

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

G. LORANG

B. ROYNETTE

Étude d'une fonctionnelle liée au pont de Bessel

Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, n° 1 (1996), p. 107-133

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_1_107_0>

© Gauthier-Villars, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Étude d'une fonctionnelle liée au pont de Bessel

par

G. LORANG et B. ROYNETTE

Université de Nancy I, Département de Mathématiques,
B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France.

RÉSUMÉ. — Soit $X_{s,t}^{x,y}$ le pont de Bessel de dimension n ($n > 2$) conditionné pour valoir x en 0 et y et t . Soit $0 < p < \frac{n-2}{2}$ et $k(p) = \frac{p(n-p-2)}{2}$. Soit $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que : l est positive et bornée, $l(z)$ se comporte comme $\frac{k(p)}{z^2}$ à l'infini et l n'est ni trop grande ni trop petite à l'origine. Soit

$$I_t(x, y) = E \left\{ \exp \int_0^t l(X_{s,t}^{x,y}) ds \right\}.$$

On montre ici que $I_t(x, z)$ se comporte comme $\left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p$. Ce comportement permet d'estimer la densité de semi-groupes de « type hyperbolique » sur $\mathbb{R}_+$.

ABSTRACT. — 1. Consider a real number $n > 2$ and define $\nu = \frac{n}{2} - 1$. Let I_ν be the modified Bessel function of index ν i.e.

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}$$

and define

$$\varphi_\nu(z) = \frac{z I'_\nu(z)}{I'_\nu(z)}.$$

If $(B_s)_{s \geq 0}$ is a linear Brownian motion started at 0 and x, y are nonnegative real numbers, we consider the stochastic differential equation

$$(E) \quad \begin{cases} dX_s = dB_s + \left[\frac{1}{2} + \varphi_\nu \left(\frac{X_s y}{t-s} \right) \right] \frac{ds}{X_s} - \frac{X_s}{t-s} ds & (0 \leq s \leq t) \\ X_0 = x. \end{cases}$$

This equation has a unique strong solution, called the Bessel bridge of dimension n , from x to y over $[0, t]$ and denoted by $(X_{s,t}^{x,y})_{0 \leq s \leq t}$ or simply $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$.

2. For any $0 < p < \frac{n-2}{2}$, define $k(p) = \frac{p(n-p-2)}{2}$. Let l be a positive, bounded real function defined on $\mathbb{R}_+$ such that:

- (i) $l(z)$ behaves like $\frac{k(p)}{z^2}$ for large z .
- (ii) $l(z)$ is neither too large nor too small in a neighbourhood of the origin.

These hypotheses will be precised in the paper: we will indeed suppose that l belongs to a tube (cf. § III.2).

3. Consider the functional:

$$I_t(x, y) = E \left\{ \exp \left(\int_0^t l(X_{s,t}^{x,y}) ds \right) \right\}$$

The aim of the paper is to prove the following theorem.

THEOREM. — *Let l be a function satisfying the hypotheses above. Then for any fixed $y_0 \geq 0$, there exists a positive constant C (depending on l, y_0, n and p , but not on x and t) such that:*

$$\begin{cases} (\forall t > 0, x \geq 0, 0 \leq y \leq y_0), \\ C^{-1} \left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p \leq I_t(x, y) \leq C \left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p \end{cases}$$

The result of this theorem is linked with the estimation of the density of semi-groups of “hyperbolic type” (cf. § II).

I. INTRODUCTION

1. Soit n un nombre réel > 2 et $\nu = \frac{n}{2} - 1$. Désignons par I_ν la fonction modifiée de Bessel d'indice ν , *i.e.*

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}$$

et posons

$$\varphi_\nu(z) = \frac{z I'_\nu(z)}{I'_\nu(z)}.$$

Soient $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $t > 0$ trois nombres réels et $(B_s)_{s \geq 0}$ un mouvement Brownien linéaire (avec $B_0 = 0$). Considérons l'équation différentielle stochastique (en s) :

$$(E) \quad \begin{cases} dX_s = dB_s + \left[\frac{1}{2} + \varphi_\nu \left(\frac{X_s y}{t-s} \right) \right] \frac{ds}{X_s} - \frac{X_s}{t-s} ds & (0 \leq s \leq t) \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Cette équation différentielle stochastique possède une solution unique : c'est le pont de Bessel de dimension n partant de x en 0 et se trouvant en y au temps t , notée $(X_{s,t}^{x,y})_{0 \leq s \leq t}$ ou simplement $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ lorsqu'il n'y a aucune confusion à craindre (*cf.* Appendice).

2. Soit p un nombre réel, $0 < p < \frac{n-2}{2}$ et soit $k(p) = \frac{p(n-p-2)}{2}$. Soit l une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

- (i) l est positive et bornée sur $\mathbb{R}_+$.
- (ii) « $l(z)$ se comporte comme $\frac{k(p)}{z^2}$ pour z grand ».
- (iii) « l n'est ni trop petite, ni trop grande à l'origine ».

Ces hypothèses seront précisées ultérieurement : en fait on demandera à l d'appartenir à un tube (*cf.* § III.2 ci-dessous).

3. Considérons la fonctionnelle :

$$I_t(x, y) = E \left\{ \exp \left(\int_0^t l(X_{s,t}^{x,y}) ds \right) \right\} \quad (I,1)$$

On se propose ici de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les hypothèses ci-dessus étant vérifiées et $y_0 \geq 0$ étant fixé, il existe une constante C (dépendant de l , y_0 , n et p mais non de*

x et t) telle que :

$$\left. \begin{aligned} & (\forall t > 0, x \geq 0, 0 \leq y \leq y_0), \\ & C^{-1} \left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p \leq I_t(x, y) \leq C \left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p \end{aligned} \right\} \quad (\text{I}, 2)$$

Remarques. – 1) On verra ci-dessous que le comportement de $I_t(x, y)$ en t dépend non seulement du comportement de l à l'infini [hypothèse (ii)], mais aussi du comportement de l à l'origine [hypothèse (iii)].

2) Sous l'hypothèse supplémentaire que l est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, il est facile de voir que $I_t(x, y)$ est une fonctionnelle décroissante de y (x et t étant fixées). En effet, comme φ_ν est une fonction croissante, le terme de dérive dans l'équation (E) croît avec y . Les théorèmes de comparaison pour les solutions d'E.D.S. (cf. [I.W.], chap. VI) permettent alors d'écrire que si $y_1 \leq y_2$ alors

$$P \{ X_{s,t}^{x,y_1} \leq X_{s,t}^{x,y_2} (\forall s \leq t) \} = 1$$

et donc :

$$I_t(x, y_1) \geq I_t(x, y_2).$$

II. POURQUOI CETTE ÉTUDE ?

Avant de démontrer le théorème annoncé, nous allons indiquer les motivations qui nous ont conduits à nous intéresser à la fonctionnelle $I_t(x, y)$

1. Soient α et β deux constantes positives et soit $H_{\alpha,\beta}$ l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}_+$:

$$H_{\alpha,\beta} f(r) = \frac{1}{2} f''(r) + \frac{1}{2} \gamma_{\alpha,\beta}(r) f'(r) \quad (\text{II}, 1)$$

avec :

$$\gamma_{\alpha,\beta}(r) := \alpha \coth r + 2\beta \coth 2r \quad (\text{II}, 2)$$

Pour certains choix de α et β , cet opérateur est la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami de l'espace hyperbolique $H^N(K)$ de dimension N sur le corps K . Le tableau ci-dessous résume ces choix :

$H^N(K)$	α	β
$H^N(\mathbb{R})$	$N - 1$	0
$H^N(\mathbb{C})$	$2(N - 1)$	1
$H^N(\mathbb{H})$	$4(N - 1)$	3
$H^2(\mathbb{O})$	8	7

L'opérateur $H_{\alpha, \beta}$ est symétrique par rapport à la mesure $\mu_{\alpha, \beta}$ de densité $\mu_{\alpha, \beta}(r) = \text{sh}_{2r}^{\alpha} \cdot \text{sh}_{2r}^{\beta}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, i.e. pour f et g C^{∞} à support compact :

$$\langle H_{\alpha, \beta} f, g \rangle_{\mu_{\alpha, \beta}} = \langle f, H_{\alpha, \beta} g \rangle_{\mu_{\alpha, \beta}} \quad (\text{II},3)$$

De même, comme on le voit aisément en intégrant par parties, on montre que pour f C^{∞} à support compact :

$$\langle H_{\alpha, \beta} f, f \rangle_{\mu_{\alpha, \beta}} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} f'^2 d\mu_{\alpha, \beta}. \quad (\text{II},4)$$

De (II,3) et (II,4) on déduit l'existence d'un semi-groupe $(S_t^{\alpha, \beta})_{t \geq 0}$ d'opérateurs markoviens, à contradiction dans tous les espaces $L^p(\mu_{\alpha, \beta})$ ($1 \leq p \leq +\infty$) et de générateur $H_{\alpha, \beta}$. Dans le cas de l'espace $H^N(\mathbb{R})$, on connaît depuis Davies (cf. [D.], p. 176) une estimation de la densité $k_N(t, r)$ de $S_t^{N-1, 0}$ par rapport à $\mu_{N-1, 0}$ en 0. Plus précisément, k_N est solution de :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial k_N}{\partial t} &= H_{N-1, 0} k_N \\ k_N(0, \cdot) &= \delta_0 \quad (\text{masse de Dirac en } 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II},5)$$

avec :

$$S_t^{N-1, 0} f(0) = \int_{\mathbb{R}_+} f(r) k_N(t, r) \mu(dr) \quad (\text{II},6)$$

et il existe une fonction h_N :

$$\begin{aligned} h_N(t, r) &= (2\pi t)^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{(N-1)^2 t}{8} - \frac{(N-1)r}{2} - \frac{r^2}{2t} \right\} \\ &\times (1+r+t)^{\frac{N-3}{2}} (1+r) \end{aligned} \quad (\text{II},7)$$

et une constante c_N avec :

$$(\forall t > 0, r \in \mathbb{R}_+), \quad c_N^{-1} h_N(t, r) \leq k_N(t, r) \leq c_N h_N(t, r) \quad (\text{II},8)$$

2. Ce qu'on vient de décrire pour la situation hyperbolique peut s'étendre de la façon suivante. Soit G l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}_+$:

$$Gf(r) = \frac{1}{2} f''(r) + \frac{n-1}{2} \gamma(r) f'(r) \quad (\text{II},9)$$

où l'on suppose que γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, à dérivées bornées sur $[1, +\infty[$ et :

$$\left. \begin{aligned} \gamma(r) &= \frac{1}{r} + o(r) \quad \text{au voisinage de } 0 \\ \gamma(r) &= a + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{au voisinage de } +\infty \\ \gamma'(r) &= o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{au voisinage de } +\infty \end{aligned} \right\} \quad (\text{II},10)$$

Soit μ la solution de l'équation différentielle $\frac{\mu'}{\mu}(r) = (n-1)\gamma(r)$ telle que $\mu(1) = 1$, i.e. :

$$\mu(r) = \exp \left\{ (n-1) \int_1^r \gamma(s) ds \right\} \quad (\text{II},11)$$

L'opérateur G est symétrique et dissipatif par rapport à la mesure μ de densité $\mu(r)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. En effet, pour f et $g \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact :

$$\left. \begin{aligned} \langle Gf, g \rangle_\mu &= \langle f, Gg \rangle_\mu \\ \langle Gf, f \rangle_\mu &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} f'^2 d\mu \end{aligned} \right\} \quad (\text{II},12)$$

si bien qu'il existe un semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ markovien, de générateur G et à contraction dans tous les espaces $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq +\infty$).

3. On se propose maintenant d'estimer de manière probabiliste la densité $k_t(x, y)$ du semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$. (On pourra se référer à [KKR] pour des calculs analogues.) Soit $(\beta_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien linéaire et $(R_t)_{t \geq 0}$ la solution unique de l'équation différentielle stochastique :

$$\left. \begin{aligned} dR_t &= d\beta_t + \frac{n-1}{2} \frac{dt}{R_t} \\ R_0 &= r \quad (r \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II},13)$$

C'est le processus de Bessel de dimension n ($n > 2$). Soit $(G_t)_{t \geq 0}$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\left. \begin{aligned} dG_t &= d\beta_t + \frac{n-1}{2} \gamma(G_t) dt \\ G_0 &= r \end{aligned} \right\} \quad (\text{II},14)$$

Les hypothèses (II,10) faites sur γ impliquent l'existence et l'unicité de la solution de (II,14) sur $\mathbb{R}_+$. Le semi-groupe associé coïncide, d'après la formule d'Itô, avec le semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ défini au point II.2. Les hypothèses (II,10) entraînent par ailleurs que la fonction $c(r) := \gamma(r) - \frac{1}{r}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. La formule de Girsanov implique alors que la loi λ_G du processus G est absolument continue par rapport à la loi λ_R du processus R . Plus précisément, on a sur $\mathcal{F}_t := \sigma(\beta_s; 0 \leq s \leq t)$:

$$\frac{d\lambda_G}{d\lambda_R} = \exp \left\{ \frac{n-1}{2} \int_0^t c(R_s) d\beta_s - \frac{(n-1)^2}{8} \int_0^t c^2(R_s) ds \right\} \quad (\text{II},15)$$

Appliquant alors la formule d'Itô à la fonction :

$$\psi(r) = \frac{n-1}{2} \int_1^r c(s) ds = \log \left(\frac{\mu(r)^{1/2}}{r^{\frac{n-1}{2}}} \right),$$

on a :

$$\begin{aligned} \psi(R_t) = & \psi(r) + \frac{n-1}{2} \int_0^t c(R_s) d\beta_s \\ & + \frac{(n-1)^2}{4} \int_0^t \frac{c(R_s)}{R_s} ds + \frac{n-1}{4} \int_0^t c'(R_s) ds \quad (\text{II},16) \end{aligned}$$

Reportant alors dans (II,15) la valeur de $\frac{n-1}{2} \int_0^t c(R_s) d\beta_s$, calculée dans (II,16), on obtient :

$$\begin{aligned} T_t f(r) = & \frac{r^{\frac{n-1}{2}}}{\mu(r)^{1/2}} \\ & \times E \left\{ f(R_t) \frac{\mu(R_t)^{1/2}}{R_t^{\frac{n-1}{2}}} \exp \left(- \int_0^t \tilde{l}(R_s) ds \right) \right\} \quad (\text{II},17) \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{l}(r) := \frac{(n-1)^2}{4} \frac{c(r)}{r} + \frac{n-1}{4} c'(r) + \frac{(n-1)^2}{8} c^2(r) \quad (\text{II},18)$$

Ce qui peut s'écrire encore, lorsque n est entier :

$$\begin{aligned} T_t f(r) = & \frac{r^{\frac{n-1}{2}}}{\mu(r)^{1/2}} \\ & \times E \left\{ f(|B_t|) \frac{\mu^{1/2}(|B_t|)}{|B_t|^{\frac{n-1}{2}}} \exp \left(- \int_0^t \tilde{l}(|B_t|) ds \right) \right\} \quad (\text{II},19) \end{aligned}$$

où B est un mouvement Brownien de dimension n partant au temps 0 d'un point dont le module est r .

4. La formule (II,17) permet d'étudier la densité $k_t(x, y)$. Plus précisément on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1 :

$$\begin{aligned} k_t(x, y) = & \frac{1}{t} \left[\frac{xy}{\mu(x)\mu(y)} \right]^{1/2} \exp \left(- \frac{x^2 + y^2}{2t} \right) I_\nu \left(\frac{xy}{t} \right) \\ & \times E \left\{ \exp \left(- \int_0^t \tilde{l}(X_{s,t}^{x,y}) ds \right) \right\} \quad (\text{II},20) \end{aligned}$$

où I_ν est la fonction modifiée de Bessel d'indice ν ($\nu = \frac{n}{2} - 1$) et $X_{s,t}^{x,y}$ est le pont de Bessel de dimension n , partant de x en 0 et se trouvant en y au temps t (cf. Introduction).

Démonstration de la proposition 1. — On considère la fonction $f_\varepsilon = C_\varepsilon \mathbf{1}[y - \varepsilon, y + \varepsilon]$ où C_ε est telle que $C_\varepsilon \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \mu(s) ds = 1$. Il est alors clair que

$$T_t f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} k_t(x, y)$$

et par conséquent, d'après (II,17) :

$$\begin{aligned} k_t(x, y) &= \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\mu(x)^{1/2} \mu(y)^{1/2} y^{\frac{n-1}{2}}} p_t(x, y) \\ &\times E \left\{ \exp \left(- \int_0^t \tilde{l}(X_{s,t}^{x,y}) ds \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II,21})$$

où $p_t(x, y) = \frac{1}{t} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{n}{2}-1} y \exp \left(-\frac{x^2 - y^2}{2t} \right) I_\nu \left(\frac{xy}{t} \right)$ est la densité au temps t du processus de Bessel partant au temps 0 de x . Remplaçant la valeur de $p_t(x, y)$ dans (II,21) on obtient sans peine (II,20).

Les hypothèses (II,10) sur la fonction γ impliquent le comportement suivant de la fonction $\tilde{l}$ au voisinage de l'infini :

$$\tilde{l}(r) = \frac{a^2(n-1)^2}{8} - \frac{(n-1)(n-3)}{8} \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (\text{II,22})$$

On est donc amené à poser : $\tilde{l}(r) = \frac{a^2(n-1)^2}{8} - l(r)$. Supposons maintenant que $l(r)$ ait les propriétés (i), (ii) et (iii) énoncées dans l'introduction (cf. I.2) (ce qui est le cas dans la situation hyperbolique comme on le verra au § 5 ci-dessous). Réécrivant alors la formule (II,20) on obtient :

$$\begin{aligned} k_t(x, y) &= \frac{1}{t} \left[\frac{xy}{\mu(x)\mu(y)} \right]^{1/2} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2t} - \frac{a^2(n-1)^2}{8} t \right) \\ &\times I_\nu \left(\frac{xy}{t} \right) E \left\{ \exp \left(\int_0^t l(X_{s,t}^{x,y}) ds \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II,23})$$

C'est cette formule qui motive notre étude de la fonctionnelle $I_t(x, y)$.

Remarque (inspirée par le referee). — $I_t(x, y)$ se calcule explicitement dans la situation où $\tilde{l}(r) = \frac{k^2}{2r^2}$ (cf. [Y]). On obtient alors :

$$E \left(\exp - \frac{k^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{(X_{s,t}^{x,y})^2} \right) = \frac{I_\mu \left(\frac{xy}{t} \right)}{I_\nu \left(\frac{xy}{t} \right)}$$

avec $\mu = \sqrt{k^2 + \nu^2}$.

Bien entendu, cette fonction $\tilde{l}$, par son comportement au voisinage de 0, ne satisfait pas les hypothèses requises par le théorème annoncé.

5. Revenons à la situation hyperbolique. Rappelons alors que :

$$\begin{aligned} H_{\alpha, \beta} f(r) &= \frac{1}{2} f''(r) + \frac{1}{2} \gamma_{\alpha, \beta}(r) f'(r) \\ &= \frac{1}{2} f''(r) + \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\frac{\alpha \coth r + 2\beta \coth 2r}{\alpha + \beta} \right) f'(r) \end{aligned}$$

On choisit alors $n - 1 = \alpha + \beta$ (i.e. $n = \alpha + \beta + 1$) et on se convainc aisément que $\gamma(r) = \frac{\alpha \coth r + 2\beta \coth 2r}{\alpha + \beta}$ vérifie bien les hypothèses

(II,10) avec $a = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta}$. Le calcul explicite de $\tilde{l}(r)$ donne :

$$\begin{aligned} \tilde{l}(r) &= \frac{(\alpha + 2\beta)^2}{8} - \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2)}{8} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\text{sh}^2 r} \right) \\ &\quad - \frac{\beta(\beta - 2)}{8} \frac{1}{1 + \text{sh}^2 r} \end{aligned} \quad (\text{II},24)$$

D'où :

$$l(r) = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2)}{8} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\text{sh}^2 r} \right) + \frac{\beta(\beta - 2)}{8} \frac{1}{1 + \text{sh}^2 r} \quad (\text{II},25)$$

Choisissant :

$$p = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{n - 3}{2} < \frac{n - 2}{2} \quad (\text{II},26)$$

on a :

$$k(p) = \frac{p(n - p - 2)}{2} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2)}{8} \quad (\text{II},27)$$

et donc :

$$l(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k(p)}{r^2}$$

Le théorème annoncé ainsi que les relations (II,23) à (II,27) permettent alors d'estimer la densité $k_t^{\alpha, \beta}(x, y)$ du semi-groupe $(S_t^{\alpha, \beta})_{t \geq 0}$ (défini au § II.1) par rapport à la mesure $\mu_{\alpha, \beta}$. Plus précisément, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. – *Soit la fonction $h_{\alpha, \beta}(t, x)$ définie par :*

$$h_{\alpha, \beta}(t, x) = t^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{(\alpha + 2\beta)^2}{8} t - \frac{(\alpha + 2\beta)}{2} x - \frac{x^2}{2t} \right\} \\ \times (1 + x + t)^{\frac{n-3}{2}} (1 + x)$$

(où $n = \alpha + \beta + 1$). Il existe une constante C telle que

$$(\forall t > 0, x \geq 0), \quad C^{-1} h_{\alpha, \beta}(t, x) \leq k_t^{\alpha, \beta}(x, 0) \leq C h_{\alpha, \beta}(t, x)$$

(La démonstration du corollaire utilise l'équivalence en 0 : $I_\nu(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)}$ et l'équivalence uniforme : $\mu_{\alpha, \beta}(z) = \text{sh}^\alpha z \text{sh}^\beta 2z \sim \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\alpha+\beta} \exp[(\alpha + 2\beta)z]$.)

Remarquons que l'on retrouve bien le résultat de Davies ([D], p. 176) [cf. II,7) et (II,8)] dans le cas de $H^N(\mathbb{R})$: $\alpha = N - 1$ et $\beta = 0$.

III. HYPOTHÈSES SUR LA FONCTION l

Afin de préciser les hypothèses (i), (ii), (iii) de l'alinéa I.2, nous allons commencer par quelques remarques relatives aux fonctions de Bessel.

1. Quelques remarques sur les fonctions de Bessel

(cf. [W.W.], p. 360 et suivantes)

Soit $\alpha > 0$ et J_α la fonction de Bessel d'indice α :

$$(\forall z \geq 0), \quad J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \quad (\text{III},1)$$

Notons :

$$K_\alpha(z) = z^{-\alpha} J_\alpha(z) \quad (\text{III},2)$$

K_α est solution de l'équation différentielle :

$$K_\alpha''(z) + \frac{2\alpha+1}{z} K_\alpha'(z) + K_\alpha(z) = 0 \quad (\text{III},3)$$

Soit maintenant $\gamma > 0$ et $K_{\alpha,\gamma}(z) := K_\alpha(\gamma z)$. La relation (III,3) implique alors que :

$$K_{\alpha,\gamma}''(z) + \frac{2\alpha+1}{z} K_{\alpha,\gamma}'(z) + \gamma^2 K_{\alpha,\gamma}(z) = 0 \quad (\text{III},4)$$

Notons L l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}_+$:

$$L f = \frac{1}{2} f'' + \frac{n-1}{2z} f' \quad (\text{III},5)$$

Lorsque n est entier, L est la partie radiale du laplacien de dimension n . En fait nous n'utiliserons dans ce qui suit que la fonction $K_\nu \left(\nu = \frac{n-2}{2} \right)$.

D'après (III,4) cette fonction satisfait à :

$$-\frac{L K_{\nu,\gamma}}{K_{\nu,\gamma}} = \frac{\gamma^2}{2} \quad (\text{III},6)$$

LEMME 1. — 1) Pour tout $\omega < 0$, il existe deux constantes $\delta (= \delta(\omega))$ et $\gamma (= \gamma(\omega))$ telles que la fonction $K_{\nu,\gamma,\delta}(z) := \delta K_{\nu,\gamma}(z) = \delta K_\nu(\gamma z)$ notée plus simplement $K^\omega(z)$ vérifie :

$$\left. \begin{aligned} K^\omega(1) &= 1 \\ K^{\omega'}(1) &= \omega \\ -\frac{L K^\omega}{K^\omega}(z) &= \frac{\gamma^2(\omega)}{2} \quad \text{pour tout } z \in [0,1] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III},7)$$

2) Si

$$\omega_2 < \omega_1 < 0 \quad \text{alors } \gamma(\omega_1) < \gamma(\omega_2). \quad (\text{III},8)$$

Démonstration du lemme 1. — Pour démontrer le premier point il suffit de constater que la fonction $\gamma \mapsto \frac{\gamma K_\nu'(\gamma)}{K_\nu(\gamma)}$ varie de 0 à $-\infty$ quand γ varie de 0 à y_ν où y_ν est le premier zéro de la fonction K_ν . On choisit alors $\gamma = \gamma(\omega)$ de sorte que $\frac{\gamma K_\nu'(\gamma)}{K_\nu(\gamma)} = \omega$, puis on détermine $\delta = \delta(\omega)$ afin que $\delta K_\nu(\gamma) = 1$.

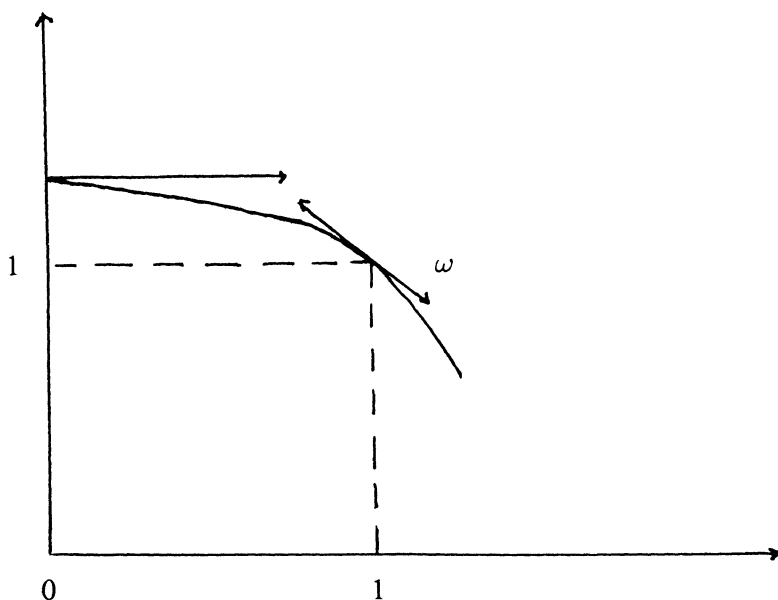
Montrons le point 2. On a après intégration par parties :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 L f(z) g(z) z^{n-1} dz - \int_0^1 f(z) L g(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2} [(f' g - f g') z^{n-1}]_0^1 \end{aligned} \quad (\text{III},9)$$

D'où, en appliquant (III,9) avec $f = K^{\omega_1}$ et $g = K^{\omega_2}$:

$$\left(-\frac{\gamma^2(\omega_1)}{2} + \frac{\gamma^2(\omega_2)}{2} \right) \int_0^1 K^{\omega_1}(z) K^{\omega_2}(z) z^{n-1} dz = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} > 0$$

ce qui est (III,8).



Graphe de K^{ω}

Fig. 1.

2. Description d'un tube

Soient p , q et c trois réels. On supposera dans toute la suite que :

$$\left. \begin{aligned} 0 < p < \frac{n-2}{2}, \quad q > p \quad \text{et} \quad k(p) < k(q) \\ 0 < c < \frac{q}{q-p} = 1 + \frac{p}{q-p} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III},10)$$

$$\left[\text{Rappelons que } k(p) = \frac{p(n-2-p)}{2} \right]$$

Soit

$$f_{p,q,c}(z) := \frac{c}{z^p} + \frac{1-c}{z^q} \quad (z \geq 1) \quad (\text{III},11)$$

Un calcul élémentaire permet d'établir que :

$$-\frac{L f}{f}(z) = \frac{k(p)}{z^2} + \frac{(1-c)(k(q) - k(p))}{z^2(1-c + cz^{q-p})} \quad (\text{III},12)$$

Si $c < 1$ on a :

$$-\frac{L f}{f}(z) \geq \frac{k(p)}{z^2} - \frac{(1-c)(k(q) - k(p))}{z^{2+q-p}} \quad (z \geq 1) \quad (\text{III},13)$$

Si $c > 1$ on a :

$$-\frac{L f}{f}(z) \leq \frac{k(p)}{z^2} - \frac{(c-1)(k(q) - k(p))}{cz^{2+q-p}} \quad (z \geq 1) \quad (\text{III},14)$$

Nous allons maintenant « recoller » $f_{p,q,c}$ (pour $z \geq 1$) avec une des fonctions sur $[0, 1]$ décrites dans le lemme 1. Notons que : $f(1) = 1$, $f'(1) = -pc - q(1-c)$ si bien que :

$$\left. \begin{array}{ll} c < 1 & \Rightarrow f'_{p,q,c}(1) < -p < 0 \\ c > 1 & \Rightarrow 0 > f'_{p,q,c}(1) > -p \end{array} \right\} \quad (\text{III},15)$$

D'après le lemme 1, il existe donc pour chaque (p, q, c) satisfaisant à (III,10) une fonction $g_{p,q,c}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ (sauf en $z = 1$ où $g_{p,q,c}$ admet des dérivées à gauche et à droite égales) telles que

$$g_{p,q,c}(z) = \begin{cases} K^{f'_{p,q,c}(1)} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ f_{p,q,c}(z) & \text{si } z \geq 1 \end{cases} \quad (\text{III},16)$$

Dans ces conditions, d'après (III,13), (III,14) et le lemme 1 : si $c_1 < 1$ alors $g_1 := g_{p,q,c_1}$ satisfait à :

$$-\frac{L g_1}{g_1}(z) \begin{cases} = \gamma_+ & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ \geq \frac{k(p)}{z^2} + \frac{c'}{z^{2+q-p}} & \text{si } z \geq 1 \end{cases} \quad (\text{III},17)$$

où :

$$\gamma_+ = \frac{\gamma^2(f'_{p,q,c_1}(1))}{2} \quad \text{et} \quad c' = (1 - c_1)(k(q) - k(p)) \quad (\text{III},18)$$

Si $c_2 > 1$ alors $g_2 := g_{p,q,c_2}$ satisfait à :

$$-\frac{L g_2}{g_2}(z) \begin{cases} = \gamma_- & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ \leq \frac{k(p)}{z^2} - \frac{c''}{z^{2+q-p}} & \text{si } z \geq 1 \end{cases} \quad (\text{III},19)$$

où :

$$\gamma_- = \frac{\gamma^2 (f'_{p,q,c_2}(1))}{2} \quad \text{et} \quad c'' = \frac{(c_2 - 1)(k(q) - k(p))}{c_2} \quad (\text{III},20)$$

De plus, d'après (III,15) et le lemme 1 on a : $\gamma_- < \gamma_+$.

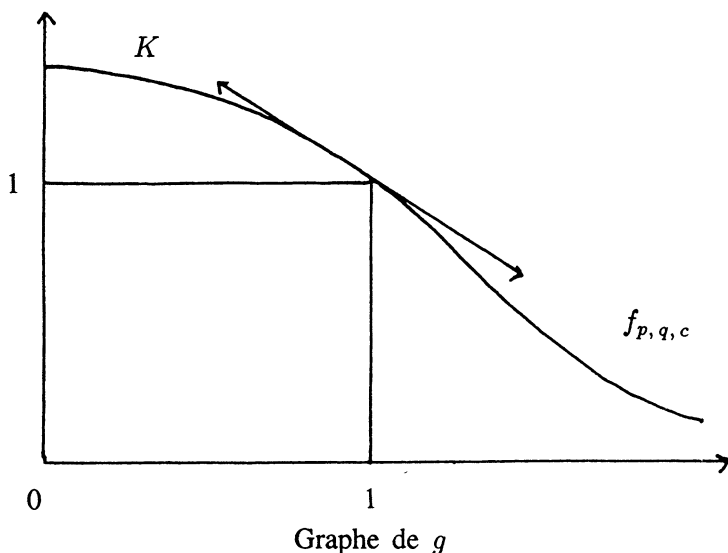


Fig. 2.

DÉFINITION. — On dira que le couple (l_1, l_2) forme un (p, q, c_1, c_2) -tube si :

$$l_1(z) = \begin{cases} \gamma_+ & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{k(p)}{z^2} + \frac{c'}{2z^{2+q-p}} & \text{si } z \geq 1 \end{cases} \quad (\text{III},21)$$

$$l_2(z) = \begin{cases} \gamma_- & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{k(p)}{z^2} - \frac{c''}{2z^{2+q-p}} & \text{si } z \geq 1 \end{cases} \quad (\text{III},22)$$

où les constantes γ_- , γ_+ , c' , c'' sont définies par (III,18) et (III,20).

Nous ferons sur l l'hypothèse :

(H) l appartient à un (p, q, c_1, c_2) -tube i.e. il existe un tube (l_1, l_2) comme ci-dessus tel que : $(\forall z \geq 0) l_2(z) < l(z) < l_1(z)$.

Notons que les inégalités ci-dessus sont strictes. Remarquons enfin que nous avons fait jouer au point $x_0 = 1$ un rôle particulier. Mais on pourrait choisir pour x_0 n'importe quel réel positif et définir ainsi un (p, q, x_0, c_1, c_2) -tube.

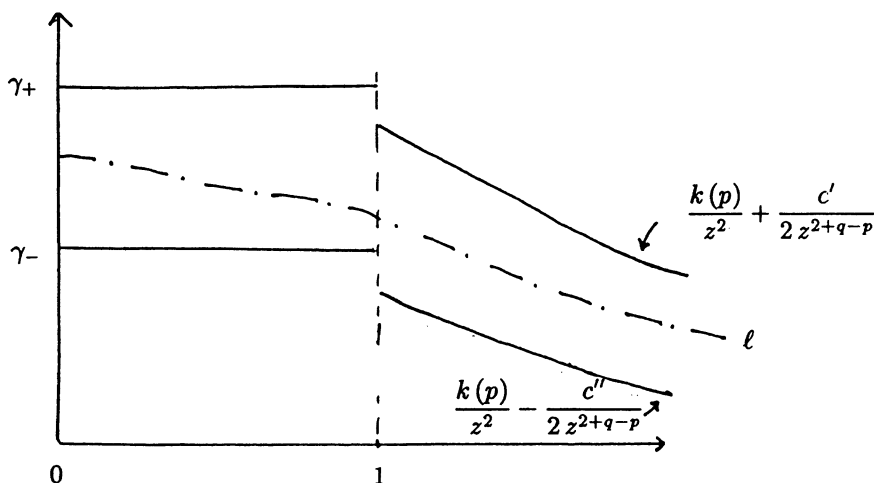


Fig. 3.

IV. ÉNONCÉ ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

1. THÉORÈME. — Soient x et y deux nombres réels ≥ 0 et soit $(X_{s,t}^{x,y})_{0 \leq s \leq t}$ le pont de Bessel de dimension $n > 2$ partant de x à l'instant 0 et arrivant à y à l'instant t . Soit l une fonction satisfaisant à l'hypothèse (H). Alors, quel que soit $y_0 \geq 0$, il existe une constante C (dépendant de l , y_0 , n et p , mais non de x et t) telle que :

$$\left. \begin{aligned} & (\forall t > 0, x \geq 0, 0 \leq y \leq y_0), \\ & C^{-1} \left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p \leq E \left(\exp \int_0^t l(X_{s,t}^{x,y}) ds \right) \\ & \leq C \left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},1)$$

2. Le processus espace-temps

Pour démontrer le théorème, on considère l'équation différentielle stochastique :

$$(E_{(x_0, s_0)}) \left\{ \begin{aligned} dX_s &= dB_s + \left[\frac{1}{2} + \varphi_\nu \left(\frac{X_s y}{t-s} \right) \right] \frac{ds}{X_s} - \frac{X_s}{t-s} ds \\ X_{s_0} &= x_0 \quad (0 \leq s_0 \leq s \leq t) \end{aligned} \right.$$

et le processus espace-temps associé $Y_s = (X_s, s)$ ($s_0 \leq s \leq t$). C'est un processus de Markov de générateur infinitésimal M :

$$\begin{aligned} M f(z, s) = & \frac{1}{2} f''_{z,z}(z, s) + \left[\frac{1}{2} + \varphi_\nu \left(\frac{zy}{t-s} \right) \right] \\ & \times \frac{1}{z} f'_z(z, s) - \frac{z}{t-s} f'_z(z, s) + f'_s(z, s) \quad (\text{IV},2) \end{aligned}$$

Le pont de Bessel $(X_{s,t}^{x,y})_{0 \leq s \leq t}$ est la solution de l'équation $(E_{(x,0)})$. Il sera simplement noté $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ dans la suite.

Soit maintenant $\psi : \mathbb{R}_+ \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors la formule d'Itô implique que :

$$\left(\psi(Y_s) \exp - \int_0^s \frac{M \psi}{\psi}(Y_u) du \right)_{0 \leq s \leq t}$$

est une martingale locale.

3. Démonstration de la minoration de $I_t(x, y)$

Soit g_2 la fonction définie par (III,16) et satisfaisant à (III,19) et (III,20) (avec $c_2 > 1$). Définissons $\psi_2 : \mathbb{R}_+ \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\psi_2(z, s) = (t-s)^p g_2(z) \quad (\text{IV},3)$$

Remarquant que $M f(z, s)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} M f(z, s) = & \frac{1}{2} f''_{z,z}(z, s) + \frac{n-1}{2z} f'_z(z, s) \\ & + \left[\varphi_\nu \left(\frac{zy}{t-s} \right) - \nu \right] \frac{1}{z} f'_z(z, s) \\ & - \frac{z}{t-s} f'_z(z, s) + f'_s(z, s) \quad (\text{IV},4) \end{aligned}$$

on montre à l'aide d'un calcul élémentaire que :

$$\left. \begin{aligned}
 & -\frac{M\psi_2}{\psi_2}(z, s) \\
 & = \frac{k(p) + p \left[\varphi_\nu \left(\frac{zy}{t-s} \right) - \nu \right]}{z^2} - \frac{(c_2 - 1)(k(q) - k(p))}{z^2(1 - c_2 + c_2 z^{q-p})} \\
 & \quad - \frac{(c_2 - 1) \left[\varphi_\nu \left(\frac{zy}{t-s} \right) - \nu \right] (q - p)}{z^2(1 - c_2 + c_2 z^{q-p})} \\
 & \quad + \frac{1}{(t-s)} \frac{(c_2 - 1)(q - p)}{(1 - c_2 + c_2 z^{q-p})} \quad \text{si } z \geq 1 \\
 & -\frac{M\psi_2}{\psi_2}(z, s) \\
 & = \gamma_- - \frac{\left[\varphi_\nu \left(\frac{zy}{t-s} \right) - \nu \right] K^{\omega'_2}(z)}{z K^{\omega_2}(z)} \\
 & \quad + \frac{z K^{\omega'_2}(z)}{(t-s) K^{\omega_2}(z)} + \frac{p}{t-s} \quad \text{si } z \leq 1
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},5)$$

où

$$\omega_2 = f'_{p,q,c_2}(1) \quad (\text{IV},6)$$

LEMME 2 (comportement de φ_ν):

$$(i) \quad \varphi_\nu \text{ est une fonction croissante} \quad (\text{IV},7)$$

$$(ii) \quad \varphi_\nu(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \nu + \frac{z^2}{2(\nu+1)} \quad (\text{IV},8)$$

$$(iii) \quad \varphi_\nu(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} z \quad (\text{IV},9)$$

Démonstration du lemme 2. — Les formules relatives aux fonctions modifiées de Bessel :

$$\left. \begin{aligned}
 2I'_\nu(z) &= I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) \\
 \frac{2\nu}{z} I_\nu(z) &= I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z)
 \end{aligned} \right\}$$

montrent que $\varphi_\nu(z) = \frac{zI'_\nu(z)}{I_\nu(z)} = \nu + \frac{zI_{\nu+1}(z)}{I_\nu(z)}$.

Le point (ii) en résulte aussitôt.

Par ailleurs le comportement asymptotique de I_ν à l'infini :

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]$$

donne immédiatement le point (iii) du lemme.

Pour démontrer la croissance de φ_ν , on montre sans peine, en utilisant les formules ci-dessus, que :

$$\varphi'_\nu(z) = \frac{z(I_\nu^2 - I_{\nu-1}I_{\nu+1})}{I_\nu^2},$$

et un calcul direct prouve que $I_\nu^2 \geq I_{\nu-1}I_{\nu+1}$.

Ce lemme implique en particulier que la fonction $z \mapsto \frac{\varphi_\nu(z) - \nu}{z^2}$ est positive et bornée par une constante C sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit, d'après l'hypothèse (H), que :

$$\left. \begin{aligned} & (\forall z \geq 1) \\ & -\frac{M\psi_2}{\psi_2}(z, s) \leq l(z) + \frac{c_3 y^2}{(t-s)^2} + \frac{c_4}{z^{q-p}} \left[\frac{1}{t-s} - \frac{c_5}{z^2} \right] \\ & (c_3, c_4, c_5 > 0) \\ & \leq l(z) + \frac{c_3 y^2}{(t-s)^2} + \frac{c_4}{(t-s)z^{q-p}} \\ & \times \mathbf{1} \left(\frac{c_5}{z^2} \leq \frac{1}{t-s} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},10)$$

D'autre part, remarquant que la fonction $z \mapsto \frac{zK^{\omega'_2}(z)}{K^{\omega_2}(z)}$ est négative et bornée sur $[0, 1]$, on a :

$$\left. \begin{aligned} & (\forall z \in [0, 1]) \\ & -\frac{M\psi_2}{\psi_2}(z, s) \leq \gamma_- + \frac{c_6 y^2}{(t-s)^2} + \frac{c_7}{t-s} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},11)$$

De (IV,10) et (IV,11) on déduit que si a est une constante choisie assez grande alors :

$$\left. \begin{aligned} & (\forall z \geq 0) \quad (\forall s \leq t-a) \\ & -\frac{M\psi_2}{\psi_2}(z, s) \leq l(z) + \frac{c_8 y^2}{(t-s)^2} + \frac{c_4}{(t-s)z^{q-p}} \\ & \times \mathbf{1} \left(\frac{c_5}{z^2} \leq \frac{1}{t-s}; z \geq 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},12)$$

Le théorème d'arrêt appliqué à la martingale

$$\psi_2(X_s, s) \exp - \int_0^s \frac{M \psi_2}{\psi_2}(X_u, u) du$$

donne alors :

$$\psi_2(x, 0) = E \left\{ \psi_2(X_{t-a}, t-a) \exp \left(- \int_0^{t-a} \frac{M \psi}{\psi}(X_s, s) ds \right) \right\} \quad (\text{IV},13)$$

Notant que $\frac{1}{(1+z)^p} \leq g_2(z) \leq \frac{C}{(1+z)^p}$, on obtient avec (IV,12) :

$$\begin{aligned} \frac{t^p}{(1+x)^p} &\leq C a^p \cdot E \left\{ \exp \left[+ \int_0^{t-a} l(X_s) ds + \int_0^{t-a} \frac{c_8 y^2}{(t-s)^2} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{t-a} \frac{c_4}{(t-s) X_s^{q-p}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \mathbf{1} \left(\frac{c_5}{X_s^2} \leq \frac{1}{t-s} \right) ds \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV},14)$$

Or :

$$\left. \begin{aligned} &\exp \int_0^{t-a} \frac{c_8 y^2}{(t-s)^2} ds = \exp \left[c_8 y^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{t} \right) \right] \leq C(a, y) \\ &\exp \int_0^{t-a} \frac{c_4}{(t-s) X_s^{q-p}} \mathbf{1} \left(\frac{c_5}{X_s^2} \leq \frac{1}{t-s} \right) ds \\ &\leq \exp \int_0^{t-a} \frac{c'_4 ds}{(t-s)^{1+\frac{q-p}{2}}} \leq C(a) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},15)$$

D'après (IV,14) et (IV,15) on a :

$$E \left\{ \exp \left(\int_0^t l(X_s) ds \right) \right\} \geq C(a, y) \frac{t^p}{(1+x)^p} \quad (\forall x \geq 0) \quad (\forall t \geq a) \quad (\text{IV},16)$$

Mais d'autre part, comme l est une fonction positive, on a :

$$(\forall x \geq 0) \quad (\forall t \geq 0) \quad E \left\{ \exp \left(\int_0^t l(X_s) ds \right) \right\} \geq 1 \quad (\text{IV},17)$$

Les relations (IV,16) et (IV,17) permettent ensuite aisément d'obtenir la minoration de $I_t(x, y)$ dans (IV,1).

4. Démonstration de la majoration de $I_t(x, y)$

(i) Puisque l est une fonction bornée, il est clair que :

$$(\forall a > 0) \quad \exp \left(\int_{t-a}^t l(X_s) ds \right) \leq C(a) \quad (\text{IV},18)$$

Il suffit donc de majorer $E \left\{ \exp \left(\int_0^{t-a} l(X_s) ds \right) \right\}$ pour $t \geq a$.

(ii) Soit $0 < \chi' < a$ et soit $\Gamma_{\chi'} = \left\{ (z, s) : 0 \leq s \leq t-a \text{ et } \frac{t-s}{z} \leq \chi' \right\}$

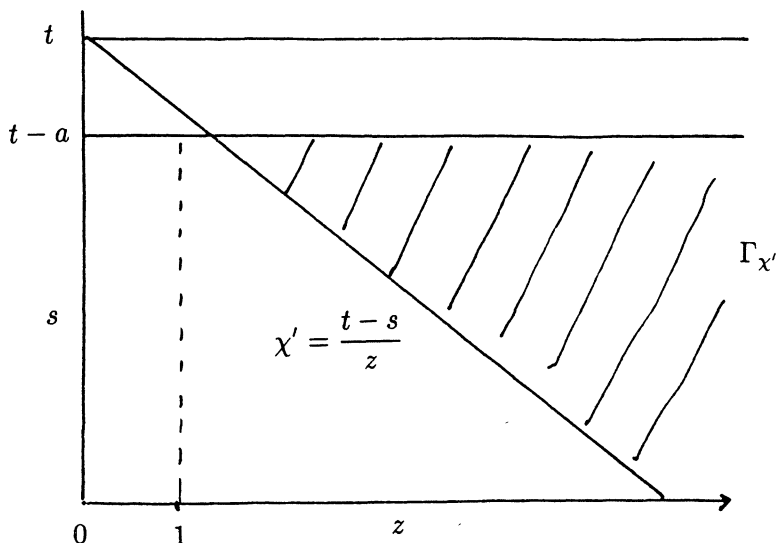


Fig. 4.

D'après (H) il existe une constante C telle que $l(z) \leq \frac{C}{(1+z)^2}$ et donc :

$$\begin{aligned} & \exp \int_0^{t-a} l(X_s) \mathbf{1}_{\Gamma_{\chi'}}(X_s, s) ds \\ & \leq \exp \int_0^{t-a} \frac{C}{(1+X_s)^2} \mathbf{1} \left(\frac{t-s}{X_s} \leq \chi' \right) ds \\ & \leq \exp \int_0^{t-a} \frac{C \chi'^2}{(t-s+\chi')^2} ds \leq C(\chi') \end{aligned} \quad (\text{IV},19)$$

(iii) Soit maintenant $0 < \chi < \chi'$ et τ le temps d'arrêt :

$$\tau = \inf \left\{ s \geq 0 : t - s \leq a \text{ ou } \frac{t - s}{X_s} = \chi \right\} \quad (\text{IV},20)$$

Si $x \geq \frac{t}{\chi}$, il est clair d'après le point (ii) que

$$E \left(\exp \int_0^\tau l(X_s) ds \right) \leq C(\chi). \quad (\text{IV},21)$$

D'autre part, si $x \leq \frac{t}{\chi}$, l'argument utilisé dans la démonstration de la minoration de $I_t(x, y)$ prouve que dans ce cas :

$$E \left(\exp \int_0^\tau l(X_s) ds \right) \leq C(a, \chi) \frac{t^p}{(1+x)^p} \quad (\text{IV},22)$$

En effet, il suffit de remplacer g_2 et ψ_2 par g_1 et ψ_1 ($c_1 < 1$), de constater ensuite que pour a assez grand, fixé :

$$\left. \begin{aligned} & (\forall z \geq 0) \quad (\forall s \leq t - a) \\ & -\frac{M\psi_1}{\psi_1}(z, s) \geq l(z) - \frac{c_3}{(t-s)z^{q-p}} \\ & \times \mathbf{1} \left(\frac{c_4}{z^2} \leq \frac{1}{t-s}; z \geq 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},23)$$

et d'appliquer alors le théorème d'arrêt à la martingale $\psi_1(X_s, s) \exp - \int_0^s \frac{M\psi_1}{\psi_1}(X_u, u) du$:

$$\psi_1(x, 0) = E \left\{ \psi_1(X_\tau, \tau) \exp \left(- \int_0^\tau \frac{M\psi_1}{\psi_1}(X_s, s) ds \right) \right\} \quad (\text{IV},24)$$

Finalement, pour obtenir (IV,22), on utilise le fait que

$$\psi_1(x, 0) \leq \frac{C t^p}{(1+x)^p} \quad \text{et} \quad \psi_1(X_\tau, \tau) \geq C \chi^p \quad (\text{IV},25)$$

Les relations (IV,21) et (IV,22) obtenues respectivement pour $x \geq \frac{t}{\chi}$ et $x \leq \frac{t}{\chi}$ se résument comme suit :

$$E \left\{ \exp \left(\int_0^\tau l(X_s) ds \right) \right\} \leq C(a, \chi) \left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p \quad (\text{IV},26)$$

[De plus, (IV,23) prouve que la constante $C(a, \chi)$ est en fait indépendante de $y \in \mathbb{R}_+$.]

(iv) Soit (x_0, s_0) un point tel que $\frac{t-s_0}{x_0} = \chi'$ et $s_0 \leq t-a$. Notons $(X_s^{(x_0, s_0)})_{s_0 \leq s \leq t}$ la solution de l'équation différentielle $(E_{(x_0, s_0)})$ (cf. IV.2). Alors la même démonstration qu'au point (iii) prouve que si

$$\tau = \inf \left\{ s \geq s_0 : s \leq t-a \text{ ou } \frac{t-s}{X_s^{(s_0, x_0)}} \leq \chi \right\} \quad (\text{IV}, 27)$$

alors

$$E \left\{ \exp \left(\int_{s_0}^{\tau} l(X_s^{(s_0, x_0)}) ds \right) \right\} \leq C \left(\frac{\chi'}{\chi} \right)^p \quad (\text{IV}, 28)$$

[On observe ici que $\psi_1(s_0, x_0) = (t-s_0)^p \cdot \left(\frac{c_1}{x_0^p} + \frac{1-c_1}{x_0^q} \right) \leq \chi'^p$ car $x_0 \geq 1$ et $c_1 < 1$, tandis que $\psi_1(X_\tau^{(s_0, x_0)}, \tau) \geq C \chi^p$].

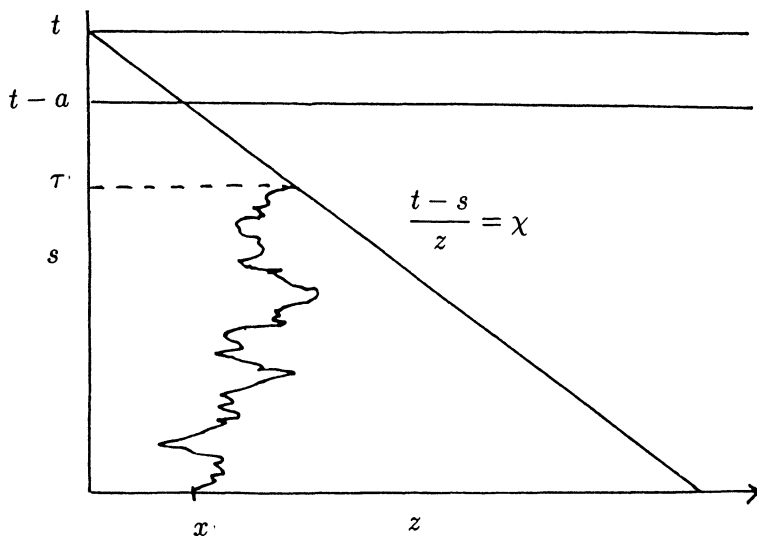


Fig. 5.

(v) LEMME 3 :

$$\left(\frac{t-s}{X_s} \right)^{n-2} \text{ est une sur martingale positive.}$$

Démonstration du lemme 3. — On considère la fonction $\theta(z, s) = \left(\frac{t-s}{X_s} \right)^{n-2}$

Un calcul élémentaire prouve que :

$$M\theta(z, s) = -(n-2) \left[\varphi_\nu \left(\frac{zy}{t-s} \right) - \nu \right] \cdot \frac{(t-s)^{n-2}}{z^n} \leq 0 \quad (\text{IV},29)$$

Le résultat en découle aussitôt.

Considérons maintenant la suite de temps d'arrêt définis par :

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= 0 \\ \tau_1 &= \tau = \inf \left\{ s \leq t-a; \frac{t-s}{X_s} = \chi \right\} \\ \tau_2 &= \inf \left\{ s \geq \tau_1; s \leq t-a \text{ ou } \frac{t-s}{X_s} \geq \chi' \right\} \\ &\dots \\ \tau_{2k+1} &= \inf \left\{ s \geq \tau_{2k}; s \leq t-a \text{ ou } \frac{t-s}{X_s} \leq \chi \right\} \\ \tau_{2k+2} &= \inf \left\{ s \geq \tau_{2k+1}; s \leq t-a \text{ ou } \frac{t-s}{X_s} \geq \chi' \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},30)$$

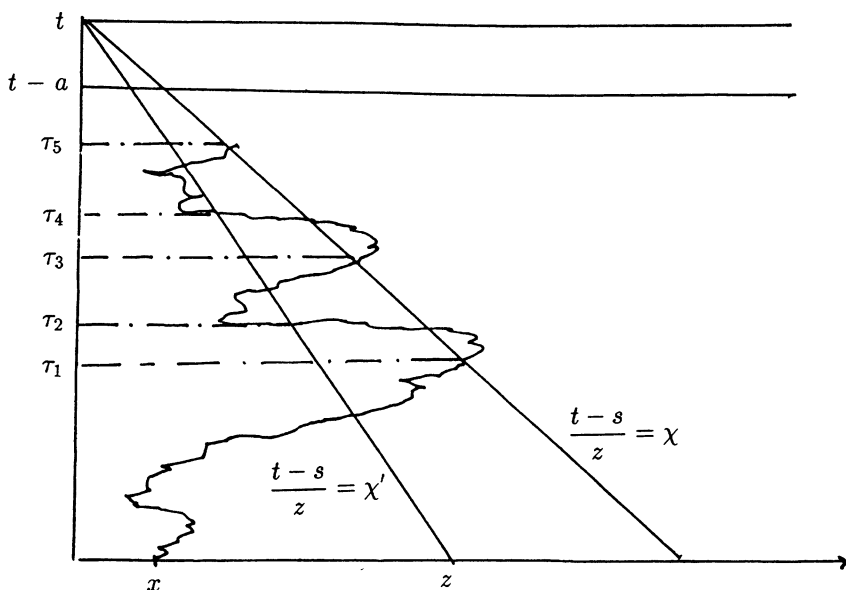


Fig. 6.

Il résulte alors des points (i) et (ii) qu'il suffit, pour démontrer la majoration annoncée, de majorer :

$$E \left\{ \exp \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\tau_{2k}}^{\tau_{2k+1}} l(X_s) ds \right\} \quad (\text{IV},31)$$

Pour cela, nous allons estimer le nombre D de descentes du processus $\frac{t-s}{X_s}$ sur l'intervalle $[\chi, \chi']$. Mais il est clair que D est aussi le nombre de descentes du processus $\left(\frac{t-s}{X_s}\right)^{n-2}$ sur $[\chi^{n-2}, \chi'^{n-2}]$. Le lemme 3 et l'inégalité de Dubins pour les surmartingales positives (cf. [D.M.], p. 21) prouvent que :

$$P\{D = r\} \leq C \left(\frac{\chi}{\chi'}\right)^{r(n-2)} \quad (\text{IV},32)$$

La démonstration de la majoration s'achève alors comme suit :

$$\begin{aligned} & E \left\{ \exp \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\tau_{2k}}^{\tau_{2k+1}} l(X_s) ds \right\} \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty} E \left\{ \exp \left(\sum_{k=0}^r \int_{\tau_{2k}}^{\tau_{2k+1}} l(X_s) ds \right) \mathbf{1}_{(D=r)} \right\} \\ &\leq \sum_{r=0}^{+\infty} C(a, \chi) \left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p \cdot \left[C \left(\frac{\chi'}{\chi} \right)^p \right]^r \left(\frac{\chi}{\chi'} \right)^{r(n-2)} \\ &\leq C(a, \chi) \left(\frac{1+x+t}{1+x} \right)^p \sum_{r=0}^{+\infty} \left[C \left(\frac{\chi}{\chi'} \right)^{n-p-2} \right]^r \end{aligned} \quad (\text{IV},33)$$

d'après la propriété de Markov, les inégalités (IV,26) pour $r = 0$ et (IV,28) pour $r \geq 1$ et l'inégalité de Dubins (IV,32). Mais la série (IV,33) converge puisque $p < \frac{n-2}{2} < n-2$ et $\frac{\chi}{\chi'}$ peut être choisi assez petit pour que $C \left(\frac{\chi}{\chi'} \right)^{n-p-2} < 1$.

Ceci termine la démonstration du théorème.

Remarque. – Nous avons affirmé que dans les situations hyperboliques [i.e. : $H_{\alpha\beta} f(r) = \frac{1}{2} f''(r) + \gamma_{\alpha,\beta}(r) f'_r$ avec $\gamma_{\alpha,\beta}(r) = \alpha \coth r + 2\beta \coth 2r$] notre théorème s'applique i.e. que l'hypothèse H (appartenance de l à un tube) est satisfaite. Cette affirmation dépend en fait de calculs numériques fastidieux que nous avons effectués sur ordinateur et qui seraient pénibles à reproduire ici.

V. APPENDICE : ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE SATISFAITE PAR LE PONT DE BESSEL

Le but de cette section est de prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 1 (cf. [R.Y.], p. 428). — Soient n un nombre réel > 2 et $\nu = \frac{n}{2} - 1$. Soient $x, y \geq 0$ et $t > 0$. Soit $(B_s)_{s \geq 0}$ un mouvement brownien (avec $B_0 = 0$). Le pont de Bessel de dimension n , partant de x à l'instant 0 et arrivant en y à l'instant t , noté ici $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$, vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$(E) \begin{cases} dX_s = dB_s + \left[\frac{1}{2} + \varphi_\nu \left(\frac{X_s y}{t-s} \right) \right] \frac{ds}{X_s} - \frac{X_s}{t-s} ds & (0 \leq s \leq t) \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Démonstration de la proposition 1. — 1. Notons P_x la loi du processus de Bessel de dimension n partant de x et $P_{x,y}^t$ la loi du pont de Bessel $(X_{s,t}^{x,y})_{0 \leq s \leq t}$. Rappelons que la densité du processus de Bessel de dimension n vaut :

$$p_t(x, y) = \frac{1}{t} \left(\frac{y}{x} \right)^\nu y \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2t} \right) I_\nu \left(\frac{xy}{t} \right) \quad (V,1)$$

et pour $x = 0$ cette densité devient :

$$p_t(0, y) = 2^{-\nu} t^{-(\nu+1)} \Gamma(\nu+1)^{-1} y^{2\nu+1} \exp \left(-\frac{y^2}{2t} \right) \quad (V,2)$$

2. Montrons maintenant que

$$P_{x,y}^t = h(w_s, s) \cdot P_x \quad \text{sur } \mathcal{F}_s = \sigma(w_u; 0 \leq u \leq s) \quad (s \leq t)$$

avec

$$h(z, s) = \frac{p_{t-s}(z, y)}{p_t(x, y)} \quad (V,3)$$

En effet, d'abord on calcule $EP_x \{F(w_u, u \leq s) \Phi(w_t)\}$ en conditionnant par rapport à $\sigma(w_t)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} & EP_x \{F(w_u, u \leq s) \Phi(w_t)\} \\ &= \int \Phi(y) EP_{x,t}^t \{F(w_u, u \leq s)\} p_t(x, y) dy \end{aligned} \quad (V,4)$$

De même, en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_s$, on montre que :

$$\begin{aligned} EP_x \{F(w_u, u \leq s) \Phi(w_t)\} \\ = \int \Phi(y) EP_x \{F(w_u, u \leq s) p_{t-s}(w_s, y)\} dy \end{aligned} \quad (\text{V},5)$$

Les fonctions Φ et F étant quelconques, on obtient (V,3) par identification dans (V,4) et (V,5).

3. Remplaçant (V,1) dans (V,3) on obtient :

$$h(z, s) = \frac{t x^\nu \exp\left(-\frac{z^2 + y^2}{2(t-s)}\right) I_\nu\left(\frac{zy}{t-s}\right)}{(t-s) z^\nu \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right)} \quad (\text{V},6)$$

Posant alors

$$\left. \begin{aligned} f_1(z, s) &= \frac{z^2 + y^2}{2(t-s)} \\ f_2(z, s) &= \log\left(I_\nu\left(\frac{zy}{t-s}\right)\right) \\ f_3(z) &= \log z \end{aligned} \right\} \quad (\text{V},7)$$

on a :

$$\begin{aligned} h(w_s, s) &= \frac{t}{t-s} \\ &\times \exp\{-f_1(w_s, s) + f_1(x, 0) + f_2(w_s, s) \\ &\quad - f_2(x, 0) - \nu f_3(w_s) + \nu f_3(x)\} \end{aligned}$$

Une application de la formule d'Itô aux fonctions f_1 , f_2 et f_3 (sous P_x le processus coordonnées (w_s) vérifie : $dw_s = d\beta_s + \frac{n-1}{2w_s} ds$, (β_s) étant un mouvement Brownien) montre que :

$$h(w_s, s) = \exp\left\{\int_0^s f(w_u, u) d\beta_u - \frac{1}{2} \int_0^s f^2(w_u, u) du\right\} \quad (\text{V},8)$$

où

$$f(w_u, u) = -\frac{w_u}{t-u} + \left(\varphi_\nu\left(\frac{w_u y}{t-u}\right) - \nu\right) \frac{1}{w_u} \quad (\text{V},9)$$

Remarquons que l'on aura besoin durant ce calcul de l'équation différentielle satisfaite par I_ν :

$$I_\nu''(z) + \frac{1}{z} I_\nu'(z) - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) I_\nu'(z) = 0 \quad (\text{V},10)$$

La formule de Girsanov (voir p. ex. [R.Y.]) permet alors d'achever la preuve.

RÉFÉRENCES

- [D.] E. B. DAVIES, Heat Kernels and Spectral Theory, *Cambridge tracts in Mathematics*, 92, Cambridge University Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sidney, 1989.
- [D.M.] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris, vol. I, 1976, vol. II, 1980, vol. III, 1983, vol. IV, 1987.
- [G.] I. V. GIRSANOV, On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures, *Theor. Prob. Appl.*, vol. 5, 1960, p. 285-301.
- [I.W.] N. IKEDA et S. WATANABE, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, Oxford, New York; Kodansha Ltd., Tokyo 1989.
- [K.K.R.] O. KAVIAN, G. KERKYACHARIAN et B. ROYNETTE, Quelques remarques sur l'ultracontractivité, *Journal of Functional Analysis*, vol. 111, n° 1, 1993, p. 155-196.
- [R.Y.] D. REVUZ et M. YOR, Continuous Martingales and Brownian Motion, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 293, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.
- [W.W.] E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 1927.
- [Y.] M. YOR, Loi de l'indice du lacet Brownien, et distribution de Hartman Watson, *ZW*, vol. 53, 1980, p. 71-95.

(Manuscrit reçu le 19 mai 1993;
révisé le 17 décembre 1993.)