ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

S. HAMADENE

Équations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement lipschitzien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, nº 5 (1996), p. 645-659
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_5_645_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 32, n° 5, 1996, p. 645-659 *Probabilités et Statistiques*

Équations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement lipschitzien

par

S. HAMADENE

Université du Maine, Département de Mathématiques,
avenue Olivier-Messian, BP n° 535, 72017 Le Mans Cedex.

RÉSUMÉ. – Nous montrons l'existence de solution aux équations différentielles stochastiques rétrogrades unidimensionnelles dont la dérive est localement lipschitzienne.

Mots clés : Équation rétrograde; théorème de comparaison.

ABSTRACT. – We show the existence of a solution to one dimensional backward stochastic differential equations with locally Lipschitz drift.

Key words: Stochastic backward equation; comparaison theorem

0. INTRODUCTION

La notion d'équation différentielle stochastique rétrograde a été introduite par Pardoux-Peng dans [6]. Il s'agit de trouver un processus adapté $(Y., Z.)$ tel que,

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(s, \omega, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad t \in [0, T] \quad (T \in]0, \infty[).$$

où $B.$ est un mouvement brownien sur un espace de probabilité (Ω, F, P) et ζ une variable aléatoire F_T^0-mesurable; $(F_t^0)_{t \leq T}$ est la filtration naturelle de B.

Ce type d'équations est rencontré en contrôle optimal stochastique des diffusions [4], dans les jeux différentiels stochastiques de somme nulle ([3], [4]) ou alors en mathématiques financières [1].

Sous des hypothèses lipschitziennes en (y, z) uniformément en (t, ω) de la dérive f, Pardoux-Peng montrent l'existence et l'unicité de la solution de cette équation [6].

Récemment encore ces deux auteurs considèrent dans [7] le problème de l'existence de solutions des équations rétrogrades dont la dérive f n'est pas globalement lipschitzienne. Ils obtiennent un résultat d'existence et d'unicité moyennant des hypothèses de régularité relativement assez forte sur f et ζ.

Dans ce papier nous montrons en toute généralité que si ζ est bornée, f est localement lipschitzienne en (y, z) et vérifiant une condition de croissance raisonnable (plus faible que linéaire) alors l'équation rétrograde associée à (f, ζ) admet une solution.

L'idée étant d'approximer f par une suite double $(\varphi^{n,m}, n, m \geq 0)$ d'applications lipschitziennes et de montrer que la limite (en un certain sens) de la suite $(Y^{n,m}_., Z^{n,m}_.)$ de solutions associées à $(\varphi^{n,m}, \zeta)$ est la solution de l'équation associée à (f, ζ).

Par ailleurs nous montrons que si f et f'_y sont de croissances faibles alors la solution est unique.

Ce papier est composé de deux parties.

La première est consacrée aux rappels nécessaires sur les résultats existants sur les équations rétrogrades.

Dans la deuxième, nous montrons dans un premier temps l'existence de solutions aux équations rétrogrades dont la dérive est localement lipschitzienne. Dans un second temps, nous étudions la question de l'unicité de la solution. Nous terminons enfin par une remarque sur l'extension du principal résultat obtenu aux cas où la dérive n'est pas localement lipschitzienne.

1. RAPPELS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES RÉTROGRADES AVEC DÉRIVE LIPSCHITZIENNE

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, $B_. = (B_t, t \leq T)$ un P-mouvement brownien p-dimensionnel, $(F_t^0)_{t \leq T})$ la filtration naturelle de $B_.$ et $\mathbb{P}$ la tribu des processus F_T^0-progressivement mesurables sur $\Omega \times [0, T]$.

Considérons ξ un élément de $L^2(\Omega, F_T^0, P)$, ensemble des variables aléatoires F_T^0-mesurables à valeurs dans R et de carré intégrable, et f une application de $[0, T] \times \Omega \times R \times R^p$ à valeurs dans R, $\mathbb{P} \otimes B(R^{p+1})$-mesurable ($B(R^{p+1})$ est la tribu borélienne sur R^{p+1}).

1.a DÉFINITION. – *On dira qu'un couple de processus* $(Y_., Z_.)$ $\mathbb{P}$*-mesurable et à valeurs dans* $R \times R^p$ *est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde de dérive* f *et de valeur terminale* ξ *si :*

$$\text{(i)} \qquad E\left[\int_0^T (|Y_s|^2 + |Z_s|^2)\, ds\right] < \infty$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)\, dt + Z_t\, dB_t, & t \in [0, T]. \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Le couple (f, ξ) *est appelé générateur de l'équation* □

Le théorème suivant, de Pardoux-Peng [6], établit l'existence et l'unicité de la solution de l'équation rétrograde associée à (f, ξ) si f est lipschitzienne en (y, z), uniformément en (t, ω).

1.b THÉORÈME [6]. – *Supposons que* f *vérifie les points* (i) *et* (ii) *suivants :*

$$\text{(i)} \qquad E\left[\int_0^T |f(s, \omega, 0, 0)|^2\, ds\right] < \infty$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall t, \omega, y, y', z \text{ et } z',$$

$$|f(t, \omega, y, z) - f(t, \omega, y', z')| \leq c(|y - y'| + |z - z'|);$$

c est une constante indépendante de t, ω, y, y', z et z'.

Alors il existe une solution unique à l'équation différentielle stochastique rétrograde de générateur (f, ξ) □

Comme pour les équations différentielles stochastiques ordinaires ([5], Prop. 2.18, p. 293), il est possible de comparer les solutions des équations rétrogrades à partir de la comparaison de leur générateur. Plus précisément on a :

1.c THÉORÈME [1], [7]. – *Soit* $(Y_.^1, Z_.^1)$ *et* $(Y_.^2, Z_.^2)$ *deux solutions d'équations rétrogrades dont les générateurs associés sont respectivement* (f^1, ξ^1) *et* (f^2, ξ^2)*. Supposons que :*

$$\text{(i)} \qquad \xi^1 \leq \xi^2 \ \ P\text{-}ps.$$

(ii)
$$\forall t \in [0, T],$$
$$f^1(t, Y_t^1, Z_t^1) - f^2(t, Y_t^1, Z_t^1) \leq 0$$
$$(resp.\, f^1(t, Y_t^2, Z_t^2) - f^2(t, Y_t^2, Z_t^2) \leq 0)\ P\text{-}ps.$$

(iii) *f^2 (resp. f^1) est lipschitzienne en (y, z) uniformément en (t, ω). Alors $Y_.^1 \leq Y_.^2$ P-ps* □

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES RÉTROGRADES AVEC DÉRIVE LOCALEMENT LIPSCHITZIENNE

Dans cet article nous allons étudier les équations rétrogrades de dérive f ne vérifiant la condition (ii) du théorème 1.b que localement et non globalement.

Considérons ζ une variable aléatoire bornée et F_T^0-mesurable, f une application de $[0, T] \times \Omega \times R \times R^p$ dans R, $\mathbb{P} \otimes B(R^{p+1})$-mesurable satisfaisant à :

(H1) $\exists c > 0$, $\alpha \in]0, 2[$ et h une application de R dans R^+ finie sur les compacts tels que pour tout t, ω, y, et z on ait, $|f(t, \omega, y, z)| \leq c(1 + |y| + h(y).|z|^\alpha)$.

(H2) $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N > 0$ tel que $\forall (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, (y, z) et $(y', z') \in [-N, N]^{p+1}$ on ait,

$$|f(t, \omega, y, z) - f(t, \omega, y', z')| \leq C_N(|y - y'| + |z - z'|).$$

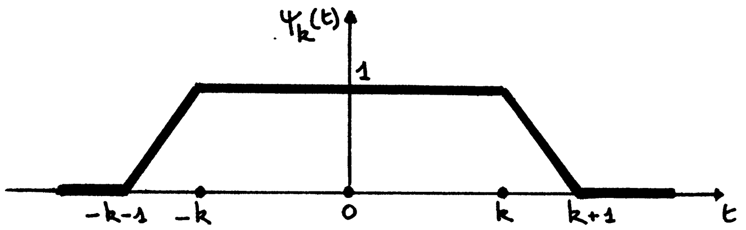
Nous allons montrer que l'équation rétrograde de générateur (f, ζ) admet une solution. L'idée consiste à construire une suite convergente de solutions d'équations rétrogrades dont la limite $(Y., Z.)$ est solution de l'équation de générateur (f, ζ). Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant :

2.a LEMME. – *Soit ψ une application de $[0, T] \times \Omega \times R \times R^p$ dans R^+ (resp. R^-) $\mathbb{P} \otimes B(R^{p+1})$-mesurable vérifiant la condition H2) ci-dessus.*

Il existe une suite croissante (resp. décroissante) $(\psi_k, k \geq 0)$ d'applications définies sur $[0, T] \times \Omega \times R \times R^p$ dans R^+ (resp. R^-) $\mathbb{P} \otimes B(R^{p+1})$-mesurables, de limite ψ vérifiant :

$\forall k \geq 0$ $\exists \bar{c}_k > 0$ tel que $\forall t, \omega, y, y', z$ et z'

$$|\psi_k(t, \omega, y, z) - \psi_k(t, \omega, y', z')| \leq \bar{c}_k(|y - y'| + |z - z'|).$$



Preuve. – Supposons que ψ est à valeur dans R^+. Nous ferons la preuve pour $p = 1$ et si $p \geq 2$ le principe en est le même. Soit $k \geq 0$ et w_k l'application lipschitzienne réelle dont le graphe est ci-dessus.

Soit ψ_k, $k \geq 0$, l'application qui à $(t, \omega, y, z) \in [0, T] \times \Omega \times R \times R$ associe $\psi(t, \omega, y, z) w_k(y) w_k(z)$. La suite $(\psi_k)_{k \geq 0}$ est croissante car $w_k \leq w_{k+1}$, $\forall\, k \geq 0$ et de limite ψ. Par ailleurs ψ_k, $k \geq 0$, est lipschitzienne car elle est localement lipschitzienne à support compact.

Si ψ est à valeurs dans R^- alors $-\psi$ est à valeurs dans R^+ et le résultat découle de ce qui vient d'être prouvé précédemment □

2.b *Remarque.* – Pour tout $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ fixé, la convergence de la suite $(\psi_k(t, \omega, ., .))_{k \geq 0}$ vers $\psi(t, \omega, ., .)$ est uniforme sur les compacts de $R \times R^p$ □

Nous allons maintenant montrer que l'équation rétrograde de générateur (f, ζ) admet une solution.

2.c THÉORÈME. – *Il existe un processus $(Y_., Z_.)$ $\mathbb{P}$-mesurable à valeurs dans $R \times R^p$ tel que :*

(i)
$$E\left[\int_0^T (|Y_s|^2 + |Z_s|^2)\, ds\right] < \infty.$$

(ii)
$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)\, dt + Z_t\, dB_t; & t \leq T. \\ Y_T = \zeta. \end{cases}$$

De plus, $\|Y_.\|^* = \operatorname{supp}\{|Y_t(\omega)|,\ (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega\} < \infty$.

Preuve. – Les applications $f 1_{[f \geq 0]}$ et $f 1_{[f < 0]}$ satisfont la condition H2) ci-dessus vérifiée par f. Par suite il existe une suite $(\varphi^n,\ n \geq 0)$ (resp. $(\psi^n,\ n \geq 0)$) croissante (resp. décroissante) d'applications lipschitziennes de limite simple $f 1_{[f \geq 0]}$ (resp. $f 1_{[f < 0]}$).

Considérons alors pour $m \geq 0$ et $n \geq 0$ la suite d'applications $\varphi^{n,m}$ telle que $\varphi^{n,m} = \varphi^n + \psi^n$.

Aussi, pour tout m et n, $\varphi^{n,m}$ est lipschitzienne, $\varphi^{n+1,m} \geq \varphi^{n,m}$ et $\varphi^{n,m} \geq \varphi^{n,m+1}$. De plus, $|\varphi^{n,m}(t, \omega, y, z)| \leq c(1 + |y| + h(y) \cdot |z|^\alpha)$ pour tout t, ω, y et z. Il s'ensuit que le couple $(\varphi^{n,m}, \zeta)$ possède les propriétés de (f, ξ) du théorème 1.b. Par conséquent il existe un couple de processus $(Y^{n,m}_., Z^{n,m}_.)$ $\mathbb{P}$-mesurable tel que,

(i) $$E\left[\int_0^T (|Y_s^{n,m}|^2 + |Z_s^{n,m}|^2)\, ds\right] < \infty.$$

(ii) $$\begin{cases} dY_t^{n,m} = -\varphi^{n,m}(t, Y_t^{n,m}, Z_t^{n,m})\, dt + Z_t^{n,m}\, dB_t; & t \leq T. \\ Y_T^{n,m} = \zeta. \end{cases}$$

Le théorème de comparaison (Th. 1.c) et les inégalités ci-dessus vérifiées par $\varphi^{n,m}$ nous permettent de déduire que $Y^{n+1,m}_. \geq Y^{n,m}_.$ et $Y^{n,m}_. \geq Y^{n,m+1}_.$.

Montrons que pour tout n et $m \in \mathbb{N}$, $||Y^{n,m}_.||^* \leq C_Y$ et $E\left[\int_0^T |Z_s^{n,m}|^2 ds\right] \leq C_Z$ où C_Y et C_Z sont des constantes indépendantes de n et m.

$\forall t \in [0, T]$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ et $\forall s \in [t, T]$ on a,

$$\begin{aligned} Y_s^{n,m} &= \zeta + \int_s^T \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})du - \int_s^T Z_u^{n,m} dB_u \\ &= \zeta + \int_s^T \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, 0)du + \int_s^T (\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}) \\ &\qquad - \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, 0))du - \int_s^T Z_u^{n,m} dB_u. \end{aligned}$$

Soit alors $\delta\varphi^{n,m}$ la suite de processus définis comme suit :

$$\delta\varphi^{n,m}(u, y, z) = \begin{cases} \dfrac{(\varphi^{n,m}(u, y, z) - \varphi^{n,m}(u, y, 0))}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Il existe une constante $C_{n,m}$ telle que $|\delta\varphi^{n,m}(u, y, z)| \leq C_{n,m}$, $\forall (u, \omega, y, z)$. Considérons alors $P^{n,m}$ la probabilité sur (Ω, F) équivalente à P ([5], lemme 5.3 p. 193) définie comme suit :

$$\begin{aligned} dP^{n,m}/dP = L_T^{n,m} = \exp\left\{ \int_0^T \delta\varphi^{n,m}(u, Y_y^{n,m}, Z_u^{n,m})dB_u \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\int_0^T |\delta\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})|^2 du \right\}. \end{aligned}$$

Le processus $B^{n,m}_\cdot = B_\cdot - \int_0^\cdot \delta\varphi^{n,m}(u,\, Y^{n,m}_u,\, Z^{n,m}_u)du$ est un $(F^0_t,\, P^{n,m})$-mouvement brownien et pour tout $s \in [0,\, T]$ on a,

$$Y^{n,m}_s = \zeta + \int_s^T \varphi^{n,m}(u,\, Y^{n,m}_u,\, 0)du - \int_s^T Z^{n,m}_u dB^{n,m}_u.$$

Si $E_{n,m}$ désigne l'espérance sous $P^{n,m}$ alors,

$$\begin{aligned} E_{n,m}\left[\left(\int_0^T |Z^{n,m}_s|^2 ds\right)^{1/2}\right] &= E\left[L^{n,m}_T\left(\int_0^T |Z^{n,m}_u|^2 du\right)^{1/2}\right] \\ &\leq \left(E[(L^{n,m}_T)^2]\cdot E\left[\int_0^T |Z^{n,m}_u|^2 du\right]\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or le second membre de cette dernière inégalité est fini car $Z^{n,m}_\cdot$ est un élément de $L^2([0,\, T] \times \Omega,\ dt \otimes dP)$ et $L^{n,m}_T$ est de carré intégrable puisque $\delta\varphi^{n,m}$ est uniformément borné en $(t,\, \omega)$. Il s'ensuit que le processus $\int_0^\cdot Z^{n,m}_u dB^{n,m}_u$ est une $(F^0_t,\, P^{n,m})$-martingale car $E_{n,m}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t Z^{n,m}_u dB^{n,m}_u\right|\right] < \infty$ ([5], Th. 2.28 p. 166). Par conséquent pour tout $s \in [0,\, T]$,

$$Y^{n,m}_s = E_{n,m}[Y^{n,m}_s|F^0_s] = E_{n,m}[\zeta|F^0_s] + \int_s^T E_{n,m}[\varphi^{n,m}(u,\, Y^{n,m}_u,\, 0)|F^0_s]du.$$

Comme ζ est bornée alors,

$$|Y^{n,m}_s| \leq \tilde{c} + \int_s^T E_{n,m}[|\varphi^{n,m}(u,\, Y^{n,m}_u,\, 0)||F^0_s]du; \qquad s \in [0,\, T].$$

Par ailleurs pour tout n, m appartenant à $\mathbb{N}$ et pour tout t, ω, y et z on a, $|\varphi^{n,m}(t,\, \omega,\, y,\, z)| \leq c(1 + |y| + h(y)|z|^\alpha)$. Il s'ensuit que,

$$|Y^{n,m}_s| \leq c'\left(1 + \int_s^T E_{n,m}[|Y^{n,m}_u||F^0_s]du\right); \qquad s \in [0,\, T]$$

et c' est une constante indépendante de n, m.

Aussi, si t et s appartenant à $[0,\, T]$ tels que $s \geq t$ alors,

$$E_{n,m}[|Y^{n,m}_s||F^0_t] \leq \tilde{c}\left(1 + \int_s^T E_{n,m}[|Y^{n,m}_u||F^0_t]du\right).$$

Grâce à l'inégalité de Gronwall on a $E_{n,m}[|Y^{n,m}_s|F^0_t] \leq c' \exp\{c'(T-s)\}$, et en prenant $s = t$ on obtient $|Y^{n,m}_t| \leq c' \exp\{c'T\}$, $\forall\, t \in [0,\, T]$.

Ceci pour la première majoration. Montrons la deuxième.

Pour tout n, $m \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, T]$ on a, grâce à la formule de Itô appliquée de s à T,

$$(Y_s^{n,m})^2 + \int_s^T |Z_u^{n,m}|^2 du = \zeta^2 + 2\int_s^T Y_u^{n,m} \cdot \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}) du$$
$$- 2\int_s^T Y_u^{n,m} \cdot Z_u^{n,m} dB_u.$$

En prenant l'espérance dans chaque membre on obtient,

$$E\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2 du\right] \leq E[\zeta^2] + 2\int_0^T E[| Y_u^{n,m} \cdot \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})|] du$$

car $\int_0^{\cdot} Y_u^{n,m} Z_u^{n,m} dB_u$ est une (F_t^0, P)-martingale. Le fait que $\varphi^{n,m}$ vérifie la condition H1) et la bornitude de $Y_{\cdot}^{n,m}$ impliquent que,

$$E\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2 du\right] \leq E[\zeta^2] + c \cdot E\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^\alpha du\right]$$

où c, jusqu'à la fin de cette épreuve, est une constante pouvant changer d'une ligne à une autre.

Grâce à l'inégalité de Young [2] $\left(|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q, \forall a, b \in R; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ on a,

$$E\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2 du\right] \leq E[\zeta^2] + \frac{\alpha}{2} E\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2 du\right]$$
$$+ ((2-\alpha)Tc^{2/(2-\alpha)})/2.$$

Par suite il existe une constante C_Z indépendante de n et m telle que $E\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2 du\right] \leq C_Z$.

Nous allons maintenant construire le processus $(Y_{\cdot}, Z_{\cdot})$ qui sera la solution recherchée.

Pour tout m fixé $(Y_{\cdot}^{n,m}, n \geq 0)$ est une suite croissante bornée, elle est donc convergente. Appelons $Y_{\cdot}^m$ sa limite. Comme pour tout m et $n \in \mathbb{N}$ on a, $Y^{n,m} \geq Y^{n,m+1}$ alors la suite $(Y_{\cdot}^m, m \geq 0)$ est décroissante et bornée, elle est donc convergente. Notons $Y_{\cdot}$ sa limite.

Il reste à construire $Z_{\cdot}$.

Grâce à la formule de Itô on a, pour tout n, m, p et $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} E[(Y_0^{n,m} - Y_0^{p,k})^2] + E\left[\int_0^T |Z_u^{n,m} - Z_u^{p,k}|^2 du\right] \\ = 2E\left[\int_0^T (Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k})(\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}) \right. \\ \left. - \varphi^{p,k}(u, Y_u^{p,k}, Z_u^{p,k}))du\right]. \\ \leq c\left(E\left[\int_0^T |Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}|(1 + |Z_u^{n,m}|^\alpha + |Z_u^{p,k}|^\alpha)du\right]\right. \end{aligned}$$

car $(Y_.^{n,m})_{n,m}$ est bornée et pour tout n, m, $|\varphi^{n,m}(t, y, z)| \leq c(1 + |y| + h(y)|z|^\alpha)$.

$$\leq c\left(E\left[\int_0^T |Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}| du\right] + 2\left(E\left[\int_0^T |Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}|^\gamma du\right]\right)^{1/\gamma} \cdot (C_Z)^{\alpha/2}\right)$$

avec $\gamma = 2/(2 - \alpha)$; cela est dû à l'inégalité de Hölder et au fait que $E\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2 du\right] \leq C_Z$, $\forall n, m$.

Or il existe une sous-suite $(Y_.^{k_m,m}, m \geq 0)$ de $(Y_.^{n,m}, n, m \geq 0)$ de limite $Y_.$ dans $L^\gamma([0, T] \times \Omega, dt \otimes dP)$. Par conséquent la suite $(Z_.^{k_m,m}, m \geq 0)$ est de Cauchy dans $L^2([0, T] \times \Omega, dt \otimes dP)$ et est donc convergente dans ce même espace, vers un processus $Z_.$.

Montrons enfin que $(Y_., Z_.)$ est solution de l'équation rétrograde considérée. Naturellement cela se fera par passage à la limite.

Il existe une sous-suite de $((Y_.^{k_m,m}, Z_.^{k_m,m}))_{m \geq 0}$, que l'on représentera toujours par $((Y_.^{k_m,m}, Z_.^{k_m,m}))_{m \geq 0}$, et un processus $\tilde{Z}_.$ élément de $L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{P}, dt \otimes dP)$ et à valeurs positives (sous-produit immédiat de la complétude des espaces L^2) tel que :

(i) La sous-suite $((Y_.^{k_m,m}, Z_.^{k_m,m}))_{m \geq 0}$ converge $dt \otimes dP$-*ps* vers $(Y_., Z_.)$.

(ii) $\forall m \geq 0$, $|Z_.^{k_m,m}| \leq \tilde{Z}_.\, dt \otimes dP$-*ps*.

Aussi pour tout $m \geq \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$ on a,

$$Y_t^{k_m,m} = \zeta + \int_t^T \varphi^{k_m,m}(u, Y_u^{k_m,m}, Z_u^{k_m,m})du - \int_t^T Z_u^{k_m,m} dB_u.$$

Or,

$$E\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T Z_u^{k_m,m}dB_u-\int_t^T Z_u dB_u\right|\right]$$
$$\leq E\left[\left|\int_0^T (Z_u^{k_m,m}-Z_u)dB_u\right|\right]+E\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t |Z_u^{k_m,m}-Z_u|dB_u\right|\right]$$
$$\leq c\left(E\left[\int_0^T |Z_u^{k_m,m}-Z_u|^2du\right]\right)^{1/2}\to 0 \quad \text{quand} \quad m\to\infty.$$

La dernière majoration est due à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy ([5], Th. 3.28, p. 166).

Par ailleurs,

$$E\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T (\varphi^{k_m,m}(u,\,Y_u^{k_m,m},\,Z_u^{k_m,m})-f(u,\,Y_u,\,Z_u))du\right|\right]$$
$$\leq E\left[\int_0^T |\varphi^{k_m,m}(u,\,Y_u^{k_m,m},\,Z_u^{k_m,m})-f(u,\,Y_u,\,Z_u)|du\right]$$
$$\leq E\left[\int_0^T |\varphi^{k_m,m}(u,\,Y_u^{k_m,m},\,Z_u^{k_m,m})\right.$$
$$\left.-f(u,\,Y_u^{k_m,m},\,Z_u^{k_m,m})|\cdot 1_{\{|Z_u^{k_m,m}|\leq\tilde{Z}_u\}}du\right]$$
$$+E\left[\int_0^T |f(u,\,Y_u^{k_m,m},\,Z_u^{k_m,m})-f(u,\,Y_u,\,Z_u)|du\right].$$

et par application du théorème de la convergence dominée on obtient la convergence vers 0, quand $m\to\infty$, des deux derniers termes de la dernière inégalité. En effet, cela est possible grâce à la convergence uniforme sur les compactes de $(\varphi^{k_m,m}(t,\,\omega,\,.\,,\,.))_{m\geq 0}$ vers $f(t,\,\omega,\,.\,,\,.)$ (Remarque 2.b), au fait que f et $(\varphi^{k_m,n},\,m\geq 0)$, satisfont la condition H1), à la bornitude de $(Y_.^{k_m,m})_{m\geq 0}$ et aux points (i) et (ii) ci-dessus.

Par conséquent si on pose, pour $t\leq T$, $\tilde{Y}_t=\zeta+\int_t^T f(u,\,Y_u,\,Z_u)du-\int_t^T Z_u dB_u$ alors $E[\sup_{t\leq T}|Y_t^{k_m,m}-\tilde{Y}_t|]$ tend vers 0 quand m tend vers ∞. Par suite $\forall\, t\leq T$, $Y_t=\tilde{Y}_t$ et donc $\forall\, t\leq T$, $Y_t=\zeta+\int_t^T f(u,\,Y_u,\,Z_u)du-\int_t^T Z_u dB_u$ □

2.d Unicité de la solution. – Nous allons maintenant étudier la question de l'unicité de la solution de l'équation rétrograde de générateur $(f,\,\zeta)$. Pour cela nous aurons besoin de plus d'hypothèses de régularité sur f et ζ. Aussi supposons que les conditions A1 et A2 ci-dessous sont satisfaites.

A1. f est une application définie sur $[0, T] \times R \times R^p$ telle que :

a) $\forall t \in [0, T],\ f(t, ., .) \in C^1(R \times R^p)$.

b) $\forall (t, y, z) \in [0, T] \times R \times R^p$,

$$|f(t, y, z)| \leq c(1 + |y| + |z|)$$

et

$$|f'_y(t, y, z)| \leq c(1 + \mathrm{Ln}\,(1 + \mathrm{Ln}\,(1 + |y| + |z|)))$$

où f'_y est la dérivée partielle de f par rapport à y et c une constante.

A2. La variable aléatoire ζ est élément de $\mathbb{D}^{1,2}$, l'espace de Wiener [8]. De plus il existe une constante M telle que $|D_t^i \zeta| \leq M$, $\forall t \leq T$; $i = 1, p$. $(D_t^i \zeta)_{t \leq T}$ est la dérivée de Wiener d'ordre i de ζ.

Soit g une application de R^p dans R différentiable et de différentielle g' bornée. Si $\zeta = g(B_T)$ alors $\forall t \leq T$, $D_t \zeta = g'(B_T)$; ζ vérifie donc la condition A2.

2.d (i) PROPOSITION. – *Il existe une constante $\eta > 0$ et $Y_.$, $Z_.$ deux processus $\mathbb{P}$-mesurables, à valeurs respectives dans R et R^p tel que :*

$$\sup \{|Y_t| + |Z_t|,\ t \leq T\} \leq \eta.$$

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)\,dt + Z_t\,dB_t; & t \leq T. \\ Y_T = \zeta. \end{cases}$$

Preuve. – Soit θ (resp. $\tilde{\theta}$) une application indéfiniment différentiable sur R (resp. R^p) vérifiant $\theta(y) = 1$ si $|y| \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta(y) = 0$ si $|y| \geq 2$ (resp. $\tilde{\theta}(z) = 1$ si $|z| \leq 1$, $0 \leq \tilde{\theta} \leq 1$ et $\tilde{\theta}(z) = 0$ si $|z| \geq 2$). Pour $n \geq 1$, on définit l'application θ_n (resp. $\tilde{\theta}_n$) par $\theta_n(y) = \theta\left(\frac{y}{n}\right)$, $y \in R$ (resp. $\tilde{\theta}_n(z) = \tilde{\theta}\left(\frac{z}{n}\right)$, $z \in R^p$). Aussi, l'application f^n telle que $f^n(t, y, z) = f(t, y, z)\theta_n(y)\tilde{\theta}_n(z)$, $(t, y, z) \in [0, T] \times R \times R^p$, est différentiable en (y, z) et de différentielle bornée.

Soit $\alpha = \sup\{\theta'(y)|,\ |y| \leq 2\}$ (θ' est la dérivée de θ) et N un entier ≥ 1. Il existe deux processus $Y_.$ et $Z_.$ (Th. 1.b) $\mathbb{P}$-mesurables à valeurs respectives dans R et R^p tels que $\forall t \leq T$,

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f^N(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

De plus les points a) et b) suivants sont satisfaits ([8], Prop. 2.2) :

a) Pour tout $t \leq T$, Y_t et Z_t sont les élements de $\mathbb{D}^{1,2}$ et pour tout $u \in [0, T]$, le couple $(D_u Y_t, D_u Z_t)_{t \leq T}$ vérifie,

$$\begin{aligned} D_u Y_t =& D_u \zeta + \int_t^T (f_y^{N,}(s, Y_s, Z_s) D_u Y_s \\ &+ f_z^{N,}(s, Y_s, Z_s) D_u Z_s) ds - \int_t^T D_u Z_s dB_s; \\ & t \leq T. \end{aligned}$$

b) $\forall t \in [0, T]$, $D_t Y_t = Z_t$.

Le fait que $f_z^{N,}$ soit uniformément borné implique que (comme dans la preuve du théorème 2.c en considérant l'équation rétrograde du point a) ci-dessus) pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |D_t Z_t| &\leq M \cdot \exp\{(T - t) \cdot \sup_{(t, y, z)} |f_y^{N,}(t, y, z)|\} \\ &\leq M \cdot \exp\{T \cdot \sup_{(t, y, z)} |f_y^{N,}(t, y, z)|\}. \end{aligned}$$

Or $\forall (t, y, z)$, $|f_y^{N,}(t, y, z)| \leq |f_y(t, y, z)| + \frac{\alpha}{N}|f(t, y, z)|$ et que $f^N(t, y, z) = 0$ si $|y| \geq 2N$ ou $|z| \geq 2N$. Par suite pour tout $t \leq T$,

$|D_t Y_t| \leq M \exp(T|f_y'|_N^* + \frac{T}{N}\alpha|f|_N^*)$ où pour toute application g définie sur $[0, T] \times R^{p+1}$, $|g|_N^* = \sup\{|g(t, y, z)|, (t, |y|, |z|) \in [0, T] \times [0, 2N]^2\}$. Aussi grâce à l'hypothèse A1

$$\begin{aligned} |D_t Z_t| &\leq M \cdot \exp(cT(1 + \mathrm{Ln}(1 + \mathrm{Ln}(1 + 4N)))) \cdot \exp \frac{T}{N} c\alpha(1 + 4N) \\ &\leq c'(1 + \mathrm{Ln}\,(1 + 4N))^{cT} \cdot \exp \frac{T}{N} c\alpha(1 + 4N) \text{ où } c' \text{ est une constante.} \end{aligned}$$

Par ailleurs soit $(\tilde{Y}_., \tilde{Z}_.)$ et $(\overline{Y}_., (\overline{Z}_.)$ les solutions des équations rétrogrades suivantes : $\forall t \leq T$,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t &= \zeta + \int_t^T c(1 + |\tilde{Y}_s| + |\tilde{Z}_s|) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s dB_s; \\ \overline{Y}_t &= \zeta - \int_t^T c(1 + |\overline{Y}_s| + |\overline{Z}_s|) ds - \int_t^T \overline{Z}_s dB_s. \end{aligned}$$

Aussi, comme dans la preuve du théorème 2.c on montre qu'il existe deux constantes $\tilde{M}$ et $\overline{M}$ positives telles que pour tout $t \leq T$, $|\tilde{Y}_t| \leq \tilde{M}$ et $|\overline{Y}_t| \leq \overline{M}$. De plus comme f^N est de croissance linéaire alors le théorème de comparaison (Th. 1c) nous permet de déduire que pour tout $t \in [0, T]$, on a $\tilde{Y}_t \leq Y_t \leq \overline{Y}_t$ et donc $|Y_t|$ est borné par $\max(\tilde{M}, \overline{M})$. Par conséquent si N est plus grand que $\max(\tilde{M}, \overline{M})$ ainsi que $c'(1 + \mathrm{Ln}\,(1 + 4N))^{cT} \cdot \exp \frac{T}{N} c\alpha(1 + 4N)$ alors, $f^N(t, Y_t, Z_t) = f(t, Y_t, Z_t)$, $\forall t \leq [0, T]$. Il s'ensuit que le processus $(Y_., Z_.)$ vérifie :

$$\text{(i)} \qquad \sup\{|Y_t| + |Z_t|,\ t \leq T\} \leq 2N = \eta.$$

$$\text{(ii)} \qquad Y_t = \zeta + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s; \qquad t \leq T \quad \square$$

2.d (ii) THÉORÈME. – *Si le couple (f, ζ) vérifie les conditions A1 et A2 ci-dessus, alors la solution de l'équation rétrograde de générateur (f, ζ) est unique.*

Preuve. – Soit $(Y'_., Z'_.)$ une autre solution de cette équation. Comme ζ est bornée et f est de croissance linéaire alors $Y'_.$, est bornée. Par ailleurs pour tout t appartenant à $[0, T]$ on a,

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s$$

et

$$Y'_t = \zeta + \int_t^T f(s, Y'_s, Z'_s)ds - \int_t^T Z'_s dB_s.$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} Y_t - Y'_t &= \int_t^T (f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s))ds - \int_t^T (Z_s - Z'_s)dB_s \\ &= \int_t^T (f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z_s))ds \\ &\quad + \int_t^T (f(s, Y'_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s))ds - \int_t^T (Z_s - Z'_s)dB_s \end{aligned}$$

Aussi, appelons $\delta f = ((\delta f)_t)_{t \leq T}$ le processus tel que pour tout $t \leq T$, $(\delta f)_t$ est égal à $f(t, Y'_t, Z_t) - f(t, Y'_t, Z'_t))(Z_t - Z'_t)^{-1}$ si $(Z_t - Z'_t) \neq 0$ et 0 sinon. La bornitude de $Y'_.$ et $Z_.$ impliquent que δf est un processus uniformément borné. Il existe donc une probabilité P' sur Ω équivalente à P telle que $B'_. = B_. - \int_0^. (\delta f)_s ds$ est un (F_t, P')-mouvement brownien. Par suite pour tout $t \in [0, T]$ on a,

$$Y_t - Y'_t = \int_t^T (f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z_s))ds - \int_t^T (Z_s - Z'_s)dB'_s.$$

Aussi grâce à la bornitude de $Y_.$, $Y'_.$ et $Z_.$ et le lemme de Gronwall on déduit que (comme dans Th. 2.c)), $|Y_t - Y'_t| = 0$, $\forall\, t \leq T$. Cela entraîne aussi que $Z_t = Z'_t$, $\forall\, t \leq T$ et donc l'unicité de la solution de l'équation □

2.e *Remarque.* – Les résultats des proposition 2.d (i) et théorème 2.d (ii) se généralisent au cas multidimensionnel. Par ailleurs ils restent vrais si la condition A1 ci-dessus portant sur f'_y s'énonce comme suit : $\forall (t, y, z) \in [0, T] \times R \times R^p$,

$|f'_y(t, y, z)| \leq c(1 + \mathrm{Ln}\,(1 + (|y| + |z|)^\beta))$, avec β suffisamment petit □

2.f EXTENSION DU RÉSULTAT AU CAS OÙ LA DÉRIVE N'EST PAS LOCALEMENT LIPSCHITZIENNE. – Soit $\tilde{S}$ l'ensemble des applications $\tilde{f}$ définies sur $[0, T] \times \Omega \times R^{p+1}$ à valeurs dans R, $\mathbb{P} \otimes B(R^{p+1})$-mesurable, continue en (y, z) et vérifiant :

Il existe une suite monotone $(f_n, n \leq 0)$ d'applications lipschitziennes en (y, z) uniformément en (t, ω) telles que :

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(t, \omega, y, z) = \tilde{f}(t, \omega, y, z)$ pour tout (t, ω, y, z)

(ii) $\sup_{n\geq 0} |f_n(t, \omega, y, z)|$ vérifie la condition H1).

De la même manière que la preuve du théorème 2.c on montre que si f s'écrit comme somme de deux éléments de $\tilde{S}$ alors l'équation rétrograde de générateur (f, ζ) admet une solution (non unique en général). L'application $f(y, z)$ égale à $(|y|)^{1/2} - (|z|)^{1/2}$ en est un exemple □

REMERCIEMENTS

Je remercie le professeur J. P. Lepeltier pour les discussions fructueuses que nous avons eues lors de la préparation de cet article. Je remercie également le rapporteur dont les suggestions m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce travail □

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. EL-KAROUI, S. PENG et M. C. QUENEZ, Backward stochastic differential equation, Finance and Optimization, Preprint.

[2] J. GENET, *Mesure et intégration*, Vuibert, 1976, Paris.

[3] H. HAMADÈNE et J.-P. LEPELTIER, Zero sum stochastic differential games and backward equations, *Systems and Control letters*, vol. **24**, 1995, p. 259-263.

[4] H. HAMADÈNE et J.-P. LEPELTIER, Backward equations, optimal control and zero sum stochastic differential games, à paraître dans *Stochastics*.

[5] I. KARATZAS et S. E. SHREVE, *Brownian motion and stochastic calculus*, Second édition, Springer, 1991.

[6] E. PARDOUX et S. PENG, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *Systems and control letters*, vol. **14**, 1990, p. 54-61.

[7] E. PARDOUX et S. PENG, Some backward stochastic differential equations with non-lipschitz coefficients, Preprint.

[8] E. PARDOUX et S. PENG, Backward Stochastic Differential Equations and Quasilinear Parabolic Partial Differential Equations, *Lecture Notes in CIS*, vol. **176**, 1992, p. 200-217, Springer.

(Manuscrit accepté le 6 juillet 1995.)