ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-MARC DERRIEN
EMMANUEL LESIGNE

Un théorème ergodique polynômial ponctuel pour les endomorphismes exacts et les K-systèmes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, nº 6 (1996), p. 765-778
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_6_765_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 32, n° 6, 1996, p. 765-778 *Probabilités et Statistiques*

Un théorème ergodique polynômial ponctuel pour les endomorphismes exacts et les K-systèmes

par

Jean-Marc DERRIEN et Emmanuel LESIGNE

Université de Tours, Laboratoire de Mathématiques
et Applications. Parc de Grandmont, 37200 Tours.

RÉSUMÉ. – On établit, pour les endomorphismes exacts et les K-systèmes, la convergence presque sûre de certaines moyennes ergodiques du type « récurrence multiple » introduites par H. Furstenberg. Pour des systèmes dynamiques inversibles, on réduit en fait le problème de la convergence presque sûre de ces moyennes au cas des systèmes dynamiques d'entropie nulle.

Mots clés : Théorèmes ergodiques ponctuels, récurrence multiple, inégalité maximale, processus orthogonaux, endomorphismes exacts, K-systèmes.

ABSTRACT. – We establish, for exact endomorphisms and K-systems, the almost everywhere convergence of means of "multiple recurrence" type introduced by H. Furstenberg. For automorphisms, we reduce in fact the problem of the almost everywhere convergence of these means to the case of the dynamical systems with zero entropy.

1. INTRODUCTION

Dans ce qui suit, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace de Lebesgue et T une transformation mesurable de l'espace $(X, \mathcal{A})$ qui préserve la mesure μ. De plus, l'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $p \in [1, +\infty]$, est noté L^p.

On considère également un nombre fini de polynômes $q_1, q_2, \ldots, q_r$ coefficients rationnels. Ces polynômes sont supposés prendre des valeurs entières aux points entiers et, dans le cas où la transformation T considérée ne serait pas inversible, des valeurs positives aux points de $\mathbb{N}$.

Dans [1], V. Bergelson établit, pour un système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ faiblement mélangeant et sous l'hypothèse qu'aucun des polynômes $q_i - q_j$, $1 \leq i < j \leq r$, et q_i, $1 \leq i \leq r$, n'est constant, la convergence suivante :

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{r} T^{q_i(n)} f_i - \prod_{i=1}^{r} \int f_i \mathrm{d}\mu \right\|_2 = 0,$$

pour des fonctions f_i, $1 \leq i \leq r$, dans L^∞.

Ce résultat généralise la propriété de mélange faible à tous les ordres, établie dans [7] et [9], et qui correspond au cas où les polynômes q_i sont de degré 1.

On peut vérifier sans difficulté que le résultat de V. Bergelson s'étend, sous les mêmes hypothèses, à

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{r} T^{q_i(n)} f_i - \prod_{i=1}^{r} \int f_i \mathrm{d}\mu \right\|_p = 0,$$

pour $p \geq 1$ et pour $f_i \in \mathrm{L}^{p_i}$, $1 \leq i \leq r$, o les réels $p_i \geq 1$ vérifient $\sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{p}$.

L'objet de cet article est d'établir, en utilisant une méthode introduite dans [10], la convergence presque sûre des moyennes

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{r} T^{q_i(n)} f_i \tag{1}$$

dans deux cas particuliers de systèmes mélangeants, les endomorphismes exacts et les K-systèmes, et pour la classe de fonctions

$$\mathcal{G} := \left\{ (f_1,\ f_2, \ldots,\ f_r) \,\middle|\, f_i \in \mathrm{L}^{p_i},\ 1 \leq i \leq r \ et\ \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i} < 1 \right\}.$$

Dans la situation où la transformation T est inversible d'inverse mesurable, nous démontrerons en fait le résultat plus général suivant :

« La convergence presque sûre des moyennes (1) pour les fonctions de $\mathcal{G}$ est vérifiée dès qu'elle l'est dans tous les facteurs d'entropie nulle ».

Remarques

• Sans hypothèse de mélange sur le système dynamique, la convergence faible de (1) est connue lorsque $r = 2$, $q_1(n) = n$ et $q_2(n) = n^2$ (annoncé par H. Furstenberg et B. Weiss).

• Sans hypothèse de mélange sur le système dynamique, la convergence en moyenne de (1) n'est connue que si $r = 1$ pour un polynôme q_1 quelconque [7] et que si $r \leq 3$ pour des polynômes q_1, q_2 et q_3 de degré un [5].

• Sans hypothèse de mélange sur le système dynamique, la convergence presque sûre de (1) n'est connue que si $r = 1$ pour un polynôme q_1 quelconque [3] et que si $r \leq 2$ pour des polynômes q_1 et q_2 de degré un [4].

• À l'opposé des hypothèses de mélange, on peut noter que la convergence en moyenne et presque sûre de (1), pour des systèmes dynamiques à spectre discret ou quasi-discret, s'établit sans difficulté en utilisant les inégalités maximales de J. Bourgain [3]. De plus, E. Lesigne a montré dans [11] la convergence presque sûre des moyennes (1) pour les produits gauches abéliens au-dessus de translations ergodiques de groupes compacts et pour un nombre r quelconque de polynmes q_i de degré un.

Le problème général de la convergence de (1), qui est donc encore largement ouvert, présente un double intérêt :

– son lien avec la classification des systèmes dynamiques distaux,

– ses applications potentielles à la théorie combinatoire des nombres (*cf.* [7], [8] et [2]).

Plan de l'article

L'inégalité maximale pour les moyennes ergodiques le long d'une suite $q(n)$ due à J. Bourgain joue évidemment un rôle décisif dans ce travail. Ce résultat et l'un de ses corollaires sont présentés dans le paragraphe 2. Le troisième paragraphe est consacré à la démonstration du résultat principal (théorème 3.1), qui est appliqué, dans le dernier paragraphe, aux endomorphismes exacts et aux K-systèmes.

2. UNE INÉGALITÉ MAXIMALE

J. Bourgain établit, dans [3], l'inégalité maximale suivante :

THÉORÈME 2.1. – *Soit q un polynôme à coefficients rationnels qui prend des valeurs entières aux points entiers et, dans le cas où la transformation T n'est pas inversible, des valeurs positives aux points de $\mathbb{N}$.*

Alors, pour tout réel $p > 1$, *il existe une constante* $c(p, q) > 0$ *telle que,*

pour toute fonction f *dans* L^p, $\left\|\sup_{N>0}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T^{q(n)} f\right|\right\|_p \leq c(p, q)\|f\|_p$.

On en déduit le

COROLLAIRE 2.2. – *Soient* $p_1,\ p_2, \dots,\ p_r$, *des réels positifs qui vérifient* $\frac{1}{p} := \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} < 1$.

Alors, l'ensemble des r*-uplets* $(f_1,\ f_2, \dots,\ f_r)$ *pour lesquels on a la convergence presque sûre des moyennes* (1) *est fermé dans* $\mathrm{L}^{p_1} \times \mathrm{L}^{p_2} \times \cdots \times \mathrm{L}^{p_r}$.

Preuve du corollaire 2.2. – Soit $(f_1,\ f_2, \dots,\ f_r)$ la limite dans $\mathrm{L}^{p_1} \times \mathrm{L}^{p_2} \times \cdots \times \mathrm{L}^{p_r}$ d'une suite $\left(f_1^{(k)},\ f_2^{(k)}, \dots,\ f_r^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ de r-uplets pour lesquels on a la convergence presque sûre des moyennes (1).

Posons

$$R(g_1,\ g_2, \dots,\ g_r,\ x) := \limsup_{N,M\to+\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r} T^{q_i(n)} g_i(x) - \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\prod_{i=1}^{r} T^{q_i(m)} g_i(x)\right|$$

où $x \in X$ et $(g_1,\ g_2, \dots,\ g_r)$ désigne un élément quelconque de $\mathrm{L}^{p_1} \times \mathrm{L}^{p_2} \times \cdots \times \mathrm{L}^{p_r}$.

Pour montrer le corollaire, il suffit d'établir que

$$\|R(f_1,\ f_2, \dots,\ f_r, \cdot)\|p = 0.$$

Or, si $j \in \{1, \dots,\ r\}$, on a

$$R(g_1, \dots,\ g_j + g_j', \dots,\ g_r,\ x) \leq R(g_1, \dots,\ g_j, \dots,\ g_r,\ x) + R(g_1, \dots,\ g_j', \dots,\ g_r,\ x).$$

Ainsi, comme par hypothèse $R\left(f_1^{(k)}, \dots,\ f_{r-1}^{(k)},\ f_r^{(k)},\ x\right) = 0$, il vient

$$\begin{aligned}
&R(f_1, \dots,\ f_{r-1},\ f_r,\ x)\\
&\quad\leq R(f_1, \dots,\ f_{r-1},\ f_r - f_r^{(k)},\ x) + R(f_1, \dots,\ f_{r-1},\ f_r^{(k)},\ x)\\
&\quad\leq R(f_1, \dots,\ f_{r-1},\ f_r - f_r^{(k)},\ x)\\
&\qquad + R(f_1, \dots,\ f_{r-1} - f_{r-1}^{(k)},\ f_r^{(k)},\ x) + R(f_1, \dots,\ f_{r-1}^{(k)},\ f_r^{(k)},\ x)\\
&\quad\leq \cdots \leq \sum_{i=1}^{r} R(f_1, \dots,\ f_{i-1},\ f_i - f_i^{(k)},\ f_{i+1}^{(k)}, \dots,\ f_r^{(k)},\ x),
\end{aligned}$$

pour presque tout x et pour tout entier $k \geq 0$.

De plus, comme chacune des suites $(||f_i^{(k)}||_{p_i})_{k \geq 0}$, $1 \leq i \leq r$, converge dans $\mathbb{R}$, elles sont toutes bornées, et la preuve du corollaire 2.2 se ramène donc à vérifier qu'il existe une constante positive, C, telle que

$$||R(g_1,\ g_2, \ldots,\ g_r, \cdot)||_p \leq C \prod_{i=1}^{r} ||g_i||_{p_i},$$

pour tout r-uplet $(g_1,\ g_2, \ldots,\ g_r)$ dans $\mathrm{L}^{p_1} \times \mathrm{L}^{p_2} \times \cdots \times \mathrm{L}^{p_r}$.

Pour ce faire, introduisons des réels $s_1, s_2, \ldots, s_r > 0$ tels que $p_i > s_i$, $1 \leq i \leq r$, et $\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{s_i} = 1$.

On a alors, grâce aux inégalités de Hölder,

$$\begin{aligned} R(g_1,\ g_2, \ldots,\ g_r,\ x) &\leq 2 \sup_{N>0} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{r} T^{q_i(n)} g_i(x) \right| \\ &\leq 2 \prod_{i=1}^{r} \left(\sup_{N>0} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^{q_i(n)} |g_i|^{s_i}(x) \right) \right)^{\frac{1}{s_i}}. \end{aligned}$$

Ainsi, toujours grâce aux inégalités de Hölder,

$$\begin{aligned} ||R(g_1,\ g_2, \ldots,\ g_r, \cdot)||_p &\leq 2 \left|\left| \prod_{i=1}^{r} \left(\sup_{N>0} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^{q_i(n)} |g_i|^{s_i} \right) \right)^{\frac{1}{s_i}} \right|\right|_p \\ &\leq 2 \prod_{i=1}^{r} \left|\left| \sup_{N>0} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^{q_i(n)} |g_i|^{s_i} \right) \right|\right|_{\frac{p_i}{s_i}}^{\frac{1}{s_i}} \\ &\leq 2 \prod_{i=1}^{r} c\left(\frac{p_i}{s_i},\ q_i \right)^{\frac{1}{s_i}} |||g_i|^{s_i}||_{\frac{p_i}{s_i}}^{\frac{1}{s_i}} \\ &= 2 \prod_{i=1}^{r} c\left(\frac{p_i}{s_i},\ q_i \right)^{\frac{1}{s_i}} ||g_i||_{p_i}, \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.1 et parce que $\frac{p_i}{s_i} > 1$ et $|\ g_i\ |^{s_i} \in \mathrm{L}^{\frac{p_i}{s_i}}$. $\square$

3. CONDITIONNEMENT PAR RAPPORT AUX TRIBUS ASYMPTOTIQUES

Dans ce paragraphe, on considère des éléments $f_1,\ f_2, \ldots,\ f_r$ de L^∞ et l'on suppose qu'aucun des polynômes $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_r$ ou des différences $q_i - q_j$, $i \neq j$, n'est constant.

Par ailleurs, on note $c_d(q)$ le coefficient dominant d'un polynôme q et l'on suppose que les polynômes q_i, $1 \leq i \leq r$, ont été numérotés de manière à ce qu'il existe un élément s de l'ensemble $\{1, \ldots, r\}$ tel que

$c_d(q_1), c_d(q_2), \ldots, c_d(q_s)$ soient positifs,
$c_d(q_{s+1}), c_d(q_{s+2}), \ldots, c_d(q_r)$ soient négatifs
et $c_d(q_i - q_j) > 0$ pour $1 \leq i < j \leq r$.

(On peut, par exemple, envisager:

$$\begin{array}{ll} q_1(n) = 2n^2; & q_4(n) = -n \\ q_2(n) = n^2; & q_5(n) = -n^2 \\ q_3(n) = n; & q_6(n) = -n^2 - n.) \end{array}$$

Remarquons que l'entier s est égal à r chaque fois que la transformation T n'est pas inversible.

On note encore $\mathcal{F}_k$, $k \in \mathbb{N}$, la plus petite tribu rendant mesurable les applications $T^l f_i$, $1 \leq i \leq r$ et $l \geq k$, et $\mathcal{F} := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_k$, la tribu du futur éloigné des fonctions f_i.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. – *Pour presque tout élément x de X, on a*

$$\lim_{N \to +\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{r} T^{q_i(n)} f_i(x) - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{r} T^{q_i(n)} \mathbf{E}[f_i | \mathcal{F}](x) \right| = 0.$$

Preuve. – Réécrivons l'expression, notée A dans la suite, qui intervient dans la valeur absolue ci-dessus, en utilisant la multilinéarité des moyennes relativement au r-uplet $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$:

$$A = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^{q_1(n)} f_1(x) \ldots T^{q_{j-1}(n)} f_{j-1}(x)$$

$$T^{q_j(n)}(f_j - \mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}])(x) T^{q_{j+1}(n)} \mathbf{E}[f_{j+1}|\mathcal{F}](x) \ldots T^{q_r(n)} \mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}](x).$$

Cette égalité assure que, pour montrer le théorème 3.1, il suffit de vérifier que l'on a, pour tout j dans $\{1, \ldots, r\}$ et pour presque tout x:

$$\lim_{N \to +\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^{q_1(n)} f_1(x) \ldots T^{q_j(n)} (f_j - \mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}])(x) \right.$$
$$\left. \ldots T^{q_r(n)} \mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}](x) \right| = 0. \qquad (2)$$

Fixons donc j dans $\{1, \ldots, r\}$.

On distingue ici les cas « deg $q_j = 1$ » et « deg $q_j \geq 2$ », et l'on commence par ce dernier.

Un résultat classique concernant les projections sur des sous-espaces vectoriels fermés emboités d'un espace de Hilbert montre que

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}_k] = \mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}] \quad \text{dans } \mathrm{L}^2.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on en déduit qu'il existe un entier $k_0 \geq 0$ pour lequel

$$||\mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}_{k_0}] - \mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}]||_2 \leq \varepsilon.$$

Ainsi, à l'aide de l'inégalité maximale de J. Bourgain (théorème 2.1), il vient

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\limsup_{N \to +\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^{q_1(n)} f_1 \ldots T^{q_j(n)} (\mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}_{k_0}] \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}]) \ldots T^{q_r(n)} \mathbf{E}[f_r | \mathcal{F}] \right| \right] \\
&\leq ||f_1||_\infty \cdots ||f_{j-1}||_\infty \left|\left| \sup_{N > 0} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^{q_j(n)} |\mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}_{k_0}] - \mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}]| \right) \right|\right|_2 \\
&\qquad \times ||f_{j+1}||_\infty \cdots ||f_r||_\infty \\
&\leq ||f_1||_\infty \cdots ||f_{j-1}||_\infty c(2, q_j) ||\mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}_{k_0}] \\
&\qquad - \mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}]||_2 ||f_{j+1}||_\infty \cdots ||f_r||_\infty \\
&\leq ||f_1||_\infty \cdots ||f_{j-1}||_\infty c(2, q_j) \varepsilon ||f_{j+1}||_\infty \cdots ||f_r||_\infty.
\end{aligned}$$

Pour établir l'égalité (2) dans le cas où deg $q_j \geq 2$, il suffit donc de montrer que, pour presque tout x,

$$\begin{aligned}
\lim_{N \to +\infty} \Bigg| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} & T^{q_1(n)} f_1(x) \ldots T^{q_j(n)} (f_j - \mathbf{E}[f_j | \mathcal{F}_{k_0}])(x) \\
& \ldots T^{q_r(n)} \mathbf{E}[f_r | \mathcal{F}](x) \Bigg| = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière relation s'obtient en appliquant une loi forte des grands nombres pour une suite de variables aléatoires de carrée intégrable, bornée dans L^2, centrée et orthogonale, dont l'énoncé est le suivant.

LEMME 3.2. – *Soit* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Si $(Z_n)_{n\geq 0}$ *est centrée, bornée dans* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et vérifie* $\mathbf{E}[X_n X_m] = 0$ *pour tous entiers naturels* n *et* m *avec* $n \neq m$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_{n-1}}{n} = 0 \quad \textit{presque sûrement.}$$

(Pour une démonstration de ce résultat, *voir* [12] par exemple.)

Vérifions que la suite

$$S := (X_n)_{n>N}$$

où

$$X_n := T^{q_1(n)} f_1 \ldots T^{q_j(n)}(f_j - \mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{k_0}]) \ldots T^{q_r(n)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}]$$

satisfait les hypothèses du lemme 3.2 pour un entier N assez grand.

Puisque les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_r$ sont essentiellement bornées, la suite S est clairement bornée dans L^2.

Les autres hypothèses du lemme résultent de l'affirmation qui suit.

Lorsque l'entier N est choisi suffisamment grand, la suite $(q_j(n))_{n\geq N}$ est monotone et S est centrée relativement à la suite monotone de tribus

$$(\mathcal{T}_n := \mathcal{F}_{q_j(n)+k_0})_{n\geq N}.$$

(*i.e.* Pour $n > N$,

– si $j \leq s$, X_n est $\mathcal{T}_{n-1}$-mesurable (dans ce cas, la suite $(\mathcal{T}_n)_{n>N}$ est décroissante),

– si $j > s$, X_n est $\mathcal{T}_{n+1}$-mesurable (dans ce cas, la suite $(\mathcal{T}_n)_{n>N}$ est croissante),

– $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{T}_n] = 0$.)

Cette affirmation permet en effet de conclure en remarquant que, si n et m sont deux entiers strictement supérieurs à N qui vérifient $n > m$, il vient

- dans le cas où $j \leq s$: $\mathcal{T}_{n-1} \subset \mathcal{T}_m$ donc X_n est $\mathcal{T}_m$-mesurable et

$$\mathbf{E}[X_n X_m] = \mathbf{E}[X_n \mathbf{E}[X_m|\mathcal{T}_m]] = 0,$$

- dans le cas où $j > s$: $\mathcal{T}_{m+1} \subset \mathcal{T}_n$ donc X_m est $\mathcal{T}_n$-mesurable et

$$\mathbf{E}[X_n X_m] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_n|\mathcal{T}_n] X_m] = 0.$$

Vérifions donc que la suite S est centrée relativement à $(\mathcal{T}_n)_{n\geq N}$, pour un entier N choisi suffisamment grand.

Comme $T^{-q_j(n)}\mathcal{F}_{k_0} = \mathcal{T}_n$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[T^{q_j(n)}\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{k_0}]|\mathcal{T}_n] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[T^{q_j(n)}f_j|T^{-q_j(n)}\mathcal{F}_{k_0}]|\mathcal{T}_n] \\ &= \mathbf{E}[T^{q_j(n)}f_j|\mathcal{T}_n].\end{aligned}$$

Il suffit donc de s'assurer que, pour n assez grand,

1. les fonctions

$$T^{q_1(n)}f_1, \dots, T^{q_{j-1}(n)}f_{j-1}, T^{q_{j+1}(n)}\mathbf{E}[f_{j+1}|\mathcal{F}], \dots, T^{q_r(n)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}]$$

sont $\mathcal{T}_n$-mesurables,

2. si $j \leq s$, la fonction $T^{q_j(n)}(f_j - \mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{k_0}])$ est $\mathcal{T}_{n-1}$-mesurable,

3. si $j > s$, la fonction $T^{q_j(n)}(f_j - \mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{k_0}])$ est $\mathcal{T}_{n+1}$-mesurable.

Montrons, tout d'abord, 1.

• Si $i > j$, $T^{q_i(n)}\mathbf{E}[f_i|\mathcal{F}] = \mathbf{E}[T^{q_i(n)}f_i|T^{-q_i(n)}\mathcal{F}] = \mathbf{E}[T^{q_i(n)}f_i|\mathcal{F}]$ est $\mathcal{F}$-mesurable, donc $\mathcal{T}_n$-mesurable.

• Si $i < j$, comme le polynôme $q_i - q_j$ n'est pas constant et a un coefficient dominant positif, il vient, pour n assez grand,

$$q_j(n) + k_0 \leq q_i(n)$$

et donc $T^{q_i(n)}f_i$ est $\mathcal{F}_{q_j(n)+k_0} = \mathcal{T}_n$-mesurable.

Pour montrer 2. et 3., on remarque que les polynômes $q_j(n+1) - q_j(n)$ et $q_j(n)$ ont des coefficients dominants de mêmes signes et que la suite $q_j(n+1) - q_j(n)$ n'est pas constante sous l'hypothèse « deg $q_j \geq 2$ ».

Ainsi, pour n assez grand,

$$q_j(n) \geq q_j(n-1) + k_0\ , \quad \text{si } j \leq s\ ,$$

et

$$q_j(n) \geq q_j(n+1) + k_0\ , \quad \text{si } j > s.$$

Lorsque $j \leq s$ (resp. $j > s$), $T^{q_j(n)}(f_j - \mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{k_0}])$ est donc $\mathcal{T}_{n-1}$-mesurable (resp. $\mathcal{T}_{n+1}$-mesurable).

Le cas « deg $q_j = 1$ » est similaire. La difficulté réside dans le fait que la suite $q_j(n+1) - q_j(n)$ est constante.

Supposons donc deg $q_j = 1$ et montrons que, pour presque tout x, l'égalité (2) est satisfaite.

Comme les fonctions envisagées sont essentiellement bornées, il vient, pour tout $k \geq 1$:

$$\limsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^{q_1(nk+i)}f_1(x)\ldots\right.$$
$$\left.T^{q_j(nk+i)}(f_j-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}])(x)\ldots T^{q_r(nk+i)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}](x)\right|$$
$$=\limsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^{q_1(n)}f_1(x)\ldots\right.$$
$$\left.T^{q_j(n)}(f_j-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}])(x)\ldots T^{q_r(n)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}](x)\right|.$$

Il suffit donc, en fait, de vérifier que l'on peut déterminer une constante positive C telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $k_0 \geq 0$ qui vérifie

$$\mathbf{E}\left[\limsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{k_0}\sum_{i=0}^{k_0-1}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^{q_1(nk_0+i)}f_1\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.T^{q_j(nk_0+i)}(f_j-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}])\ldots T^{q_r(nk_0+i)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}]\right|\right]\leq C\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

On sait qu'il existe $k_0 \geq 0$ tel que $||\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{|c_d(q_j)|k_0}] - \mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}]||_2 \leq \varepsilon$.

Posons alors, pour $n \geq 0$,

$$X'_n := T^{q_1(nk_0+i)}f_1\ldots T^{q_{j-1}(nk_0+i)}f_{j-1}$$
$$T^{q_j(nk_0+i)}(f_j-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{|c_d(q_j)|k_0}])$$
$$T^{q_{j+1}(nk_0+i)}\mathbf{E}[f_{j+1}|\mathcal{F}]\ldots T^{q_r(nk_0+i)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}]$$

et $\mathcal{T}'_n := \mathcal{F}_{q_j(nk_0+i)}$.

Par des raisonnements analogues à ceux effectués dans le cas « deg $q_j \geq 2$ », on vérifie que, pour n assez grand, X'_n est $\mathcal{T}'_n$-mesurable et

$$\mathbf{E}[X'_n|\mathcal{T}'_{n+1}] = 0 \quad \text{si } j \leq s,$$
$$\mathbf{E}[X'_n|\mathcal{T}'_{n-1}] = 0 \quad \text{si } j > s.$$

D'où l'on déduit qu'il existe un entier N pour lequel la suite $(X'_n)_{n>N}$ est bornée dans L^2, centrée et orthogonale. On peut donc lui appliquer la loi forte des grands nombres énoncée au lemme 3.2.

Ainsi, pour presque tout x,

$$\limsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{k_0}\sum_{i=0}^{k_0-1}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^{q_1(nk_0+i)}f_1(x)\dots\right.$$
$$\left.T^{q_j(nk_0+i)}(f_j-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}])(x)\dots T^{q_r(nk_0+i)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}](x)\right|$$
$$\leq\frac{1}{k_0}\sum_{i=0}^{k_0-1}\limsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^{q_1(nk_0+i)}f_1(x)\dots\right.$$
$$\left.T^{q_j(nk_0+i)}(f_j-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}])(x)\dots T^{q_r(nk_0+i)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}](x)\right|$$
$$=\frac{1}{k_0}\sum_{i=0}^{k_0-1}\limsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^{q_1(nk_0+i)}f_1(x)\dots\right.$$
$$\left.T^{q_j(nk_0+i)}(\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{|c_d(q_j)|k_0}]-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}])(x)\dots T^{q_r(nk_0+i)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}](x)\right|$$
$$\leq||f_1||_\infty\dots||f_{j-1}||_\infty$$
$$\times\left(\frac{1}{k_0}\sum_{i=0}^{k_0-1}\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^{q_j(nk_0+i)}|\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{|c_d(q_j)|k_0}]-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}]|(x)\right)$$
$$\times||f_{j+1}||_\infty\dots||f_r||_\infty.$$

Soit, en passant à l'espérance et en utilisant le théorème ergodique de G. D. Birkhoff :

$$\mathbf{E}\left[\limsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{k_0}\sum_{i=0}^{k_0-1}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^{q_1(nk_0+i)}f_1\right.\right.$$
$$\left.\left.\dots T^{q_j(nk_0+i)}(f_j-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}])\dots T^{q_r(nk_0+i)}\mathbf{E}[f_r|\mathcal{F}]\right|\right]$$
$$\leq||f_1||_\infty\dots||f_{j-1}||_\infty$$
$$\times\left(\frac{1}{k_0}\sum_{i=0}^{k_0-1}\left|\left|\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^{q_j(nk_0+i)}|\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{|c_d(q_j)|k_0}]-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}]|\right|\right|_2\right)$$
$$\times||f_{j+1}||_\infty\dots||f_r||_\infty$$
$$\leq||f_1||_\infty\dots||f_{j-1}||_\infty$$
$$\times\left(\frac{1}{k_0}\sum_{i=0}^{k_0-1}||\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}_{|c_d(q_j)|k_0}]-\mathbf{E}[f_j|\mathcal{F}]||_2\right)||f_{j+1}||_\infty\dots||f_r||_\infty$$
$$\leq||f_1||_\infty\dots||f_{j-1}||_\infty\varepsilon||f_{j+1}||_\infty\dots||f_r||_\infty\ ;$$

ce qui permet de conclure. □

4. RÉDUCTION DU PROBLÈME AUX SYSTÈMES DONT LA TRIBU ASYMPTOTIQUE EST TRIVIALE. APPLICATION AUX K-SYSTÈMES ET AUX ENDOMORPHISMES EXACTS

Dans la suite, on note, $\mathcal{Q}$, la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par les queues de partitions finies:

$$\mathcal{Q} := \bigvee_{\alpha,\ \text{partition finie de } X} \left(\bigwedge_{n\geq 0} \bigvee_{k\geq n} T^{-k}\alpha \right).$$

Rappelons, bien que cela ne soit pas utilisé dans la suite, que la tribu de Pinsker du système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est toujours contenue dans la tribu $\mathcal{Q}$ et qu'elle coïncide avec cette dernière lorsque la transformation T est inversible (voir [6]).

On déduit des résultats obtenus aux pararagraphes 2 et 3 le

THÉORÈME 4.1. – *Soient* $p_1, p_2, \ldots, p_r$, *des réels positifs qui vérifient* $\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i} < 1$.

Si les moyennes

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{r} T^{q_i(n)} f_i \tag{1}$$

convergent presque sûrement

pour tout $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ *dans* $\mathrm{L}^{p_1}(X, \mathcal{Q}, \mu) \times \mathrm{L}^{p_2}(X, \mathcal{Q}, \mu) \times \cdots \times \mathrm{L}^{p_r}(X, \mathcal{Q}, \mu)$, *elles convergent encore presque sûrement*

pour tout $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ *dans* $\mathrm{L}^{p_1}(X, \mathcal{A}, \mu) \times \mathrm{L}^{p_2}(X, \mathcal{A}, \mu) \times \cdots \times \mathrm{L}^{p_r}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Preuve. – Étant donné le corollaire 2.2 et grâce à la multilinéarité des expressions de moyennes considérées, il suffit de vérifier la convergence pour les indicatrices d'éléments de $\mathcal{A}$.

Remarquons que, quitte à éliminer les polynômes constants et à faire des regroupements entre les polynômes q_i dont la différence est constante, on peut supposer, pour démontrer cette convergence, que les polynômes q_i et $q_i - q_j$, $i \neq j$, ne sont pas constants ; ce que l'on fera dans la suite.

Soient A_1, $A_2, \ldots$, A_r, des parties mesurables de X.

La tribu $\mathcal{F}$ du futur éloigné de ces indicatrices coïncide avec la tribu de queue de la partition finie $\bigvee_{i=1}^{r} \{A_i,\ A_i^c\}$. Elle est donc contenue dans la tribu $\mathcal{Q}$.

Ainsi, par hypothèse, les moyennes

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r}T^{q_i(n)}\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_i}|\mathcal{F}] \tag{2}$$

convergent presque sûrement vers une limite que l'on note F.

On a alors :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r}T^{q_i(n)}\mathbf{1}_{A_i}(x) - F(x)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r}T^{q_i(n)}\mathbf{1}_{A_i}(x) - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r}T^{q_i(n)}\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_i}|\mathcal{F}](x)\right| \qquad (3)\\
&\quad + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r}T^{q_i(n)}\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_i}|\mathcal{F}](x) - F(x)\right|. \qquad (4)
\end{aligned}$$

La convergence vers 0, pour presque tout x,

de (3) est assurée par le théorème 3.1,

de (4) est assurée par définition de F;

ce qui permet de conclure.

Remarque. – Dans la situation où la transformation T est inversible, le théorème 4.1 réduit le problème de la convergence des moyennes (1) au cas des systèmes dynamiques mesurés d'entropie nulle.

Lorsque le système dynamique considéré est un endomorphisme exact ou un K-système, la tribu $\mathcal{Q}$ devient triviale et l'on déduit du théorème précédent le

THÉORÈME 4.2. – *Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$, des réels positifs qui vérifient $\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i} < 1$.*

Si le système dynamique mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est un endomorphisme exact ou un K-système alors les moyennes (1) convergent presque sûrement dès que le r-uplet $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ appartient à l'espace

$$\mathrm{L}^{p_1}(X,\mathcal{A},\mu)\times\mathrm{L}^{p_2}(X,\mathcal{A},\mu)\times\cdots\times\mathrm{L}^{p_r}(X,\mathcal{A},\mu).$$

Remarque. – Lorsque les polynômes q_i et les différences $q_i - q_j$, ne sont pas constantes, l'expression de la limite des moyennes (1) est donnée par le résultat de V. Bergelson : c'est le produit des intégrales des fonctions f_i.

Enfin, on peut remarquer que, dans le cas où les polynômes q_1, q_2,..., q_r sont tous de degré 1, la méthode détaillée ci-dessus ne nécessite pas l'utilisation de l'inégalité maximale de J. Bourgain, mais seulement le théorème ergodique de G. D. Birkhoff. On obtient donc en particulier les énoncés suivants :

THÉORÈME 4.3. – *Lorsque* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *est un endomorphisme exact, on a, pour presque tout* x,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{r} T^{in} f_i(x) = \prod_{i=1}^{r} \int f_i \mathrm{d}\mu,$$

dès que les fonctions $f_1, \ldots, f_r$ *appartiennent respectivement aux espaces* $\mathrm{L}^{p_1}, \ldots, \mathrm{L}^{p_r}$ *avec* $\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i} \leq 1$.

THÉORÈME 4.4. – *Lorsque* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *est un K-système, on a, pour presque tout* x,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=-r}^{r} T^{in} f_i(x) = \prod_{i=-1}^{r} \int f_i \mathrm{d}\mu,$$

dès que les fonctions $f_{-r}, \ldots, f_r$ *appartiennent respectivement aux espaces* $\mathrm{L}^{p_{-r}}, \ldots, \mathrm{L}^{p_r}$ *avec* $\sum_{i=-r}^{r} \frac{1}{p_i} \leq 1$.

RÉFÉRENCES

[1] V. BERGELSON, Weakly mixing PET, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. **7**, 1987, p. 337-349.

[2] V. BERGELSON et A. LEIBMAN, Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems (à paraître).

[3] J. BOURGAIN, Pointwise ergodic theorems on arithmetic sets, *Publ. Math. IHES*, 1989.

[4] J. BOURGAIN. Double recurrence and almost sure convergence, *J. Reine Angew. Math.*, vol. **404**, 1990, p. 140-161.

[5] J.-P. CONZE et E. LESIGNE, Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 306, série I, 1988, p. 491-493.

[6] I. P. CORNFELD, S.V. Fomin et Ya.G. Sinai, Ergodic Theory, Springer Verlag, 1980.

[7] H. FURSTENBERG, Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory, Princeton Univ. Press, 1981.

[8] H. FURSTENBERG, Non conventional ergodic averages, *Proc. of Symp. in Pure Math., AMS*, vol. **50**, 1990, p. 43-56.

[9] H. FURSTENBERG, Y. KATZNELSON et D. ORNSTEIN, The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem, *Bull. AMS*, vol. **7**, 1982, p. 527-552.

[10] E. LESIGNE, Sur la convergence ponctuelle de certaines moyennes ergodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 298, série I, 1984, p. 425-428.

[11] E. LESIGNE, Équations fonctionnelles, couplages de produits gauches et théorèmes ergodiques pour des mesures diagonales, *Bull. Soc. Math. France*, vol. **121**, 1993, p. 315-351.

[12] M. LOÈVE, Probability Theory, Van Nostrand, Third Edition, Princeton, 1963.

(Manuscrit reçu le 17 janvier 1995.)