ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

H. GUIOL

Un résultat pour le processus d'exclusion à longue portée

Annales de l'I. H. P., section B, tome 33, nº 4 (1997), p. 387-405
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1997__33_4_387_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 33, n° 4, 1997, p. 387-405. *Probabilités et Statistiques*

Un résultat pour le processus d'exclusion à longue portée

par

H. GUIOL

Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo,
P.B. 66281, 05315-970 São Paulo, S.P., Brasil.
E-mail : herve@ime.usp.br

RÉSUMÉ. – On montre que toutes les mesures invariantes par le processus d'exclusion à longue portée et invariantes par translation sont des mélanges des mesures produit de Bernoulli à densité constante dans le cas où la matrice de transition est irréductible et invariante par translation.

ABSTRACT. – For the long range exclusion process we show, under the hypothesis of ireducibility and translation invariance of $p(.,.)$, that all measure in $(\mathcal{I} \cap \mathcal{S})$ is a mixture of Bernoulli product measures with constant density.

1. INTRODUCTION

Introduit par F. Spitzer [4] le processus d'exclusion à longue portée est un processus de Markov à temps continu sur $U = \{0,1\}^{\mathrm{S}}$ pour lequel les particules se déplacent dans un ensemble S dénombrable, selon les règles suivantes : une particule située en x attend un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Elle se déplace alors jusqu'au site X_τ où $\{X_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ est une chaîne de Markov sur S de probabilités de transition

$p(.,.)$, $X_0 = x$, et où $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_n = x$ ou $\eta(X_n) = 0\}$ (avec $\inf \emptyset = +\infty$) est le premier temps de rencontre d'un site vide ou de retour en x et où η est la configuration du processus juste avant que la particule en x parte (si $\tau = +\infty$ l'interprétation est que la particule disparaît).

Le processus d'exclusion à longue portée a été étudié par T. Liggett dans [2] (1980) puis sous une forme généralisée lorsque $p(.,.)$ est récurrent positif par X. Zheng [5] (1988).

Ce processus offre des difficultés techniques non standard : générateur compliqué, pas de propriété de Feller. T. Liggett [2] a construit ce processus par monotonie sur les configurations (nous rappelons cette construction dans la section 2) et a montré entre autres que les mesures de Bernoulli produit sont invariantes pour une marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$ (*i.e.* $p(x, y) = p(0, y-x)$).

Nous nous proposons ici de caractériser toutes les mesures invariantes et invariantes par translation lorsque $p(.,.)$ est une marche aléatoire irréductible sur $\mathbf{Z}^d$.

Le schema de la preuve, qui provient d'une idée de Liggett dans le cadre du processus d'exclusion simple (voir [3] chapitre VIII section 3), est de produire un couplage pour le processus d'exclusion à longue portée permettant de comparer les mesures invariantes et invariantes par translation avec les mesures de Bernoulli produit. Cependant n'étant plus dans « le cas Feller » il va nous falloir procéder avec beaucoup plus de soins.

Ainsi, pour montrer (Proposition 5.1 section 5) qu'une mesure invariante et invariante par translation pour le processus d'exclusion à longue portée couplé ne charge que les configurations ordonnées l'élément clé utilise une approximation du processus par des processus ayant la propriété de Feller. Pour ceux-ci les particules bougent comme dans l'exclusion à longue portée mis à part que les particules en mouvement disparaissent si elles ne trouvent pas de sites libres après un nombre donné k, fini, de visites. L'approximation par ces processus à k-étapes avec disparition, introduite par T. Liggett dans [2], est décrite dans la section 4.

L'existence d'une mesure invariante pour le processus couplé ayant pour marginales deux mesures invariantes est l'objet de la deuxième étape de la section 5. On y utilise des approximations finies sur les configurations, celles-ci étant liées à la construction même du processus d'exclusion à longue portée.

La conclusion (Dernière étape, section 5) vient alors d'un résutat contenu dans [1] de E. Andjel, 1981.

2. CONSTRUCTION DU PROCESSUS

Dans ce paragraphe nous suivons ce que T. Liggett [2] a établi.

Ce processus est bien défini pour les configurations finies (*i.e.* $\eta \in U$: $|\eta| < \infty$, où $|\eta| = \sum_{u \in \mathbf{S}} \eta(u)$).

Lorsque le nombre de particules devient infini celles-ci peuvent alors parcourir de très grandes distances en un temps très court. Le générateur, même appliqué à une fonction ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées n'est pas borné. Tout ceci crée un obstacle pour la construction du processus par les techniques habituelles. En général ce processus n'est pas de Feller : par exemple lorsque $p(.,.)$ est une marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$, le processus n'est pas de Feller (voir [2] section 4, corollary 4.5, p. 879). Ce qui rend invérifiable les conditions d'utilisation du théorème de Hille-Yosida.

On construit alors le processus par monotonie : on commence par définir le processus sur les configurations finies comme ci-dessus. On pose

$$S(t)f(\eta) = \mathbf{E}^\eta f(\eta_t)$$

le semi-groupe correspondant défini pour η fini seulement.

A présent supposons η et ξ finies telles que $\eta \leq \xi$ (*i.e.* pour tout $x \in \mathbf{S}$ on a $\eta(x) \leq \xi(x)$). On peut alors construire un couplage (η_t, ξ_t) de semi-groupe $\widetilde{S}(t)$ tel que si $g(\eta, \xi) = f(\eta)$ et $h(\eta, \xi) = f(\xi)$ on a

(a) $\widetilde{S}(t)g(\eta, \xi) = S(t)f(\eta) = \mathbf{E}^\eta f(\eta_t)$

(b) $\widetilde{S}(t)h(\eta, \xi) = S(t)f(\xi) = \mathbf{E}^\xi f(\xi_t)$

(c) $\eta_0 = \eta$

(d) $\xi_0 = \xi$

(e) $\eta_t \leq \xi_t$ pour tout t.

La propriété (e) implique que $S(t)f(\eta)$ est monotone lorsque f l'est aussi.

DÉFINITION 2.1. – *Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions f bornées sur U telles que*

$$\textit{(i) } \eta \leq \xi \textit{ entraine } f(\eta) \leq f(\xi) \tag{1}$$

et

$$\textit{(ii) } f(\xi) = \lim_{\eta \uparrow \xi\ , |\eta| < \infty} f(\eta) \tag{2}$$

où $|\eta| = \sum_x \eta(x)$ *et* $\eta \uparrow \xi \Rightarrow \eta(x) \uparrow \xi(x)\ \forall x$.

On définit le semi-groupe associé $S(t)$ pour $f \in \mathcal{M}$, pour toute configuration ξ infinie par

$$S(t)f(\xi) = \lim_{\eta \uparrow \xi\ ,|\eta|<\infty} S(t)f(\eta). \tag{3}$$

On a alors $S(t)\ :\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, et on vérifie bien la propriété de semi-groupe : pour η fini on a

$$S(t_1 + t_2)f(\eta) = \mathbf{E}^\eta[f(\eta_{t_1+t_2})]$$

$$= \mathbf{E}^\eta[\mathbf{E}^\eta(f(\eta_{t_1+t_2})/\eta_{t_1})]$$

et par la propriété de Markov

$$\begin{aligned} &= \mathbf{E}^\eta[\mathbf{E}^{\eta_{t_1}}(f(\eta_{t_2}))] \\ &= S(t_1)(\mathbf{E}^\eta[f(\eta_{t_2})]) \\ &= S(t_1)S(t_2)f(\eta) \end{aligned}$$

Cette égalité est préservée par passage à la limite $\eta \uparrow \xi$.

$\mathcal{M}$ est une classe de fonctions suffisamment grande pour que les probabilités de transition $\mathbf{P}^\eta[\eta_t \in d\xi]$ du système infini soient déterminées de manière unique par

$$\int f(\xi)\mathbf{P}^\eta[\eta_t \in d\xi] = \mathbf{E}^\eta f(\eta_t) = S(t)f(\eta)$$

pour $f \in \mathcal{M}$.

L'expression ci dessus permet d'étendre la définition de $S(t)f$ à toute fonction f borélienne bornée.

3. ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

Dans tout ce qui suit on supposera $\mathbf{S} = \mathbf{Z}^d$.

On se propose de montrer, sous les hypothèses :

$$\{p(x,y)\}_{x,y\in\mathbf{Z}^d} \ \textit{irréductible et} \tag{4}$$

$$p(x,y) = p(0, y-x) \ \textit{pour tous}\ x,y \in \mathbf{Z}^d \tag{5}$$

que toutes les mesures invariantes par le processus et invariantes par translation sont des mélanges de mesures de Bernoulli produit de densité constante.

3.1 Rappels

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des mesures de probabilités sur U,

$\mathcal{S}$ les éléments invariants par translation de $\mathcal{P}$,

$\mathcal{I}$ les éléments de $\mathcal{P}$ invariants par le processus à longue portée :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \{\mu : \ \mu S(t) = \mu \text{ pour tout } t \geq 0\} \\ &= \left\{\mu : \ \int S(t) f \, d\mu = \int f \, d\mu \text{ pour tous } t > 0 \text{ et } f \in C(U)\right\}.\end{aligned}$$

THÉORÈME 3.1. – *(Liggett (1980))*

Si $p(x, y) = p(0, y - x)$ *et si* $\rho \in [0, 1]$ *alors*

$$\nu_\rho \in \mathcal{I},$$

où ν_ρ *est la mesure de Bernoulli (produit) telle que*

$$\nu_\rho\{\eta \in U : \eta(x) = 1\} = \rho \text{ pour tout } x \in \mathbf{Z}^d.$$

La question était alors de savoir si, comme pour l'exclusion simple, on pouvait caractériser toutes les mesures invariantes par le processus et invariantes par translation dans le cas où la matrice des transitions est invariante par translation. On se propose ici de montrer le

THÉORÈME 3.2. – *Si* $\{p(x, y)\}_{x,y}$ *est irréductible et* $p(x, y) = p(0, y - x)$ *pour tous* $x, y \in \mathbf{Z}^d$ *et si*

$$\mu \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{S})$$

Alors il existe une mesure de probabilité γ *sur* $[0, 1]$ *telle que*

$$\mu = \int_0^1 \nu_\alpha \, \gamma(d\alpha).$$

REMARQUE 3.3. – *On en déduit, sous les mêmes hypothèses, que* $(\mathcal{I} \cap \mathcal{S})$ *est *-faiblement fermé dans* $\mathcal{P}$ *donc *-faiblement compact, ainsi le résultat ci-dessus peut se présenter comme :*

$$(\mathcal{I} \cap \mathcal{S})_e = \{\nu_\rho, \rho \in [0,1]\}.$$

4. APPROXIMATION DU PROCESSUS

Pour prouver ce résultat on va approcher, comme dans Liggett [2] (Section 3) le semi-groupe $S(t)$ par une suite de semi-groupes $\{T_k(t)\}_{k\in\mathbf{N}}$ qui correspondent aux processus pour lesquels les particules bougent comme dans l'exclusion à longue portée, mis à part que l'on ne visite au maximum que k sites occupés pour trouver un site vide. Si après k étapes la particule n'a pas trouvé de site vide elle disparaît.

4.2 Notations et rappels

$T_k(t)$ peut être défini comme un semi-groupe continu sur $C(U)$ de générateur infinitésimal L_k, les hypothèses étant automatiquement vérifiées de par (5).

Pour tout f ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées, le générateur infinitésimal s'écrit :

$$L_k f(\eta) = \sum_{\eta(x)=1,\eta(y)=0} q_k(x,y,\eta)[f(\eta_{xy}) - f(\eta)]$$

$$+ \sum_{\eta(x)=1} \delta_k(x,\eta)[f(\eta_x) - f(\eta)],$$

où $\eta_x(x) = 1 - \eta(x)$, $\eta_x(z) = \eta(z)$ pour $z \neq x$ est la configuration qui change de valeur en x,

$\eta_{xy}(x) = \eta(y)$, $\eta_{xy}(y) = \eta(x)$ et $\eta_{xy}(z) = \eta(z)$ pour $z \neq x, y$ est la configuration qui échange les états de x et y,

$q_k(x,y,\eta) = \mathbf{E}^x\left[\prod_{i=1}^{\sigma_y - 1} \eta(X_i), \sigma_y \leq \sigma_x, \sigma_y \leq k\right]$ est l'intensité avec laquelle une particule passe de x à y sur η, avec $\sigma_y = \min\{n \geq 1 : X_n = y\}$ le premier temps (non nul) d'arrivée en y, et enfin $\delta_k(x,\eta) = \mathbf{E}^x\left[\prod_{n=1}^k \eta(X_n), \sigma_x > k\right]$ le taux de mort d'une particule en x sur η.

REMARQUE 4.1. – *Pour tous $k \in \mathbf{N}$, $x, y \in \mathbf{S}$ et $\eta \in \mathbf{U}$ on a*

$$q_k(x,y,\eta) = p(x,y) + \sum_{z \neq x,y} p(x,z)p(z,y)\eta(z) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{z_1 \neq x,y,\ldots,z_{k-1} \neq x,y} p(x,z_1)\ldots p(z_{k-1},y)\eta(z_1)\ldots\eta(z_{k-1}).$$

On note $\widetilde{\mathcal{P}}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $U \times U$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ l'ensemble des fonctions f bornées sur $U \times U$ telles que

(i) $(\eta_1, \xi_1) \leq (\eta_2, \xi_2) \Longrightarrow f(\eta_1, \xi_1) \leq f(\eta_2, \xi_2)$; et

(ii) $f(\eta,\xi) = \lim_{(\eta_n,\xi_n)\uparrow(\eta,\xi)\ ,|\eta_n|<\infty,|\xi_n|<\infty} f(\eta_n,\xi_n)$, avec $|\eta_n| = \sum_x \eta_n(x)$.

Si $\mu \in \mathcal{P}$ on note $\mu T_k(t)$ la mesure définie par

$$\int f\ d\mu T_k(t) = \int T_k(t) f\ d\mu,$$

pour tout $f \in C(U)$.

Enfin on notera $\eta\xi$ la configuration telle que pour tout x

$$\eta\xi(x) = \eta(x)\xi(x).$$

4.3 Couplage de base

On va considérer les processus couplés de semi-groupes associés $\widetilde{T}_k$ et $\widetilde{S}$. Pour le processus d'exclusion à k étapes avec disparition le couplage de base est donné par le processus de Feller (η_t^k, ξ_t^k) sur $U \times U$ dont le générateur infinitésimal couplé s'écrit pour tout $f \in \widetilde{\mathcal{D}}$ (ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}_k f(\eta,\xi) = & \sum_{\substack{\eta(x)=\xi(x)=1\\ \eta(y)=\xi(y)=0}} q_k(x,y,\eta\xi)[f(\eta_{xy},\xi_{xy}) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=\xi(x)=1\\ \eta(y)=\xi(z)=0}} q_k(x,y,z,\eta,\xi)[f(\eta_{xy},\xi_{xz}) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=\xi(x)=1\\ \eta(y)=\xi(z)=0}} q_k(x,z,y,\xi,\eta)[f(\eta_{xy},\xi_{xz}) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=\xi(x)=1\\ \eta(y)=0}} q_k(x,y,\eta,\xi)[f(\eta_{xy},\xi) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=\xi(x)=1\\ \xi(y)=0}} q_k(x,y,\xi,\eta)[f(\eta,\xi_{xy}) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=1\\ \xi(x)=\eta(y)=0}} q_k(x,y,\eta)[f(\eta_{xy},\xi) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=\xi(y)=0\\ \xi(x)=1}} q_k(x,y,\xi)[f(\eta,\xi_{xy}) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=\xi(x)=\xi(y)=1\\ \eta(y)=0}} q\delta_k(x,y,\eta,\xi)[f(\eta_{xy},\xi_x) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=\xi(x)=\eta(y)=1\\ \xi(y)=0}} q\delta_k(x,y,\xi,\eta)[f(\eta_x,\xi_{xy}) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=1\\ \xi(x)=0}} \delta_k(x,\eta)[f(\eta_x,\xi) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=0\\ \xi(x)=1}} \delta_k(x,\xi)[f(\eta,\xi_x) - f(\eta,\xi)] \\
& + \sum_{\substack{\eta(x)=1\\ \xi(x)=1}} \delta_k(x,\eta\xi)[f(\eta_x,\xi_x) - f(\eta,\xi)]
\end{aligned}$$

où

$$q_k(x,y,z,\eta,\xi) = \mathbf{E}^x\left[\prod_{n=1}^{\sigma_y-1}\eta(X_n) \times \prod_{n=1}^{\sigma_z-1}\xi(X_n), \sigma_y < \sigma_z \le k, \sigma_z \le \sigma_x\right]$$

est l'intensité avec laquelle, pour deux particules en x sur η et sur ξ respectivement, la particule sur η passe en $y \neq x$ et celle sur ξ continue jusqu'en $z \neq x$;

$$q_k(x,y,\eta,\xi) = \mathbf{E}^x\left[\prod_{n=1}^{\sigma_y-1}\eta(X_n) \times \prod_{n=1}^{\sigma_x-1}\xi(X_n), \sigma_y < \sigma_x \leq k\right]$$

est l'intensité avec laquelle, pour deux particules en x sur η et sur ξ respectivement, la particule sur η passe en $y \neq x$ et celle sur ξ revient en x et

$$q\delta_k(x,y,\eta,\xi) = \mathbf{E}^x\left[\prod_{n=1}^{\sigma_y-1}\eta(X_n) \times \prod_{n=1}^{k}\xi(X_n), \sigma_y \leq k, \sigma_x > k\right]$$

est l'intensité avec laquelle, pour deux particules en x sur η et sur ξ respectivement, la particule sur η passe en $y \neq x$ et celle sur ξ disparait.

Le fait que la clôture est un générateur de Markov est à nouveau une conséquence du Théorème 3.9 Chapitre I Section 3 de T. Liggett [3].

L'interprétation de ce couplage est que les particules sur η_t et ξ_t bougent de concert chaque fois qu'elles le peuvent. Les processus marginaux η_t et ξ_t sont des copies du processus d'exclusion à k étapes. Autrement dit si $\nu \in \widetilde{\mathcal{P}}$ est de marginales μ_1 et μ_2 alors $\nu\widetilde{T}_k(t)$ a pour marginales $\mu_1 T_k(t)$ et $\mu_2 T_k(t)$.

Rappelons enfin (cf T. Liggett [3] page 382) qu'avec ce couplage on a

$$\mathbf{P}^{(\eta,\eta)}(\eta_t = \xi_t) = 1, \quad \mathbf{P}^{(\eta,\xi)}(\eta_t \leq \xi_t) = 1 \text{ si } \eta \leq \xi, \text{ et}$$

$$\mathbf{P}^{(\eta,\xi)}(\eta_t \geq \xi_t) = 1 \text{ si } \eta \geq \xi.$$

Un des avantages des semi-groupes $\widetilde{T}_k(t)$ est qu'ils convergent vers $\widetilde{S}(t)$ comme le montre le

THÉORÈME 4.2. – *Pour tout* $(\eta,\xi) \in U \times U$,

(a) $\widetilde{T}_k(t)f(\eta,\xi) \leq \widetilde{T}_{k+1}(t)f(\eta,\xi) \leq \widetilde{S}(t)f(\eta,\xi)$ *pour tout* $f \in \widetilde{\mathcal{M}} \cap C(U \times U)$;

(b) $\lim_{k\to\infty} \widetilde{T}_k(t)f(\eta,\xi) = \widetilde{S}(t)f(\eta,\xi)$ *pour tout* $f \in C(U \times U)$; *et*

(c) $\lim_{k\to\infty} \nu\widetilde{T}_k(t) = \nu\widetilde{S}(t)$ pour $\nu \in \widetilde{\mathcal{P}}$.

Preuve. – Le schéma de preuve est le même que celui de T. Liggett [2] (theorem 3.9) pour les processus non couplés :

On montre (a) sur des configurations finies, puis on utilise l'analogue de (3) pour le couplage et le fait que les $\widetilde{T}_k(t)f \in C(U \times U)$ si $f \in C(U \times U)$.

On obtient (b) pour les configurations finies, et on l'étend comme suit : on pose $g(\eta,\xi) = \lim_{k\to\infty} \widetilde{T}_k(t)f(\eta,\xi)$ pour $f \in \widetilde{\mathcal{M}} \cap C(U \times U)$, qui existe d'après (a);

soient η_n, ξ_n finies telles que $(\eta_n,\xi_n) \uparrow (\eta,\xi)$, alors on a

$$\widetilde{S}(t)f(\eta_n,\xi_n) = g(\eta_n,\xi_n) \le g(\eta,\xi) \le \widetilde{S}(t)f(\eta,\xi).$$

Comme (cf. 3) $\widetilde{S}(t)f(\eta,\xi) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{S}(t)f(\eta_n,\xi_n)$, on en déduit le résultat.

(c) est une conséquence de (b). ■

5. PREUVE DU THÉORÈME 1.3

5.1. Première étape

On va montrer qu'une mesure invariante par translation et invariante pour le processus couplé ne charge que les configurations ordonnées.

Proposition 5.1. – *Soit $\nu \in \widetilde{\mathcal{I}} \cap \widetilde{\mathcal{S}}$ alors sous les hypothèses (4) et (5)*

$$\nu\{(\eta,\xi) : \eta \le \xi ou\ \xi \le \eta\} = 1$$

Preuve. – Soit $\nu \in \widetilde{\mathcal{I}} \cap \widetilde{\mathcal{S}}$.

Pour tout $x \in \mathbf{Z}^d$ on pose

$$f_x(\eta,\xi) = [1-\eta(x)]\xi(x); \text{et}$$

$$f_{xy}(\eta,\xi) = \eta(x)[1-\xi(x)][1-\eta(y)]\xi(y).$$

Les processus $\widetilde{T}_k(t)$ étant de Feller (contrairement à $\widetilde{S}(t)$) on peut appliquer le théorème de Hille-Yosida et on a pour tout k et tout t :

$$\int \widetilde{T}_k(t)f_x(\eta,\xi)\, d\nu = \int f_x(\eta,\xi)\, d\nu + \int_0^t \left[\int \widetilde{L}_k f_x(\eta,\xi)\, d\nu \widetilde{T}_k(s)\right] ds$$

D'après le théorème 4.2 et comme $\nu \in \widetilde{\mathcal{I}}$ on a

$$\lim_{k\to\infty} \int \widetilde{T}_k(t)f_x(\eta,\xi)\, d\nu = \int \widetilde{S}(t)f_x(\eta,\xi)\, d\nu = \int f_x(\eta,\xi)\, d\nu.$$

Donc pour tout $t > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \left[\int \widetilde{L}_k f_x(\eta,\xi)\, d\nu \widetilde{T}_k(s)\right] ds = 0. \tag{6}$$

Par ailleurs :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}_k\ f_x(\eta,\xi) = & \sum_{\substack{\eta(y)=\xi(y)=1\\ \eta(z)=0,\xi(z)=1}} q_k(y,z,x,\eta,\xi)\ [1-\eta(x)][1-\xi(x)] \\
& - \sum_{\substack{\eta(y)=\xi(y)=1\\ \eta(z)=\xi(z)=0}} q_k(y,x,z,\eta,\xi)\ f_x(\eta,\xi) \\
& - \sum_{\substack{\eta(y)=\xi(y)=1\\ \eta(z)=1,\xi(z)=0}} (q_k(y,x,z,\eta,\xi)+q_k(y,z,x,\xi,\eta))f_x(\eta,\xi) \\
& + \sum_y q_k(y,x,\xi)[1-\eta(x)][1-\xi(x)]f_y(\eta,\xi) \\
& - \sum_y q_k(x,y,\xi)[1-\eta(y)][1-\xi(y)]f_x(\eta,\xi) \\
& + \sum_y \{q_k(x,y,\eta,\xi)\eta(x)\xi(x)f_y(\eta,\xi) \\
& \qquad - q_k(y,x,\eta,\xi)\eta(y)\xi(y)f_x(\eta,\xi)\} \\
& -[1-\eta(x)]\xi(x)\Bigg[\sum_y \eta(y)[1-\xi(y)]\{q_k(y,x,\eta)+q_k(x,y,\xi)\} \\
& + \sum_y \eta(y)\xi(y)q\delta_k(y,x,\eta,\xi)+\delta_k(x,\xi)\Bigg]
\end{aligned}
$$

Comme $\nu \in \widetilde{\mathcal{S}}$ on a $\widetilde{\nu}_t^k = \nu\widetilde{T}_k(t) \in \widetilde{\mathcal{S}}$ et les deux premiers termes de l'expression ci-dessus se compensent après intégration par rapport à $\widetilde{\nu}_t^k$. De même

$$\int q_k(y,x,\xi)[1-\eta(x)][1-\xi(x)]f_y(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_t^k \quad ,$$

$$\int q_k(x,y,\xi)[1-\eta(y)][1-\xi(y)]f_x(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_t^k$$

et

$$\int q_k(x,y,\eta,\xi)\eta(x)\xi(x)f_y(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_t^k\ ,\ \int q_k(y,x,\eta,\xi)\eta(y)\xi(y)f_x(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_t^k$$

sont des fonctions de $y-x$ et donc se compensent par l'invariance par translation.

Il vient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int f_x(\eta,\xi)\ d\nu\widetilde{T}_k(t) &= \int \widetilde{L}_k f_x(\eta,\xi)\ d\nu\widetilde{T}_k(t)\\ = -&\int\sum_{y,z}(q_k(y,x,z,\eta,\xi)+q_k(y,z,x,\xi,\eta))f_{zx}(\eta,\xi)\eta(y)\xi(y)\ d\widetilde{\nu}_t^k\\ -&\int\sum_y[q_k(x,y,\xi)+q_k(y,x,\eta)]\ f_{yx}(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_t^k\\ -&\int\sum_y q\delta_k(y,x,\eta,\xi)f_x(\eta,\xi)\eta(y)\xi(y)\ d\widetilde{\nu}_t^k\\ -&\int\delta_k(x,\xi)f_x(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_t^k\le 0 \end{aligned}\tag{7}$$

(6) implique entre autres que

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t\left(\int\sum_y[q_k(x,y,\xi)+q_k(y,x,\eta)]\ f_{yx}(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_s^k\right)ds=0.$$

En remarquant que

$$q_k(x,y,\xi)=\mathbf{E}^x\left[\prod_{i=1}^{\sigma_y-1}\xi(X_i),\sigma_y\le\sigma_x,\sigma_y\le k\right]\ge\mathbf{P}[\sigma_y=1]=p(x,y)\ge 0,$$

on a

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t\left(\sum_y[p(x,y)+p(y,x)]\ \int f_{yx}(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_s^k\right)ds=0.$$

Comme par le théorème 4.2 et par invariance pour tout $t>0$

$$\lim_{k\to\infty}\int f_{yx}(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_t^k=\int f_{yx}(\eta,\xi)\ d\nu S(t)=\int f_{yx}(\eta,\xi)\ d\nu;$$

par Fatou on obtient

$$\begin{aligned}0\le\int_0^t\int f_{yx}(\eta,\xi)\ d\nu\ ds &= \int_0^t\underline{\lim}_k\int f_{yx}(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_s^k\ ds\\ &\le\underline{\lim}_k\int_0^t\int f_{yx}(\eta,\xi)\ d\widetilde{\nu}_s^k\ ds.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\text{si } p(x,y)+p(y,x)>0 \text{ alors } \int f_{yx}(\eta,\xi)\ d\nu = 0. \tag{8}$$

A présent supposons $p(x,y) + p(y,x) = 0$, nous allons montrer par récurrence sur $n \leq k$ que si $p(z_0,z_1)p(z_1,z_2)...p(z_{n-1},z_n) > 0$ alors

$$\int f_{z_0 z_n}(\eta,\xi)\ d\nu = 0. \tag{9}$$

Pour $n = 1$ c'est (8) avec $z_0 = y$ et $z_1 = x$ ou vice versa. Supposons la propriété (9) vraie jusqu'à n.

Pour tous $(\eta,\xi) \in U \times U$ on a en posant $z_0 = y$ et $z_{n+1} = x$:

$$\begin{aligned} 0 \leq f_{yx}(\eta,\xi) \leq & \sum_{i=1}^{n} [1-\eta(z_i)][1-\xi(z_i)]\ f_{yx}(\eta,\xi) \\ & + \prod_{i=1}^{n} \eta(z_i)\xi(z_i)\ f_{yx}(\eta,\xi) \\ & + \sum_{i=1}^{n} f_{yz_i}(\eta,\xi)\ [1-\eta(x)]\xi(x) \\ & + \sum_{i=1}^{n} f_{z_i x}(\eta,\xi)\ \eta(y)[1-\xi(y)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Par l'hypothèse de récurrence (9) l'intégrale par rapport à ν des deux dernières sommes de l'inégalité ci dessus est nulle.

Remarquons que

$$q_k(y,x,\eta) \geq p(y,z_1)...p(z_n,x) \text{ sur } \left\{\prod_{j=1}^{n} \eta(z_j) = 1\right\}$$

on en déduit de la même façon que pour (8) que

$$\int \prod_{i=1}^{n} \eta(z_i)\xi(z_i)\ f_{yx}(\eta,\xi)\ d\nu = 0. \tag{11}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que :

$$\int [1-\eta(z_i)][1-\xi(z_i)]\ f_{yx}(\eta,\xi)\ d\nu = 0 \text{ pour tout } i \in \{1,...,n\}. \tag{12}$$

Le lemme suivant va nous permettre de conclure :

LEMME 5.2. – *Supposons* $\exists$ $z_1, z_{2,\dots}, z_l$ $\in$ $\mathbf{Z}^d$ *tels que* $p(y, z_1)p(z_1, z_2)\dots p(z_l, x) > 0$, *on note*

$$h^i_{yx}(\eta,\xi)=\left(\prod_{j=1}^{i-1}\eta(z_j)\xi(z_j)\right)[1-\eta(z_i)][1-\xi(z_i)]\ f_{yx}(\eta,\xi)\ \textit{pour}\ 1\leq i\leq l,$$

alors si

$$\int h^i_{yx}(\eta,\xi)\ d\nu > 0, \tag{13}$$

on peut trouver $\delta > 0$ *tel que*

$$\int \widetilde{S}(\delta)\left(\prod_{j=1}^{i-1}\eta(z_j)\xi(z_j)\ f_{z_i x}(\eta,\xi)\right)\ d\nu > 0.$$

Par l'absurde si on suppose que $\int h^i_{yx}(\eta,\xi)\ d\nu > 0$ alors d'après le lemme précédent on a :

$$\int \widetilde{S}(\delta)\left(\prod_{j=1}^{i-1}\eta(z_j)\xi(z_j)\ f_{z_i x}(\eta,\xi)\right)d\nu$$
$$= \int \left(\prod_{j=1}^{i-1}\eta(z_j)\xi(z_j)\ f_{z_i x}(\eta,\xi)\right)d\nu > 0$$

l'égalité ayant lieu car $\nu \in \widetilde{\mathcal{I}}$.

$$\text{Donc } \int f_{z_i x}(\eta,\xi)\ d\nu \geq \int \prod_{j=1}^{i-1}\eta(z_j)\xi(z_j)\ f_{z_i x}(\eta,\xi)\ d\nu > 0$$

or ceci est contraire à l'hypothèse de récurrence (9). On en déduit (12).

Avec (11), (12) et l'inégalité (10) on conclut que s'il existe $z_1, z_{2,\dots}, z_n$ tels que $p(y, z_1)p(z_1, z_2)\dots p(z_n, x) > 0$ alors

$$\int f_{yx}(\eta,\xi)\ d\nu = 0.$$

Comme $\{p(x,y)\}_{x,y}$ est irréductible on en déduit

$$\nu\{(\eta,\xi) : \eta \leq \xi ou\ \xi \leq \eta\} = 1.$$

■

PREUVE DU LEMME 5.2 :

REMARQUE 5.3. - *Lorsque l'on a un nombre fini de particules, on peut construire le processus de manière à ce que chaque particule décide de bouger à des temps exponentiels de paramètre 1 indépendants.*

On note

$$\eta^n(u) = \begin{cases} \eta(u) & \text{si } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on prend n suffisamment grand pour que $x, y, z_1, ..., z_l \in [-n, n]$.

On pose pour tous $u \in \mathbf{Z}^d$ et $\zeta \in U$, $\tau^u(\zeta) = \inf\{t : \zeta_t(u) = 1\}$. On note B_i le triplet $B_i = \{y, z_i, x\}$ et notons les événements suivants :

$\mathcal{A} = \{$*durant* δ, *dans* $B_i \cup \{z_1, ..., z_{i-1}\}$, *la particule sur* y *passe en* z_i *sur* η *et y reste et aucune autre particule (dans* $B_i \cup \{z_1, ..., z_{i-1}\}$ *) ne bouge*$\}$,

$\mathcal{B} = \{$*durant* δ *aucune particule de l'extérieur de* B_i *n'arrive sur un site libre de* $B_i\}$,

On a sur $\{h^i_{yx}(\eta^n, \xi^n) = 1\}$

$$\mathbf{P}^{\eta^n, \xi^n}(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \geq (1 - e^{-\delta}) p(y, z_1)...p(z_{i-1}, z_i) e^{-\delta}\ e^{-i\delta}$$

et

$$\mathbf{P}^{\eta^n, \xi^n}(\mathcal{B}) \geq \mathbf{P}^{\eta^n, \xi^n}[\tau^y(\xi) > \delta, \tau^{z_i}(\xi) > \delta, \tau^{z_i}(\eta) > \delta, \tau^x(\eta) > \delta] \triangleq b_n.$$

Alors

$$\begin{aligned} h^i_{yx}(\eta^n, \xi^n) \mathbf{P}^{\eta^n, \xi^n} &\left[\left(\prod_{j=1}^{i-1} \eta_\delta(z_j) \xi_\delta(z_j) \right) f_{z_i x}(\eta_\delta, \xi_\delta) \ = 1 \right] \\ &\geq h^i_{yx}(\eta^n, \xi^n) \mathbf{P}^{\eta^n, \xi^n}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \\ &\geq h^i_{yx}(\eta^n, \xi^n) \big(1 - e^{-\delta}\big) p(y, z_1)...p(z_{i-1}, z_i) e^{-(i+1)\delta} \times b_n. \end{aligned} \tag{14}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} c_n &\triangleq \mathbf{P}^{\eta^n, \xi^n}[\xi_\delta(y) = 1 \vee \xi_\delta(z_i) = 1 \vee \eta_\delta(z_i) = 1 \vee \eta_\delta(x) = 1] \\ &\geq \left(e^{-\delta}\right) \ \mathbf{P}^{\eta^n, \xi^n}[\tau^y(\xi) \leq \delta \vee \tau^{z_i}(\xi) \leq \delta \vee \tau^{z_i}(\eta) \leq \delta \vee \tau^x(\eta) \leq \delta] \end{aligned}$$

Donc avec les notations précédentes

$$c_n \geq e^{-\delta}(1 - b_n). \tag{15}$$

De plus c_n est croissant en n et tend vers

$$\mathbf{P}^{\eta,\xi}[\xi_\delta(y) = 1 \vee \xi_\delta(z_i) = 1 \vee \eta_\delta(z_i) = 1 \vee \eta_\delta(x) = 1].$$

Comme

$$\int \mathbf{P}^{\eta,\xi}[\xi_\delta(y) = 1 \vee \xi_\delta(z_i) = 1 \vee \eta_\delta(z_i) = 1 \vee \eta_\delta(x) = 1]\ d\nu$$
$$= \nu\widetilde{S}(\delta)[\xi(y) = 1 \vee \xi(z_i) = 1 \vee \eta(z_i) = 1 \vee \eta(x) = 1] \overset{\triangle}{=} D$$

et

$$D = \nu[\xi(y) = 1 \vee \xi(z_i) = 1 \vee \eta(z_i) = 1 \vee \eta(x) = 1] < 1$$

l'égalité ayant lieu de par l'invariance de ν par le processus et l'inégalité provenant de l'hypothèse (13), donc par (15)

$$\int \mathbf{P}^{\eta^n,\xi^n}[\tau^y(\xi) \leq \delta \vee \tau^{z_i}(\xi) \leq \delta \vee \tau^{z_i}(\eta) \leq \delta \vee \tau^x(\eta) \leq \delta]\ d\nu \leq e^\delta D < 1 \tag{16}$$

dès que $\delta < \ln \frac{1}{D}$.

Donc d'après (14) et (16) il existe une constante

$$K_0 = \left(1 - e^{-\delta}\right) p(y, z_1) \ldots p(z_{i-1}, z_i) e^{-(i+1)\delta} \left(1 - e^\delta D\right) > 0$$

indépendante de n telle que

$$\int \mathbf{P}^{\eta^n,\xi^n}\left[\prod_{j=1}^{i-1} \eta_\delta(z_j)\xi_\delta(z_j)\ f_{z_i x}(\eta_\delta, \xi_\delta) = 1\right] d\nu \geq K_0 \int h^i_{yx}(\eta, \xi) d\nu > 0.$$

Enfin on fait tendre n vers l'infini on a par construction

$$\mathbf{P}^{\eta^n,\xi^n}\left[\prod_{j=1}^{i-1} \eta_\delta(z_j)\xi_\delta(z_j)\ f_{z_i x}(\eta_\delta, \xi_\delta) = 1\right]$$
$$\to \widetilde{S}(\delta)\left[\prod_{j=1}^{i-1} \eta(z_j)\xi(z_j)\ f_{z_i x}(\eta, \xi)\right]$$

donc par convergence dominée

$$\int \widetilde{S}(\delta) \prod_{j=1}^{i-1} \eta(z_j)\xi(z_j)\ f_{z_i x}(\eta, \xi)\ d\nu > 0.$$

■

5.2 Deuxième étape

On va montrer que si μ_1 et μ_2 sont deux mesures invariantes par le processus à longue portée on peut alors trouver une mesure ν de marginales μ_1 , μ_2 invariante pour le processus couplé.

PROPOSITION 5.4. – *Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{I}$ et $\{t_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels positifs tels que $t_n \nearrow \infty$,*

$$\textit{si } \nu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} (\mu_1 \times \mu_2) \widetilde{S}(t)\, dt \textit{ existe alors}$$

$$\nu \in \widetilde{\mathcal{I}}.$$

Preuve. – Pour tout n on pose

$$\nu_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} (\mu_1 \times \mu_2) \widetilde{S}(t)\, dt.$$

REMARQUE 5.5. – *ν_n est une mesure (de probabilité) de marginales μ_1 et μ_2 de par l'invariance de ces deux mesures.*

Soit f une fonction ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées, on supposera que f ne dépend que des coordonnées dans $[-l, l]$.

Pour tout $j \in \mathbf{N}$ et tout $\eta \in X$ on définit

$$\eta^j(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } x \in [-j, j] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A présent évaluons

$$\left| \widetilde{S}(t) f(\eta, \xi) - \widetilde{S}(t) f(\eta^j, \xi^j) \right| \leq 2\|f\| \left\{ \mathbf{E}^\eta \left[\sum_{x=-l}^{l} \eta_t(x) \right] - \mathbf{E}^{\eta_j} \left[\sum_{x=-l}^{l} \eta_t(x) \right] \right.$$
$$\left. + \mathbf{E}^\xi \left[\sum_{x=-l}^{l} \xi_t(x) \right] - \mathbf{E}^{\xi_j} \left[\sum_{x=-l}^{l} \xi_t(x) \right] \right\}.$$

En fait nous venons d'écrire que les différences ne sont créées que lorsqu'une particule arrive dans $[-l, l]$ en partant de l'extérieur de $[-j, j]$.

Posons $f_l(\eta) = \sum_{x=-l}^{l} \eta(x)$, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$ en utilisant la Remarque 5.5 on a

$$\begin{aligned}
&\int \left|\widetilde{S}(t)f(\eta,\xi) - \widetilde{S}(t)f(\eta^j,\xi^j)\right| d\nu_n \\
&\leq 2\|f\| \left\{\int \left(S(t)f_l(\eta) - S(t)f_l(\eta^j)\right) \mu_1(d\eta)\right. \\
&\left.+ \int \left(S(t)f_l(\xi) - S(t)f_l(\xi^j)\right) \mu_2(d\xi)\right\}.
\end{aligned}$$

Enfin comme par construction de $S(t)$

$$S(t)f_l(\eta^j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \to S(t)f_l(\eta) \quad \text{et} \quad S(t)f_l(\xi^j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} S(t)f_l(\xi)$$

on a

$$\sup_n \int \left|\widetilde{S}(t)f(\eta,\xi) - \widetilde{S}(t)f(\eta^j,\xi^j)\right| d\nu_n j \to \infty \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{17}$$

Remarquons que comme η^j et ξ^j sont finies,

$$\begin{aligned}
&\int \widetilde{S}(s)f\ (\eta^j,\xi^j) d\nu = \lim_{n\to\infty} \int \widetilde{S}(s)f\ (\eta^j,\xi^j)\ d\nu_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \left[\int \widetilde{S}(s+t)f\ (\eta^j,\xi^j)\ d(\mu_1\times\mu_2)\right] dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_s^{t_n+s} \left[\int \widetilde{S}(t)f\ (\eta^j,\xi^j)\ d(\mu_1\times\mu_2)\right] dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f\ (\eta^j,\xi^j)\ d\nu_n = \int f\ (\eta^j,\xi^j)\ d\nu].
\end{aligned}$$

donc d'après (17) si $\nu = \lim_n \nu_n$ existe

$$\int \widetilde{S}(t)f(\eta,\xi)\ d\nu = \int f\ d\nu.$$

■

5.3 Troisième étape

On montre que si μ est une mesure invariante par translation et si pour tout $\alpha \in [0,1]$ il existe une mesure couplée ν_α ne chargeant que les configurations ordonnées de première et de seconde marginales μ et μ_α respectivement (où μ_α est la mesure de Bernoulli produit de paramètre α) alors μ est un mélange de ces mesures de Bernoulli produit.

On utilise le :

LEMME 5.6. – *(voir Andjel [1] 1981, pp.426-427)*

Soit $\mu \in \mathcal{S}$ pour tout $\alpha \in [0,1]$ on suppose qu'il existe des mesures, notées ν_α, sur $\widetilde{\mathcal{P}}$ de marginales μ et μ_α (mesure de Bernoulli produit de paramètre α), telles que

$$\nu_\alpha \{(\eta, \xi) : \eta \leq \xi ou\ \xi \leq \eta\} = 1,$$

pour tout $\alpha \in [0,1]$.

Alors il existe une mesure γ de probabilité sur $[0,1]$ telle que

$$\mu = \int_0^1 \mu_\alpha\ \gamma(d\alpha).$$

PREUVE DU THÉORÈME 3.2

On rappelle que $\mu_\alpha \in \mathcal{I}$ (Liggett [2]). De par les propositions 2.1 et 2.3 on est dans les conditions d'application du Lemme précédent, le théorème 3.2 s'en déduit. ■

REMERCIEMENTS

Cet article est tiré de ma thèse à l'Université de Provence d'Aix-Marseille. Je tiens à remercier mon directeur, Enrique Andjel, pour la suggestion du problème ainsi que pour ses conseils et ses encouragements.

RÉFÉRENCES

[1] E. D. ANDJEL, The asymmetric simple exclusion process on $\mathbf{Z}^d$. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, vol. **58**, 1981, p. 423-432.
[2] T. M. LIGGETT, Long-range exclusion processes, *Ann. Probab.*, vol. **8**, 1980, p. 861-889.
[3] T. M. LIGGETT, *Interacting Particle Systems*, Springer, New York, 1985.
[4] F. SPITZER, Interaction of Markov processes, *Adv. Math.*, vol. **5**, 1970, p. 247-290.
[5] X. ZHENG, Ergodic theorem for generalized long-range exclusion processes with positive recurrent transition probabilities, *Acta Math. Sinica*, vol. **4**, 1988, p. 193-209.

(Manuscrit reçu le 16 novembre 1995;
révisée le 26 août 1996.)