ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CATHERINE GAMET
DOMINIQUE SCHNEIDER

Théorèmes ergodiques multidimensionnels et suites aléatoires universellement représentatives en moyenne

Annales de l'I. H. P., section B, tome 33, nº 2 (1997), p. 269-282
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1997__33_2_269_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 33, n° 2, 1997, p. 269-282 *Probabilités et Statistiques*

Théorèmes ergodiques multidimensionnels et suites aléatoires universellement représentatives en moyenne

par

Catherine GAMET et Dominique SCHNEIDER

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S.,
7, rue René Descartes 67084 Strasbourg Cedex, France.
E-mail: Gamet@math.u-strasbg.fr
E-mail: Schneider@math.u-strasbg.fr

RÉSUMÉ. – Dans cet article les méthodes gaussiennes et l'inégalité de Van der Corput sont utilisées pour étudier les théorèmes ergodiques multidimensionnels et les suites aléatoires universellement représentatives.

ABSTRACT. – In this paper, Van der Corput's inequality and gaussian methods are used for studying multidimensional ergodic theorems and universally representative random sequences.

I. INTRODUCTION RÉSULTATS PRINCIPAUX

Considérons un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ que nous supposons complet, sur lequel nous définissons une suite $\{S_k,\ k \geq 1\}$ de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$.

A.M.S. Classification : 60 G 15, 28 D 05.

Soit $(Y, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, c'est-à-dire la donnée d'un espace probabilisé $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{A}, \mu)$ et la donnée d'une $\mathbb{Z}^d$-action T sur $\mathcal{Y}$. Introduisons maintenant la notion de suites universellement représentatives.

DÉFINITION. – *Une suite de vecteurs aléatoires $S = \{S_k,\ k \geq 1\}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est dite universellement représentative pour L^p, $p > 1$, s'il existe $\Omega_o \subset \Omega$ presque sûr, tel que pour tout $\omega \in \Omega_o$ nous avons :*

pour tout système dynamique mesuré $(Y, \mathcal{A}, \mu, T)$, pour tout $f \in L^p(\mu)$,

$$\mu\left\{y : \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(T^{S_k(\omega)} y) \textit{ existe}\right\} = 1.$$

Par exemple pour $d = 1$, la suite $\{p_k + \theta_k,\ k \geq 1\}$ où p_k désigne le k-ième nombre premier et $\{\theta_k,\ k \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et possédant un moment d'ordre strictement positif, est universellement représentative pour L^p, $p > 1$ (*voir* [11] à ce sujet).

Toujours dans le cas où $d = 1$, M. Lacey, K. Petersen, D. Rudolph et M. Wierdl (*cf.* théorème 5, [9]) ont montré

THÉORÈME. – *Soit $X = \{X_k,\ k \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, telle que $\mathbb{E}X_1 \neq 0$ et $\mathbb{E}(X_1)^2 < \infty$. Alors, la suite*

$$S = \left\{\sum_{j=1}^{k} X_j\ ,\ k \geq 1\right\}$$

est universellement représentative pour L^p, $p > 1$.

Dans le cas où $d \geq 2$, ils ont obtenu le résultat suivant (*cf.* théorème 7, dans [9]) :

Si $f \in L^2(\mu)$, alors

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in \mathcal{N}}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f \circ T^{S_k} \text{ existe, } \mu\text{-presque partout,}$$

où $\mathcal{N} = \{[2^{t \log t}],\ t \in \mathbb{N}^*\}$.

Les techniques utilisées par M. Lacey, K. Petersen, D. Rudolph et M. Wierdl dans [9], telles que la loi du logarithme itéré de Hartmann-Winter ne permettent pas d'obtenir la convergence ponctuelle pour l'index total. C'est la raison pour laquelle ils ont précisé cette situation avec le théorème suivant (*cf.* théorème 8, [9]) :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N(\log N \log\log N)^{\frac{1}{4}}} \sum_{k=1}^{N} f \circ T^{S_k} = 0, \quad \mu\text{-presque partout.}$$

Il est donc naturel de s'interroger sur le problème de la convergence quadratique des moyennes ergodiques du type précédent. Plus précisément, nous introduisons la notion de suite aléatoire universellement 2-représentative en moyenne.

DÉFINITION. – *Une suite de vecteurs aléatoires $S = \{S_k,\ k \geq 1\}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est universellement 2-représentative en moyenne, s'il existe $\Omega_o \subset \Omega$ presque sûr, tel que pour tout $\omega \in \Omega_o$:*

pour tout système dynamique mesuré $(Y, \mathcal{A}, \mu, T)$, pour tout $f \in L^2(\mu)$,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f \circ T^{S_k(\omega)} \text{ existe au sens } L^2(\mu).$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

THÉORÈME PRINCIPAL 1. – *Soit $X = \{X_k,\ k \geq 1\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants, identiquement distribués, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ et d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}|X_1|^\delta < \infty$.*

Alors la suite de vecteurs aléatoires $S = \{\sum_{j=1}^{k} X_j,\ k \geq 1\}$ est universellement 2-représentative en moyenne.

Ce résultat est encore valable si T est une contraction positive de $L^2(\mu)$.

Dans le cas où la suite $X = \{X_k,\ k \geq 1\}$ désigne une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes, nous savons que la suite des sommes partielles n'est pas universellement représentative (*cf.* théorème 4 dans [9]). Plus généralement cette situation se produit dès que $\mathbb{E}(X_1)^2 < \infty$ et $\mathbb{E}X_1 = 0$, et pourtant dans ce cas, la suite des sommes partielles est 2-représentative en moyenne. Ceci fournit donc des exemples de suites vérifiant un théorème ergodique en moyenne, mais pas ponctuellement. Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons essentiellement le principe de Van der Corput et le lemme spectral que nous rappellerons, des outils d'analyse harmonique, et des techniques provenant de l'analyse des fonctions aléatoires gaussiennes. Ces dernières permettent, notamment, de donner une estimation uniforme de l'ordre de grandeur de certains polynômes trigonométriques aléatoires reliés aux questions étudiées.

THÉORÈME 2. – *Soit $X = \{X_k,\ k \geq 1\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants, identiquement distribués, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}|X_1|^\delta < \infty$.*

Notons $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{j=1}^d \alpha_j \cdot \beta_j$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^d$, et $\beta \in \mathbb{R}^d$. Pour tout entier $l \geq 1$, posons $S_k^l = X_{k+1} + \cdots + X_{k+l}$, $\forall\ k \geq 1$.

Alors, pour tout $l \geq 1$, nous avons

$$\mathbb{E} \sup_{\alpha \in [0,1[^d} \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{\sqrt{N \log [N+1]}} \sum_{k=1}^N \exp [2i\pi \langle \alpha, S_k^l \rangle] - \mathbb{E} \exp [2i\pi \langle \alpha, S_k^l \rangle] \right| < \infty.$$

Rappelons l'inégalité de Van der Corput (*voir* [8] pour un exemple d'utilisation en théorie ergodique).

INÉGALITÉ DE VAN DER CORPUT. – *Si $(u_n)_{0 \leq n < N}$ est une famille finie de N éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et si H est un entier compris entre 0 et N-1, alors nous avons :*

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{N+H}{N^2(H+1)} \sum_{k=0}^{N-1} \|u_k\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \frac{N+H}{N^2(H+1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H+1-h) \cdot A(N,h),$$

où $A(N,h) = Re\Big(\sum_{k=0}^{N-h-1} \langle u_{k+h}, u_k \rangle_{\mathcal{H}}\Big)$.

Cette inégalité se démontre simplement en écrivant

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \frac{1}{N} \sum_{k=-H}^{N-1} \left(\frac{1}{H+1} \sum_{h=0}^{H} u_{k+h} \right) \right\|_{\mathcal{H}}^2,$$

avec la convention $u_k = 0$ si $k < 0$ ou $k \geq N$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (*voir* à ce propos [7])

LEMME SPECTRAL. – *Soit T une contraction d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et soit $p(x)$ un polynôme défini sur le cercle unité $D = \{x | x \in \mathbb{C}, |\ x| = 1\}$. Alors pour tout f appartenant à $\mathcal{H}$, il existe une mesure borélienne positive bornée sur D, notée μ_f, telle que nous ayons :*

$$\|\ p(T)f\ \|_{\mathcal{H}}^2 \leq \int_D |\ p(x)\ |^2\ \mu_f(dx).$$

Ce résultat découle du théorème de Bochner que U. Krengel étend aux contractions d'espace de Hilbert (*cf.* [6], proposition 3.1, p. 94) et d'un argument de dilation introduit par Sz.-Nagy et Foias.

II. DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT PRINCIPAL

Dans cette section nous allons démontrer le théorème principal, d'une part, en supposant le théorème 2 acquis, et d'autre part, en utilisant l'inégalité de Van der Corput. Enfin, nous donnerons une preuve du théorème 2.

Étape 1. – Le principe de Van der Corput.

Nous allons exploiter l'inégalité de Van der Corput afin de donner une condition suffisante pour qu'une suite d'éléments d'un espace de Hilbert tende vers zéro au sens de Césaro pour la norme hilbertienne considérée. Plus précisément, étant donnée $(u_n)_{1\leq n\leq N}$ est une famille finie de N éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, une condition suffisante pour avoir

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}u_k\right\|_{\mathcal{H}}=0,$$

consiste en :

$$(a)\qquad \forall l\geq 0,\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\langle u_{k+l},u_k\rangle_{\mathcal{H}}=\gamma_l \text{ existe,}$$

et

$$(b)\qquad \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\gamma_l=0.$$

Cette condition suffisante résulte facilement de l'inégalité de Van der Corput.

Étape 2. – Application du principe de Van der Corput.

Fixons $(Y,\mathcal{A},\mu,T)$ un système dynamique mesuré. En utilisant les notations du théorème 2, nous noterons $S_k^{l,(j)}$ la j-ième composante du vecteur aléatoire $S_k^l\in\mathbb{Z}^d$ définie sur l'espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{B},P)$.

Notons $\varphi(\alpha)=\mathbb{E}\exp 2i\pi\langle\alpha,X_1\rangle$ la transformée de Fourier de la loi du vecteur aléatoire X_1. Ce vecteur aléatoire peut prendre un grand nombre de valeurs essentielles dans $\mathbb{Z}^d$. Considérons en un nombre fini. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que chaque i-ième composante de ces vecteurs sont premières entre-elles (*voir* [5] à ce sujet). Cette remarque est valable pour chacune des autres composantes. Sinon, les conditions d'existence de la limite de la moyenne ergodique aléatoire étudiée seraient encore assurées, seule l'expression de cette limite serait modifiée.

Dans ces conditions, nous pouvons supposer que $\varphi(\alpha) = 1$ si et seulement si $\alpha = (0, \cdots, 0) \bmod \mathbb{Z}^d$. Considérons un élément f de $L^2(\mu)$ dans l'orthogonal de l'espace des fonctions invariantes sous l'action de l'opérateur T. Par conséquent si nous notons μ_f la mesure spectrale de l'opérateur T au point f sur $[0,1[^d$, alors $\mu_f(\{0\}) = 0$.

En vertu du lemme spectral, nous avons :

$$(3)\qquad \left\| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f \circ T^{X_1+\cdots+X_k} \right\|_{2,\mu}^2 = \int_{[0,1[^d} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \exp\left[2i\pi\langle \alpha, X_1 + \cdots + X_k\rangle\right] \right|^2 \mu_f(d\alpha).$$

Notre but est alors de montrer que le membre de droite dans (3) converge vers zéro lorsque N tend vers l'infini sur un ensemble P-mesurable presque sûr universel. Ceci suffit pour démontrer le résultat principal : en effet, nous décomposerons chaque élément de $L^2(\mu)$ selon l'espace vectoriel fermé des fonctions fixes sous l'action de T, et selon son orthogonal. Par conséquent, nous obtenons dans ce cas, une expression possible de la limite comme $\mathbb{E}(f/\mathcal{F})$ où $\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{A} : \ \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}\}$.

A présent, nous allons appliquer le principe de Van der Corput à l'expression :

$$(4)\qquad \int_{[0,1[^d} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \exp\left[2i\pi\langle \alpha, X_1 + \cdots + X_k\rangle\right] \right|^2 \mu_f(d\alpha).$$

L'espace de Hilbert considéré sera $\mathcal{H} = L^2([0,1[, \mu_f)$ et la suite retenue

$$\{u_k = \exp 2i\pi\langle \alpha, X_1 + \cdots + X_k\rangle, \ k \geq 1\}.$$

Nous commençons par vérifier la condition (a) du principe de Van der Corput. Celui-ci consiste en l'étude du comportement à l'infini de l'expression suivante :

$$(5)\qquad \forall l \geq 1, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \int_{[0,1[^d} \exp\left[2i\pi\langle \alpha, X_{k+1} + \cdots + X_{k+l}\rangle\right] \mu_f(d\alpha).$$

Nous introduisons alors les notations du théorème 2. Dans ces conditions, puisque les vecteurs aléatoires X_k sont identiquement distribués et indépendants, nous obtenons une écriture équivalente de (5) :

$$(6)\quad \begin{cases} \forall l \geq 1, \\ \displaystyle\int_{[0,1[^d} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\exp[2i\pi\langle\alpha, S_k^l\rangle] \\ \quad - \mathbb{E}\exp[2i\pi\langle\alpha, S_k^l\rangle]\ )\mu_f(d\alpha) + \displaystyle\int_{[0,1[^d} \varphi^l(\alpha)\mu_f(d\alpha). \end{cases}$$

En vertu du théorème 2, il résulte que la limite de l'expression (6) existe, pour N tendant vers l'infini. Précisément, nous avons : pour tout entier l fixé, il existe un ensemble Ω_l, $\mathcal{B}$-mesurable, presque sûr tel que, pour tout ω appartenant à Ω_l,

$$(6')\quad \begin{cases} \forall l \geq 1, \\ \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{[0,1[^d} \exp[2i\pi\langle\alpha, S_k^l(\omega)\rangle]\mu_f(d\alpha) \\ \quad = \gamma_l = \displaystyle\int_{[0,1[^d} \varphi^l(\alpha)\mu_f(d\alpha). \end{cases}$$

Par conséquent, il existe un ensemble Ω_o $\mathcal{B}$-mesurable presque sûr, tel que pour tout ω appartenant à Ω_o, pour tout entier l,

$$\gamma_l(\omega) = \int_{[0,1[^d} \varphi^l(\alpha)\mu_f(d\alpha).$$

Vérifions maintenant la condition (b) du principe de Van der Corput. Fixons ω dans Ω_o et étudions le comportement lorsque L tend vers l'infini de

$$\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\gamma_l(\omega) = \int_{[0,1[^d} \frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\varphi^l(\alpha)\mu_f(d\alpha).$$

Puisque
$\varphi(\alpha) = 1$ si et seulement si $\alpha = 0$, alors

$$\forall\alpha \in]0,1[^d, \quad |\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\varphi^l(\alpha)| \leq \frac{1}{L}\frac{2}{|1-\varphi(\alpha)|}.$$

Ainsi, à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue, puis en utilisant le fait que la mesure spectrale μ_f n'a pas de masse ponctuelle en zéro, nous avons :

$$\forall\omega \in \Omega_o, \quad \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\gamma_l(\omega) = 0.$$

Par conséquent sur l'ensemble Ω_o universel (indépendant du système dynamique considéré), nous obtenons :

pour toute fonction f invariante sous l'action de T,

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\circ T^{X_1+\cdots+X_k}\right\|_{2,\mu}=0.$$

Nous remarquons que si l'équation $\varphi(\alpha) = 1$ avait eu d'autres racines rationnelles, il aurait fallu choisir f de telle sorte que sa mesure spectrale μ_f ne charge pas ces rationnels.

Ceci démontre le résultat principal. ■

III. PREUVE DU THÉORÈME 2

(*Voir* aussi théorème I.1.3 dans [5].)

Empruntons une voie utilisant l'analyse des fonctions aléatoires gaussiennes. Le type de cheminement que nous allons présenter, est apparu pour la première fois dans [11] pour répondre à d'autres questions telle que la stabilité des théorèmes ergodiques de J. Bourgain. Ici, nous nous proposons de montrer entre autres, que les méthodes gaussiennes permettent aussi d'aborder des problèmes ergodiques aléatoires multidimensionnels.

Considérons $\{X_k^{'},\ k\geq 1\}$ une suite de copies indépendantes de la suite $\{X_k,\ k\geq 1\}$. Le théorème 2 résultera, en vertu de l'inégalité de Jensen, de l'estimation

$$(7)\quad \begin{cases} \forall l\geq 1, \\ \mathbb{E}_X\mathbb{E}_{X'}\sup_{\alpha\in[0,1[^d}\sup_{N\geq 1}\left|\frac{1}{\sqrt{N}\log[N+1]}\sum_{k=1}^{N}\exp[2i\pi\langle\alpha,S_k^l\rangle]\right. \\ \left.\qquad -\exp[2i\pi\langle\alpha,S_k^{'l}\rangle]\right|<\infty. \end{cases}$$

Nous définissons maintenant une famille de partitions de l'ensemble $\mathbb{N}^*$. Fixons l'entier $l\geq 1$. Nous notons pour tout $m=1,2,\cdots,l$, $I_m^l=\{m+rl,\ r\in\mathbb{N}\}$. Nous obtenons donc, avec ces notations, la propriété suivante :

$$\forall l\geq 1,\quad \bigcup_{m=1}^{m=l} I_m^l=\mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier $N \geq 1$, posons $I_m^l(N) = I_m^l \bigcap [1, N]$. A l'aide de cette construction, le point (7) résultera de

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall l \geq 1, \\ \sum_{m=1}^{l} \mathbb{E}_{\mathcal{X}} \mathbb{E}_{\mathcal{X}'} \sup_{\alpha \in [0,1[^d} \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{\sqrt{N \log[N+1]}} \sum_{k \in I_m^l(N)} \exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^l \rangle] \right. \\ \left. - \exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^{'l} \rangle] \right| < \infty. \end{array} \right.$$

Choisissons l et m tels que $m \leq l$, et montrons que nous avons :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{X}} \mathbb{E}_{\mathcal{X}'} \sup_{\alpha \in [0,1[^d} \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{\sqrt{N \log[N+1]}} \sum_{k \in I_m^l(N)} \exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^l \rangle] \right. \\ \left. - \exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^{'l} \rangle] \right| < \infty.$$

Considérons la famille de fonctions aléatoires suivantes :

$$\{\exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^l \rangle] - \exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^{'l} \rangle], \; k \in I_m^l\}.$$

C'est une famille symétrique de fonctions aléatoires. Par conséquent, en considérant une suite de variables aléatoires indépendantes de Rademacher $\{\varepsilon_k, \; k \geq 1\}$ telle que pour tout $k \geq 1$, ε_k soit indépendante de $S_k^{l,(1)}, \cdots, S_k^{l,(d)}$ et de $S_k^{'l,\,(1)}, \cdots, S_k^{'l,\,(d)}$, les lois de

$$\{\exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^l \rangle] - \exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^{'l} \rangle], \; k \in I_m^l\}$$

et de

$$\{\varepsilon_k \cdot \{\exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^l \rangle] - \exp[2i\pi\langle \alpha, S_k^{'l} \rangle]\}, \; k \in I_m^l\}$$

sont les mêmes. Ainsi (7) résultera de

$$(8) \qquad \mathbb{E}_{\varepsilon} \mathbb{E}_{\mathcal{X}} \mathbb{E}_{\mathcal{X}'} \sup_{\alpha \in [0,1]^d} \sup_{N \geq 1} \\ \times \left| \frac{\sum_{k \in I_m^l(N)} \varepsilon_k \cdot [\exp 2i\pi\langle \alpha, S_k^l \rangle - \exp 2i\pi\langle \alpha, S_k^{'l} \rangle]}{\sqrt{N \log[N+1]}} \right| < \infty.$$

Soient $\{g_k, \; k \geq 1\}$ et $\{g_k^{'}, \; k \geq 1\}$ deux suites isonormales indépendantes centrées et telles que pour tout $k \geq 1$, g_k et $g_k^{'}$ soient indépendantes de $S_k^{l,(1)}, \cdots, S_k^{l,(d)}$ et de $S_k^{'l,\,(1)}, \cdots, S_k^{'l,\,(d)}$.

En appliquant le principe de contraction à (8), il suffit donc d'établir

$$(9) \qquad \mathbb{E}_X \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha \in [0,1]^d} \sup_{N \geq 1} \times \left| \frac{\sum_{k \in I_m^l(N)} g_k \cos 2\pi \langle \alpha, S_k^l \rangle + g_k' \sin 2\pi \langle \alpha, S_k^l \rangle}{\sqrt{N \log [N+1]}} \right| < \infty.$$

Pour tout $\alpha \in [0,1]^d$, pour tout $N \geq 1$, la suite $\{ S_k^l,\ k \in I_m^l \}$ étant fixée, nous désignons par

$$X_N(\alpha) = \frac{\sum_{k \in I_m^l(N)} g_k \cos 2\pi \langle \alpha, S_k^l \rangle + g_k' \sin 2\pi \langle \alpha, S_k^l \rangle}{\sqrt{N \log [N+1]}},$$

la fonction aléatoire gaussienne intervenant dans (9).

En vertu d'un résultat de X. Fernique (*voir* [3], ou proposition. 1.6 dans [11]) il existe une constante universelle K_1 telle que

$$\mathbb{E}_{g,g'} \sup_{N \geq 1} \sup_{\alpha \in [0,1]^d} |X_N(\alpha)| \leq K_1 \cdot \left[\sup_{N \geq 1} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha \in [0,1]^d} |X_N(\alpha)| + \mathbb{E}_\lambda \sup_{N \geq 1} |\lambda_N \sigma_N| \right],$$

où $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ est une suite isonormale et où l'on peut choisir

$$\sigma_N \leq \sup_{\alpha \in [0,1]^d} \| X_N(\alpha) \|_{2,g,g'}.$$

Montrons que

$$\mathbb{E}_X \mathbb{E}_\lambda \sup_{N \geq 1} |\lambda_N \sigma_N| < \infty.$$

En effet, un calcul facile donne :

$$\sigma_N \leq \sup_{\alpha \in [0,1]^d} \| X_N(\alpha) \|_{2,g,g'} \leq \frac{1}{\sqrt{\log [N+1]}}.$$

Et par suite :

$$\mathbb{E}_\lambda \sup_{N \geq 1} |\lambda_N \sigma_N| < \infty.$$

Ainsi, pour montrer (9), il suffit d'établir que

$$\text{(10)} \qquad \mathbb{E}_X \sup_{N \geq 1} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha \in [0,1]^d} |X_N(\alpha)| < \infty.$$

En vertu de l'inégalité de Lévy, (10) proviendra de

$$\text{(11)} \qquad \mathbb{E}_X \sup_{N \geq 1} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha \in [0,1]^d} \times \left| \frac{\sum_{k \in I^l_m(N)} g_k \cos 2\pi \langle \alpha, S^l_k \rangle + g'_k \sin 2\pi \langle \alpha, S^l_k \rangle}{\sqrt{N \log [N+1]}} \right| < \infty.$$

La suite $\{ S^l_k, \ k \in I^l_m \}$ étant fixée, considérons la fonction aléatoire gaussienne stationnaire, continue en moyenne quadratique, à valeurs réelles :

$$G(\alpha) = \frac{\sum_{k \in I^l_m(N)} g_k \cos 2\pi \langle \alpha, S^l_k \rangle + g'_k \sin 2\pi \langle \alpha, S^l_k \rangle}{\sqrt{N \log [N+1]}} .$$

Notons à présent,

$$\forall (s,t) \in [0,1]^d \times [0,1]^d, \quad d^2_G(s,t) = \mathbb{E}|G(s) - G(t)|^2.$$

En vertu de l'hypothèse de stationnarité de G, nous en déduisons que :

$$d_G(s,t) \leq \sqrt{d} \sqrt{\sum_{j=1}^d d^{(j)^2}_G (s_j, t_j)},$$

où $d^{(j)}_G(s_j,t_j) = d_G((0,\cdots,0,s_j,0,\cdots,0),(0,\cdots,0,t_j,0,\cdots,0))$.

En fait, pour tout entier $1 \leq j \leq d$, $d^{(j)}_G(s_j,t_j)$ désigne la distance hilbertienne déterminant la fonction aléatoire

$$G^{(j)}(\alpha_j) = \frac{\sum_{k \in I^l_m(N)} g_{k,j} \cos 2\pi \alpha_j S^{l,(j)}_k + g'_{k,j} \sin 2\pi \alpha_j S^{l,(j)}_k}{\sqrt{N \log [N+1]}} ,$$

où pour tout $j = 1, \cdots d$, $g_{k,j}$ et $g'_{k,j}$ sont des copies mutuellement indépendantes de g_k.

Enfin, notons

$$d_{\tilde{G}}(s,t) = \sqrt{d}\sqrt{\sum_{j=1}^{d} {d_G^{(j)}}^2 (s_j, t_j)}.$$

Cette distance détermine entièrement la fonction aléatoire gaussienne suivante :

$$\tilde{G}(\alpha) = \sqrt{d} \cdot \sum_{j=1}^{d} G^{(j)}(\alpha_j) \ .$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$(12) \qquad \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha \in [0,1]^d} G(\alpha) \leq \sqrt{d} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha_j \in [0,1]} G^{(j)}(\alpha_j).$$

L'estimation (12) permet donc de contrôler $G(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]^d$ à partir de ses marges $G^{(j)}(\alpha_j)$, $\alpha_j \in [0,1]$. Nous définissons la mesure spectrale associée à chacune de ces marges :

$$\forall 1 \leq j \leq d, \quad m^{(j)} = \frac{1}{N \log[N+1]} \sum_{k \in I_m^l(N)} \delta_{|S_k^{l,(j)}|},$$

où δ_{u_j} désigne la mesure de Dirac au point $u_j \in \mathbb{R}^+$.

Ainsi, la majoration (11) sera réalisé dès lors que les deux familles de conditions suivantes seront vérifiées (*cf.* [1], ou *voir* proposition. 1.7 dans [11]) :

$$(13.a) \quad \begin{cases} \forall 1 \leq j \leq d, \\ \mathbb{E} \sup_{N \geq 1} \left[\frac{1}{N \log[N+1]} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k \in I_m^l(N)} \min\left[(S_k^{l,(j)})^2, 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{cases}$$

$$(13.b) \quad \begin{cases} \forall 1 \leq j \leq d, \\ \mathbb{E} \sup_{N \geq 1} \left[\frac{1}{N \log[N+1]} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \quad \times \int_0^\infty \left\{ \sum_{k \in I_m^l(N)} \mathbf{1}_{\{|S_k^{l,(j)}| > \exp x^2\}} \right\}^{\frac{1}{2}} dx < \infty. \end{cases}$$

La condition (13.*a*) est trivialement satisfaite.

En remarquant que

$$\forall k \in I_m^l \qquad \mathbf{1}_{\{|S_k^{l,(j)}|>\exp y^2\}} \leq \mathbf{1}_{\{\sup_{\substack{i\leq k \\ i\in I_m^l}} |S_i^{l,(j)}|>\exp y^2\}},$$

nous pouvons majorer le membre de gauche de (13.b) par l'expression :

$$\mathbb{E} \sup_{N\geq 1} \left[\frac{1}{N\log[N+1]}\right]^{\frac{1}{2}} M(N, (S_k^{l,(j)})_{k\in I_m^l}),$$

où $M = M(N, (S_k^{(j)})_{k\in I_m^l})$ est tel que

$$M \leq \sqrt{\log^+(\sup_{k\in I_m^l(N)} |S_k^{l,(j)}|)} \cdot \sqrt{N}. \tag{14}$$

Par conséquent, le membre de gauche de (13.b) est majoré par

$$\mathbb{E} \sup_{N\geq 1} \sqrt{\frac{\log^+(\sup_{k\in I_m^l(N)} |S_k^{l,(j)}|)}{\log[N+1]}},$$

qui est égal à

$$\mathbb{E} \sup_{N\in I_m^l} \sqrt{\frac{\log^+(|S_N^{l,(j)}|)}{\log[N+1]}}.$$

La suite $\{S_N^{l,(j)},\ N \in I_m^l\}$ étant indépendante et identiquement distribuée, possédant de plus un moment d'ordre $\delta > 0$, il en résulte que l'expression ci-dessus est finie. Par conséquent la condition (13.b) est vérifiée. Ceci démontre donc le théorème 2. ■

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient Xavier Fernique pour ses conseils utiles.

RÉFÉRENCES

[1] X. Fernique, Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires, *Proba. Th. Rel. Fields,* vol. **88**, 1991, p. 521-536.

[2] X. Fernique, Un exemple illustrant l'emploi des méthodes gaussiennes, à paraître dans les actes de la « Conférence en l'honneur de J.P. Kahane », Paris juillet 1993.

[3] X. FERNIQUE, Une majoration des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles, *C. R. Acad. Sci. Paris,* vol. **300**, 1985, p. 315-318.

[4] X. FERNIQUE, Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces Lusinien, *Expositio. Math.*, vol. **8**, 1990, p. 289-364.

[5] C. GAMET, Théorèmes de convergence en moyenne et entropie métrique en théorie ergodique, Thèse de l'Univ. Strasbourg, prépub. I.R.M.A.

[6] U. KRENGEL, Ergodic Theorems, W. de Gruyter, 1985.

[7] L. KUIPERS et H. NIEDERREITTER, Uniform distribution of sequences, Wiley New-York, 1974.

[8] E. LESIGNE, Spectre quasi-discret et théorème ergodique de Wiener-Wintner pour les polynômes, *Ergod. Th. and Dynam. Syst.*, vol. **13**, 1993, p. 767-784.

[9] M. LACEY, K. PETERSEN, D. RUDOLPH et M. WIERDL, Random ergodic theorems with universally representative sequences, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, vol. **30**, n° 3, 1994, p. 353-395.

[10] D. SCHNEIDER, Convergence presque sûre de moyennes ergodiques perturbées, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* Série I, vol. **319**, 1994, p. 1201-1206.

[11] D. SCHNEIDER, Théorème ergodique perturbé, *Israël Journal of Math.*, vol. **96**, 1997.

(Manuscrit reçu le 12 octobre 1995;
révisé le 11 juin 1996.)