^{lq}}{\Pi_{j=1}^{l} P^q\mathbf{1} \circ \sigma^{jq}}.$$

Dans toute la suite, $C$ désigne une constante ne dépendant que de $q$. Comme $P^q\mathbf{1}$ et $r_q$ sont dans $B_\phi$, on obtient :

$$|f_{l,q}(x) - f_{l,q}(y)| \leq \frac{\|P^q\mathbf{1}\|_\infty^{l-1}}{(\inf P^q\mathbf{1})^{2l}} \times \left[ \|P^q\mathbf{1}\|_\infty K_\phi(r_q) C_\phi(p - lq) + \|r_q\|_\infty K_\phi(P^q\mathbf{1}) \sum_{j=1}^{l} C_\phi(p - qj) \right]$$

en convenant que $C_\phi(k) = C_\phi(0)$ si $k < 0$. Prenons alors $p$ de la forme $m(q+1)$, soit $\alpha = \frac{z\|P^q\mathbf{1}\|_\infty}{(\inf P^q\mathbf{1})^2}$, on a alors :

$$v_{g_{z,q}}(p) \leq C \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l C_\phi(m(q+1) - lq) + C \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l \sum_{j=1}^{l} C_\phi(m(q+1) - jq)$$

et on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l C_\phi(m(q+1) - lq) &= \sum_{l=0}^{m} \alpha^l C_\phi(m(q+1) - lq) \\ &\quad + \sum_{l=m+1}^{\infty} \alpha^l C_\phi(m(q+1) - lq) \\ &\leq C_\phi(m) \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l + C_\phi \sum_{l=m+1}^{\infty} \alpha^l \\ &\leq C(C_\phi(m) + \alpha^{m+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l\sum_{j=1}^{l}C_\phi(m(q+1)-jq) &= \sum_{l=0}^{m}\alpha^l\sum_{j=1}^{l}C_\phi(m(q+1)-jq)\\ &+\sum_{l=m+1}^{\infty}\alpha^l\sum_{j=1}^{l}C_\phi(m(q+1)-jq)\\ &\leq C_\phi(m)\sum_{l=0}^{\infty}l\alpha^l+C_\phi\sum_{l=m+1}^{\infty}l\alpha^l\\ &\leq C(C_\phi(m)+\alpha^{m+1}).\end{aligned}$$

Soit finalement, $v_{g_{z,q}}(p) \leq C(C_\phi(m)+\alpha^{m+1})$.

D'après la remarque 1.3, l'hypothèse $(H_1)$ nous donne $\alpha^{m+1} \leq CC_\phi(m)$ et $C_\phi(m) \leq CC_\phi((q+1)m) = CC_\phi(p)$, soit finalement : $v_{g_{z,q}}(p) \leq C(C_\phi(p))$. On effectue alors le même calcul pour $p$ de la forme $m(q+1)+r$, $0 \leq r < q+1$. Ainsi, si $|z| < \frac{(\inf P^q\mathbf{1})^2}{\|P^q\mathbf{1}\|_\infty}$, $g_{z,q} \in B_\phi$. □

### 5.3. Spectre de $P$

On a vu que $c = \lim_{n\to\infty}\|P^n\mathbf{1}\|_\infty^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(\inf P^n\mathbf{1})^{1/n}$. Ainsi,

$$c = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{(\inf P^q\mathbf{1})^2}{\|P^q\mathbf{1}\|_\infty}\right)^{1/q}.$$

Soit $|z| < c$, pour $q$ assez grand, $z^q < \frac{(\inf P^q\mathbf{1})^2}{\|P^q\mathbf{1}\|_\infty}$. Par ce qui précède, $z^q$ est alors valeur propre de $P^q$. Ceci implique qu'il existe $\mu$, racine $q$ieme de $z^q$ qui est valeur propre de $P$. En fait, on a un résultat plus précis.

Soit $\lambda$ de module $|\mu^q| = |z^q|$, quitte à changer la fonction $f_1$ qui sert dans la construction de $g_{\lambda,q}$, on peut toujours supposer que $g_{\lambda,q}, \dots, P^{q-1}g_{\lambda,q}$ sont indépendantes. Soit $E_{\lambda,q}$ le sous espace de $B_\phi$ qu'elles engendrent ; $E_{\lambda,q}$ est invariant par $P$ et l'équation caractéristique associée est $\lambda = x^q$. Ceci implique que toutes les racines $q$iemes de $\lambda$ sont valeurs propres de $P$ et termine la démonstration du théorème 1.2.

*Remarque* 5.1. – Soit $\lambda$ une valeur propre de $P$ restreint à $B_\phi$. On suppose que le module de $\lambda$ est strictement inférieur à $c$ et on note $f$ une fonction propre associée. Comme $P^\star\nu = c\nu$, on a $\int f d\nu = 0$. Si la vitesse de convergence vers l'état d'équilibre était exponentielle (par exemple majorée par $\theta^n$, $\theta < 1$), la suite $\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n\theta^{-n}$ serait bornée. En particulier, on aurait $\lambda < \theta c$. Ainsi, le théorème 1.2 implique que, sous l'hypothèse $(H1)$, la vitesse de convergence ne peut pas être exponentielle.

## RÉFÉRENCES


[Bi1] G. BIRKOFF, Extensions of Jentzch's theorem. T.A.M.S. , **85**, 1957, p. 219-227.

[Bi2] G. BIRKOFF, Lattice theory (3rd edition), *Amer. Math. Soc.*, 1967.

[Bo] R. BOWEN, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms., *Lect. Notes in Math,* **470**, 1975, Springer Verlag.

[Ch] N. CHERNOV, Limit theorems and Markov approximations for chaotic dynamical systems, *Probability Theory and Related Fields*, **101**, 1995, p. 321-362.

[Co] P. COLLET, Some ergodic properties of maps of the interval, Dynamical and disordered systems. R. Bamon, J.M. Gambaudo and S. Martinez ed. - Herman.

[C, I] P. COLLET et S. ISOLA, On the essential spectrum of the transfert operator for expansive Markov maps, *Comm. Math. Phy.*, **139**, 1991, p. 551-557.

[D] M. DENKER, The central limit theorem for dynamical systems, Dynamical Systems and Ergodic Theory, Banach Center Publications, **23**, 1989, PWN - Polish Scientific Pulishers, Warsaw.

[Fe, Sc] P. FERRERO et B. SCHMITT, Ruelle Perron Frobenius theorems and projective metrics, Colloque Math. Soc. J. Bolyai Random Fields. Estergom (Hungry), 1979.

[Go] M. I. GORDIN, The central limit theorem for stationary processes, *Soviet. Math. Dokl.*, **10**, 1969, (5), p. 1174-1176.

[Gor] P. GORA, Properties of invariant measures for piecewise expanding one-dimensional transformations with summable oscillations of derivative, *Erg. Th. and Dyn. Syst.* 1994, **14**, p. 475-492.

[H, K] F. HOFBAUER et G. KELLER, Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations, *Math. Zeitschrift*, **180**, 1982, p. 119-140.

[I, L] I. M. IBRAGIMOV et Y. LINNIK, Independant and stationary sequences of random variables, Walters-Noardhoff Pub. Groningen 1971.

[Le] F. LEDRAPPIER, Some properties of absolutely invariant measures on an interval, *Erg. Th. and Dyn. Syst.*, **1**, 1981.

[Li1] C. LIVERANI, Decay of corelations *Ann. of Math.*, **142**, 1995, (2), p. 239-301.

[Li2] C. LIVERANI, Central limit theorem for deterministic systems, Proceedings of the International Congress on Dynamical Systems, Montevideo 95, Research Notes in Mathematics series, Pittman, 1997.

[Pa, Po] W. PARRY et M. POLLICOTT, Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics, Asterisque, **187 -188**, 1990.

[Ra] A. RAUGI, Théorie spectrale d'un opérateur de transfert sur un espace métrique compact, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Prob. Stat.*, **28**, (2), 1992, p. 281-309.

[Ru1] D. RUELLE, Thermodynamic formalism., Addison Wesley New-York 1978.

[Ru2] D. RUELLE, Statiscal mechanic of a one dimensionnal lattice gas, *Com. Math. Phys.*, **9**, 1978, p. 267-278.

[Sc] B. SCHMITT, Existence of acip for expanding maps of the interval, Dynamical Systems and Ergodic Theory Banach Center Publications. Warszaw, 1989.

[Si] G. SINAI, Gibbs measures in ergodic theory, *Rus. Math. Surveys,* **166**, 1972, p. 21-69.

[Wa] P. WALTERS, Invariant measures and equilibrium states for somme mappings which expand distances, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **236**, 1978, p. 121-153.


*(Manuscrit reçu le 29 avril 1996;*
*revisé le 12 janvier 1997.)*