ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PIERRE MATHIEU

Inégalités en norme L_p pour le produit des suprema de plusieurs martingales arrêtées à des temps aléatoires. Inégalités avec poids

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, nº 4 (1993), p. 467-484
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_4_467_0>

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 29, n° 4, 1993, p. 467-484. *Probabilités et Statistiques*

Inégalités en norme L_p pour le produit des suprema de plusieurs martingales arrêtées à des temps aléatoires. Inégalités avec poids

par

Pierre MATHIEU

Laboratoire de Probabilités,
Université Pierre-et-Marie-Curie, Tour 56,
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05,
France.

RÉSUMÉ. — Soient $(M_t, t \geqq 0)$ et $(N_t, t \geqq 0)$, deux martingales continues définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathscr{F}_t, t \geqq 0), \mathbb{P})$. On suppose que $M_0 = N_0 = 0$.

Nous discutons plusieurs généralisations des inégalités de Burkholder-Gundy quand on considère, à la place de $\mathbb{E}[\sup_{t \leqq T} |M_t|^p]$ et $\mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{p/2}]$, des quantités telles que $\mathbb{E}[\sup_{t \leqq K} |M_t|^p \sup_{s \leqq L} |N_s|^q]$ et $\mathbb{E}[\langle M \rangle_K^{p/2} \langle N \rangle_L^{q/2}]$. Ici K et L désignent des temps d'arrêt ou, plus généralement, des variables $\mathscr{F}_\infty$-mesurables positives.

Nous prouvons également un analogue des inégalités de Burkholder-Gundy « avec poids », c'est-à-dire sous une nouvelle probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$.

ABSTRACT. — Let $(M_t, t \geqq 0)$ and $(N_t, t \geqq 0)$ be two continuous martingales defined on a filtered probability space $(\Omega, (\mathscr{F}_t, t \geqq 0), \mathbb{P})$. We suppose that $M_0 = N_0 = 0$.

We discuss different extensions of the Burkholder-Gundy inequalities, when, instead of $\mathbb{E}[\sup_{t \leqq T} |M_t|^p]$ and $\mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{p/2}]$, we consider such quantities

Classification A.M.S. : 60 G 40.

as $\mathbb{E}[\sup_{t \leqq K} |M_t|^p \sup_{s \leqq L} |N_s|^q]$ and $\mathbb{E}[\langle M \rangle_K^{p/2} \langle N \rangle_L^{q/2}]$. Here K and L are stopping times or any positive $\mathscr{F}_\infty$-mesurable variables. We also obtain some weighted norm inequalities, that is Burkholder-Gundy like inequalities under another probability measure which is absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}$.

INTRODUCTION

Soit $(\Omega, \mathscr{G}, (\mathscr{F}_t, t \geqq 0), \mathbb{P})$, un espace de probabilité filtré.

On suppose $\mathscr{F}_\infty = \mathscr{G}$, et on note $\mathscr{F}$, la filtration $(\mathscr{F}_t)$.

Soient $(M_t, t \geqq 0)$ et $(N_t, t \geqq 0)$, deux $\mathscr{F}$-martingales continues, issues de 0. On notera $\langle M \rangle$ et $\langle N \rangle$ les processus croissants associés à M et N, et $M_t^* = \sup_{u \leqq t} |M_u|$, $N_s^* = \sup_{v \leqq s} |N_v|$.

Soit A, une variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable, positive, telle que $\mathbb{E}[A] = 1$.

Soient F et G, deux fonctions croissantes modérées, *i.e.* F est continue à droite, croissante, nulle en 0, telle que $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$, et la fonction taux $f(\alpha) = \sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)}$ est finie pour $\alpha \geqq 1$. On appelle alors exposant de F la quantité $i = \frac{\log f(2)}{\log 2}$. Dans la suite, g est la fonction taux de G, et j son exposant.

(i) Les inégalités de Burkholder-Gundy (B.G.) (*Cf.* [Burk]) nous enseignent qu'il existe une constante $C(f)$, indépendante de M, telle que pour tout $\mathscr{F}$-temps d'arrêt T on ait:

$$C(f)^{-1}\, \mathbb{E}[F(\sqrt{\langle M \rangle_T})] \leqq \mathbb{E}[F(M_T^*)] \leqq C(f)\, \mathbb{E}[F(\sqrt{\langle M \rangle_T})] \tag{1}$$

(ii) Nous cherchons ici des inégalités analogues de B.G.

– d'une part pour le produit des supremas de M et N: $F(M_T^*)\, G(N_T^*)$,

– d'autre part pour les processus $F(M_T^*)$ et $F(\sqrt{\langle M \rangle_T})$ sous la probabilité de densité A relativement à $\mathbb{P}$.

(iii) Examinons d'abord le premier problème: quel type d'inégalités pouvons-nous espérer?

On déduit facilement de (1) que, si M et N sont indépendantes, et que T (resp. S) est un temps d'arrêt pour la filtration engendrée par M (resp. N), alors on a:

$$\mathbb{E}[F(M_T^*)\, G(N_S^*)] \leqq C(f, g)\, \mathbb{E}[F(\sqrt{\langle M \rangle_T})\, G(\sqrt{\langle N \rangle_S})] \tag{2}$$

où $C(f, g)$ est une constante ne dépendant que de f et g.

(iv) Cependant l'inégalité (2) ne s'étend pas au cas général, quand T et S sont des $\mathscr{F}$-temps d'arrêt quelconques:

Supposons que (2) soit toujours vérifiée et déduisons-en une contradiction. On choisit pour M et N deux mouvements browniens réels indépendants, $T=1$, S, temps d'arrêt mesurable par rapport à la tribu engendrée par M, $F(x)=G(x)=x$.

On obtient alors:

$$\mathbb{E}[M_1^* N_S^*] \leqq C\,\mathbb{E}[\sqrt{S}]$$

Donc, après scaling sur N:

$$\mathbb{E}[\sqrt{S}\,|M_1|] \leqq C\,\mathbb{E}[\sqrt{S}]$$

On prend maintenant $S=1+\lambda^2 1_\Gamma$, où $\Gamma \in \sigma(M_u, u \leqq 1)$, et 1_Γ et $1(\Gamma)$ désignent l'indicatrice de Γ.

On fait tendre λ vers l'infini.

D'où:

$$\mathbb{E}[|M_1|\,1_\Gamma] \leqq C\,\mathbb{E}[1_\Gamma]$$

Donc

$$\|M_1\|_\infty < \infty$$

ce qui est impossible.

(Voir A.1.*a* pour un autre exemple.)

(v) Il nous faut donc affaiblir (2).

Nous cherchons à établir des inégalités de la forme:

$$\mathbb{E}[F(M_T^*)\,G(N_S^*)] \leqq C\,\|H(\sqrt{\langle M\rangle_T}, \sqrt{\langle N\rangle_S})\|_\varphi$$

où H est une fonction de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}_+$ convenablement associée à F et G, et φ, une fonction de Young convenable.

Rappelons que φ est une fonction de Young si $\varphi(x)=\int_0^x u(s)\,ds$, où u est continue à gauche, croissante, $u(0)=0$, $u>0$ sur $]0, \infty[$ et $u(\infty)=\infty$.

Nous noterons $\|X\|_\varphi = \inf\left\{\lambda>0;\ \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{|X|}{\lambda}\right)\right] \leqq 1\right\}$, la norme de Luxembourg de la variable X.

La conjuguée de φ est la fonction de Young $\psi(x)=\int_0^x v(t)\,dt$ où $v(t)=\sup\{s;\ u(s)<t\}$.)

(vi) D'autre part, le contre-exemple donné en (iv), et la démonstration de la proposition A.1 (Voir partie A) suggèrent d'introduire des temps aléatoires plus généraux que les temps d'arrêt, incluant en particulier les « temps » de la forme 1_Γ pour $\Gamma \in \mathscr{G}$.

d'où la

DÉFINITION. — On appelle *temps aléatoire* toute variable aléatoire positive, $\mathscr{G}$-mesurable.

(vii) A la suite de ces tatonnements nous pouvons énoncer notre premier résultat :

THÉORÈME A. — *Soit* (φ, ψ), *un couple de fonctions de Young conjuguées. Soit* $\mathscr{E}$, *une variable exponentielle d'espérance égale à* 1.

Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $C(f, g, \varepsilon)$, *ne dépendant que de* f, g *et* ε, *telle que, pour tout couple de temps aléatoires* (K, L), *on ait* :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F(M_K^*)\,G(N_L^*)] &\leqq C(f, g, \varepsilon)\,\|\mathscr{E}^{(i+j)/2}\|_\psi\,\|F(\sqrt{\langle M\rangle_K})\,G(\sqrt{\langle N\rangle_L})\\ &\qquad (1+|\log F(\sqrt{\langle M\rangle_K})|^\varepsilon+|\log G(\sqrt{\langle N\rangle_L})|^\varepsilon)\|_\varphi \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F(\sqrt{\langle M\rangle_K})\,G(\sqrt{\langle N\rangle_L})] &\leqq C(f, g, \varepsilon)\,\|\mathscr{E}^{(i+j)/2}\|_\psi\,\|F(M_K^*)\,G(N_L^*)\\ &\qquad (1+|\log F(M_K^*)|^\varepsilon+|\log G(N_L^*)|^\varepsilon)\|_\varphi \qquad (3')\end{aligned}$$

(viii) Nous nous intéressons maintenant aux inégalités avec poids.

Soit $\tilde{\mathbb{P}}$, la probabilité de densité A relativement à $\mathbb{P}$.

Différents auteurs (*Cf.* [Muck], [I.K], [Sek] par exemple) ont montré que si la martingale $(\mathbb{E}[A\,\|\,\mathscr{F}_t],\ t>0)$ satisfait certaines hypothèses, alors les inégalités B.G. restent valables sous $\tilde{\mathbb{P}}$. Cependant, les résultats de ces auteurs ne s'appliquent que si $A>0$ p.s.

Nous voudrions pouvoir choisir $A=\mathbb{P}[\Gamma]^{-1}\,1_\Gamma$ où $\Gamma\in\mathscr{G}$ et $\mathbb{P}[\Gamma]>0$.

Remarquons qu'alors $\mathbb{E}[F(M_1^*)\,A]=\mathbb{E}[F(M_{1_\Gamma}^*)]$. Nous sommes donc, ici aussi, amenés à considérer des temps aléatoires généraux, et nous ne pouvons espérer des inégalités aussi fortes que (1).

(ix) M. Yor ([Yor]) et M. Barlow, S. Jacka et M. Yor ([B-J-Y]) montrent que si $\eta>1$, il existe une constante $C(f, \eta)$, telle que, pour tout temps aléatoire L, on ait :

$$\mathbb{E}[F(M_L^*)]\leqq C(f, \eta)\,\|F(\sqrt{\langle M\rangle_L})\|_\eta$$

Donc, si $A=\mathbb{P}[\Gamma]^{-1}\,1_\Gamma$, alors il existe une constante, $C(f, A, \eta)$, telle que pour tout temps aléatoire L, on ait :

$$\mathbb{E}[F(M_L^*)\,A]\leqq C(f, A, \eta)\,\mathbb{E}[F(\sqrt{\langle M\rangle_L})^\eta\,A]^{1/\eta} \qquad (4)$$

Il s'agit bien d'une inégalité avec poids.

Nous cherchons sous quelles hypothèses sur A l'inégalité (4) subsiste.

(x) Remarquons qu'il ne suffit pas que $\mathbb{E}[A]=1$ pour assurer la validité de (4).

En effet, soit $(B_t,\ t\geqq 0)$, un mouvement brownien réel issu de 0.

Posons $h(x)=x^{-2}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)1_{|x|\geqq 1}$.

Alors

$$\mathbb{E}[h(B_1)]<+\infty$$

Soit $A=\mathbb{E}[h(B_1)]^{-1}h(B_1)$.

On vérifie que $E[B_1^2 A]=+\infty$.

Donc, avec ce choix de A, l'inégalité (4) est fausse pour $F(x)=x^2$, $L=1$ et $M=B$:

Pour tout $\eta>1$,

$$\sup_{A\geqq 0,\,\mathbb{E}[A]=1}\ \sup_{M}\frac{\mathbb{E}[(M_1^*)^2 A]}{\mathbb{E}[(\langle M\rangle_1)^{\eta/2}A]^{1/\eta}}=+\infty$$

Il en est de même pour $F(x)=x$, $L=1$ et $M=B$.

(xi) Cependant nous prouvons le

THÉORÈME B. — *Supposons qu'il existe* $\delta>0$ *tel que* $\mathbb{E}[A^{1+\delta}]<+\infty$.

Alors, pour tout $\eta>1$, *il existe une constante,* $C(f, A, \eta)$, *ne dépendant que de* f, A, *et* η, *telle que pour tout temps aléatoire* L, *on ait*:

$$\mathbb{E}[F(M_L^*)A]\leqq C(f, A, \eta)\,\mathbb{E}[F(\sqrt{\langle M\rangle_L})^{\eta}A]^{1/\eta} \tag{5}$$

$$\mathbb{E}[F(\sqrt{\langle M\rangle_L})A]\leqq C(f, A, \eta)\,\mathbb{E}[F(M_L^*)^{\eta}A]^{1/\eta} \tag{5'}$$

Les techniques utilisées pour établir les théorèmes A et B sont largement inspirées des travaux [Yor] et [B-J-Y]. La partie A est consacrée à la preuve du théorème A ainsi qu'à quelques précisions; la partie B porte sur les inégalités avec poids, dont (5) et (5').

Remarque. — Dans la suite, C_p, $C_{q,\varphi}\ldots$ désignent des constantes susceptibles de changer de valeur de ligne en ligne. On a pris soin d'indiquer en indice de quels paramètres dépendent ces constantes.

Je tiens à remercier M. Yor pour son aide tout au long de l'élaboration de ce travail.

I. INÉGALITÉS POUR LE PRODUIT $F(M_K^*)G(N_L^*)$

1. Résultats négatifs

En un certain sens, l'inégalité (3) est optimale. En effet, d'une part, même si l'on impose $K=L=1$, il n'est pas possible de remplacer la norme L_φ du majorant par une norme L_1 (Proposition A.1), d'autre part il n'est pas non plus possible de supprimer les termes logarithmiques (Proposition A.2).

a) Soit $(M_t, t\geqq 0)$, un mouvement brownien réel, issu de 0.

Soit $\mathscr{H}$ la filtration engendrée par M.

On note $\mathscr{M}_2$ l'ensemble des $\mathscr{H}$-martingales continues, issues de 0, de carré intégrable.

Alors on a la

PROPOSITION A.1.

$$\sup_{N \in \mathscr{M}_2} \frac{\| M_1 N_1 \|_2}{\sqrt{\mathbb{E}[\langle N \rangle_1 (1+(\log \langle N \rangle_1)^2)]}} = +\infty$$

Démonstration. — Notons que la fonction $x \to x\ (1+(\log x)^2)$ est croissante modérée.

Donc, d'après B.G. :
si l'inégalité

$$\sup_{N \in \mathscr{M}_2} \frac{\| M_1 N_1 \|_2}{\sqrt{\mathbb{E}[\langle N \rangle_1 (1+(\log \langle N \rangle_1)^2)]}} < +\infty$$

avait lieu, alors on aurait

$$\sup_{N \in \mathscr{M}_2} \frac{\| M_1 N_1 \|_2}{\mathbb{E}[(N_1^*)^2 (1+(\log N_1^*)^2)]} < +\infty$$

Il existe une constante C telle que pour tout $x \geqq 0$, on ait

$$x^2 (1+(\log x)^2) \leqq C (x^{3/2} + x^{5/2}).$$

On aurait alors

$$\sup_{N \in \mathscr{M}_2} \frac{\| M_1 N_1 \|_2}{\mathbb{E}[(N_1^*)^{3/2} + (N_1^*)^{5/2}]} < +\infty$$

Donc, d'après l'inégalité de Doob:

$$\sup_{N \in \mathscr{M}_2} \frac{\| M_1 N_1 \|_2}{\mathbb{E}[|N_1|^{3/2} + |N_1|^{5/2}]} < +\infty$$

Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On peut choisir $N_1 = 1_\Gamma - \mathbb{P}[\Gamma]$, où $\Gamma \in \sigma(M_u, u \leqq 1)$ et $\mathbb{P}[\Gamma] \leqq \varepsilon$. On aurait alors

$$\sup_{\Gamma \in \mathscr{H}_1,\ \mathbb{P}[\Gamma] \leqq \varepsilon} \frac{\| M_1 1_\Gamma \|_2 (1-2\varepsilon)}{\mathbb{P}[\Gamma]} < +\infty$$

Cela implique $\| M_1 \|_\infty < \infty$, ce qui est impossible.

b) Nous justifions maintenant la présence de termes logarithmiques dans les inégalités (3).

Soient M et N deux mouvements browniens réels indépendants.

Soit $(\mathscr{H}_t)$ la filtration engendrée par M.

On a la

PROPOSITION A.2. — *Soit* φ, *une fonction de Young.*

$$\sup_{S,\,T,\,\mathscr{H}\text{-temps d'arrêt}} \frac{\mathbb{E}[M_T^* N_S^*]}{\left\|\sqrt{TS}\right\|_\varphi} = +\infty$$

Démonstration. — Soit T, un $\mathscr{H}$-temps d'arrêt non nul. Soit $A \in \mathscr{H}_T$, et $\lambda > 0$.

On pose $S = \lambda^2 A^2 + T$. Alors S est un $\mathscr{H}$-temps d'arrêt.

On a donc:

$$\begin{aligned}
&\sup_{S,\,T,\,\mathscr{H}\text{-temps d'arrêt}} \frac{\mathbb{E}[M_T^* N_S^*]}{\left\|\sqrt{TS}\right\|_\varphi} \\
&\geqq C \sup_{S,\,T,\,\mathscr{H}\text{-temps d'arrêt}} \frac{\mathbb{E}[M_T^* \sqrt{S}]}{\left\|\sqrt{TS}\right\|_\varphi} \text{ par scaling sur N} \\
&\geqq C \sup_{T,\,\mathscr{H}\text{-temps d'arrêt}} \sup_{\lambda > 0,\, A \in \mathscr{H}_T} \frac{\mathbb{E}[M_T^* \sqrt{A^2 + \lambda^{-2} T}]}{\left\|\sqrt{T}\sqrt{A^2 + \lambda^{-2} T}\right\|_\varphi} \\
&\geqq C \sup_{T,\,\mathscr{H}\text{-temps d'arrêt}} \sup_{A \in \mathscr{H}_T} \frac{\mathbb{E}[M_T^* |A|]}{\left\|\sqrt{T}|A|\right\|_\varphi} \\
&\geqq C \sup_{T,\,\mathscr{H}\text{-temps d'arrêt}} \mathbb{E}\left[\frac{M_T^*}{\sqrt{T}}\right] \text{ en prenant } A = \frac{1}{\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

D'après le théorème de section optionnelle

$$\begin{aligned}
&\sup_{T,\,\mathscr{H}\text{-temps d'arrêt}} \mathbb{E}\left[\frac{M_T^*}{\sqrt{T}}\right] \\
&\geqq \left(\int_0^{+\infty} da \sup_{T,\,\mathscr{H}\text{-temps d'arrêt}} \mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{M_T^*}{\sqrt{T}}} \geqq a\right]\right)^2 \\
&\geqq C\,\mathbb{E}\left[\sup_{t>0} \sqrt{\frac{M_t^*}{\sqrt{t}}}\right]^2
\end{aligned}$$

Or

$$\sup_{t>0} \frac{M_t^*}{\sqrt{t}} = +\infty \qquad \text{p.s.}$$

d'après la loi du log itéré, par exemple.

2. a) Démonstration du théorème A.

D'après B.G. et l'inégalité de Hölder, on a

$$\left\|F(M_K^*)\,G(N_L^*)\right\|_p \leqq C(f, g, p)\left\|F\left(\sqrt{\langle M\rangle_K}\right)\right\|_\infty \left\|G\left(\sqrt{\langle N\rangle_L}\right)\right\|_\infty$$

Il ne reste plus qu'à remplacer $\| F(\sqrt{\langle M \rangle_K}) \|_\infty \| G(\sqrt{\langle N \rangle_L}) \|_\infty$ par $\| F(\sqrt{\langle M \rangle_K}) G(\sqrt{\langle N \rangle_L}) (1 + (\log F(\sqrt{\langle M \rangle_K}))^2 + (\log G(\sqrt{\langle N \rangle_L}))^2)^\varepsilon \|_\infty$ puis renforcer la norme L_∞ en une norme L_φ.

Ces deux étapes font l'objet des lemmes suivants.

LEMME A.1. — *Soient* $(A_t, t \geqq 0)$, $(B_t, t \geqq 0)$ *deux processus croissants, continus à droite, tels que pour tout* t, A_t *et* B_t *soient* $\mathscr{G}$*-mesurables, et* $A_0 = B_0 = 0$.

On suppose que:

il existe $\alpha > 0$, $p_0 \geqq 0$ *et* $C \in \mathbb{R}_+$ *tels que pour tout* $p \geqq p_0$, *et tout temps aléatoire* L, *on ait*:

$$\| A_L \|_p \leqq C p^\alpha \| B_L \|_\infty$$

Soit (φ, ψ), *un couple de fonction de Young conjuguées.*

Alors il existe une constante c, *indépendante de* (φ, ψ) (*ne dépendant que de* C, α *et* p_0), *telle que, pour tout* $q > 0$ *et tout temps aléatoire* L:

$$\mathbb{E}[A_L^q] \leqq c^{q+1} \| \mathscr{E}^{\alpha q} \|_\psi \| B_L^q \|_\varphi$$

Démonstration. — Soit $q > 0$. Supposons $\| \mathscr{E}^{\alpha q} \|_\psi < \infty$. (Sinon il n'y a rien à démontrer). On pose

$$\pi^*(\beta) = \sup_{\lambda > 0} \sup_{\text{L, temps aleatoire}} \mathbb{P}[A_L^q > \beta\lambda;\ B_L^q \leqq \lambda]$$

D'après la Proposition (2.4.1) [B-J-Y], il suffit de vérifier que:

$$\inf \left\{ \mu > 0;\ \int_0^\infty \pi^*(\mu\beta)\, d\psi(\beta) \leqq 1 \right\} \leqq c^{q+1} \| \mathscr{E}^q \|_\psi$$

Soient L un temps aléatoire, et $\lambda > 0$, $\beta > 0$. Soit $p \geqq p_0$.

On a:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_L^q > \beta\lambda;\ B_L^q \leqq \lambda] &\leqq \frac{1}{(\beta\lambda)^{p/q}} \mathbb{E}[A_L^p 1_{B_L^q \leqq \lambda}] \\
&\leqq \frac{1}{(\beta\lambda)^{p/q}} C^p p^{\alpha p} \| B_L^p 1_{B_L^q \leqq \lambda} \|_\infty \quad \text{car } p \geqq p_0 \\
&\leqq \frac{C^p p^{\alpha p}}{\beta^{p/q}}
\end{aligned}$$

D'où:

$$\pi^*(\beta) \leqq \exp\left(-\frac{1}{c} \beta^{1/(\alpha q)} \right)$$

pour $\beta \geqq c^q$. (c a changé de valeur.)

De plus, $\pi^*(\beta) \leqq 1$.

Donc, en posant $r=\alpha q$:

$$\begin{aligned}\int \pi^*(\mu a)\, d\psi(a) &\leqq \int_0^{c^r \mu^{-1}} d\psi(a) + \int \exp\left(-\frac{1}{c}(\mu a)^{1/r}\right) d\psi(a)\\ &\leqq \psi\left(\frac{c^r}{\mu}\right) + \int e^{-t}\, d\psi\left(\frac{c^r t^r}{\mu}\right)\\ &\leqq (e+1)\int e^{-t}\, d\psi\left(\frac{c^r t^r}{\mu}\right)\\ &\leqq (e+1)\int e^{-t}\psi\left(\frac{c^r t^r}{\mu}\right) dt \text{ car } \psi(t^r)e^{-t}\to 0 \text{ quand } t\to\infty.\\ &\leqq \mathbb{E}\left[\psi\left(\frac{(e+1)c^r \mathscr{E}^r}{\mu}\right)\right] \text{ car } \psi \text{ est convexe.}\\ &\leqq \mathbb{E}\left[\psi\left(\frac{c^{\alpha q+1}\mathscr{E}^{\alpha q}}{\mu}\right)\right]\end{aligned}$$

Remarque 1. — Si A et B sont optionnels pour une certaine filtration, $\mathscr{H}$, alors, d'après le théorème de section optionnelle, on a:

$$\pi^*(\beta) = \sup_{\lambda>0} \sup_{T,\ \mathscr{H}\text{-temps d'arrêt}} \mathbb{P}[A_T^q > \beta\lambda;\ B_T^q \leqq \lambda]$$

Donc il suffit d'avoir

$$\|A_T\|_p \leqq C p^\alpha \|B_T\|_\infty$$

pour tout $\mathscr{H}$-temps d'arrêt T, pour que la conclusion du lemme demeure.

Voici une première application de ce lemme qui nous sera utile.

COROLLAIRE 1. — *Il existe une constante* $C(f)$, *indépendante de* M *et de* φ, *telle que, pour tout* $q>0$, *et tout temps aléatoire* L, *on ait*:

$$\mathbb{E}[F(M_L^*)^q] \leqq C(f)^{q+1} \|\mathscr{E}^{(i/2)q}\|_\psi \|F(\sqrt{\langle M\rangle_L})^q\|_\varphi \tag{6}$$

$$\mathbb{E}[F(\sqrt{\langle M\rangle_L})^q] \leqq C(f)^{q+1} \|\mathscr{E}^{(i/2)q}\|_\psi \|F(M_L^*)^q\|_\varphi \tag{6'}$$

Démonstration. — D'après [Ba-Yor] Lemma 4.1 et inégalité (2*h*), la meilleure constante dans B.G.:

$$\gamma = \sup_{M,T} \frac{\|F(M_T^*)\|_p}{\|F(\sqrt{\langle M\rangle_T})\|_p}$$

pour $p \geqq 2$, vérifie:

$$\gamma \leqq \inf_{\beta\geqq 1} \inf_{\delta>0,\, k\geqq 2} f\left(\frac{1}{\delta}\right) f(\beta)\left(\frac{1}{1-(k/k-1)^k c(k-1/e)^{k/2} f(\beta)^p \delta^k (\beta-1)^{-k}}\right)^{1/p}$$

On prend $k=p$, $\beta=2$, $\delta^{-1}=\sqrt{pf}(2)$ D'où :

$$\gamma \leqq f(\sqrt{pf}(2))f(2)\frac{1}{(1-c(2/e)^{p/2})^{1/p}} \leqq cf(\sqrt{p}) \leqq cf(2)^{\log p/2 \log 2} \leqq cp^{i/2}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme A.1 et la remarque A.1.

La seconde inégalité se montre de la même manière.

Remarque 2. — D'après la formule de Stirling :

$$\mathbb{E}[\mathscr{E}^q] \leqq c\left(\frac{q}{e}\right)^q \sqrt{2\pi q}$$

pour q assez grand.

En choisissant $\varphi(x)=x^\eta$ dans (6), on trouve que si $q \geqq 2$, alors :

$$\mathbb{E}[F(M_L^*)^q] \leqq C(f)^q q^{iq/2} \| F(\sqrt{\langle M \rangle_L})^q \|_\infty$$

$$\mathbb{E}[F(\sqrt{\langle M \rangle_L})^q] \leqq C(f)^q q^{iq/2} \| F(M_L^*)^q \|_\infty$$

LEMME 2. — *Soient* $(D_t, t \geqq 0)$, $(B_t, t \geqq 0)$ *deux processus croissants, tels que pour tout* t, D_t *et* B_t *soient* $\mathscr{G}$*-mesurables, et* $D_0=B_0=0$.

Soit $(A_{t,s}, t \geqq 0, s \geqq 0)$, *un processus indexé par* $\mathbb{R}_+^2$, *tel que pour tous* $t \geqq u$, $s \geqq v$, $A_{t,s}-A_{u,s}-A_{t,v}+A_{u,v} \geqq 0$, $A_{t,0}=A_{0,s}=0$ *et* $A_{t,s}$ *est* $\mathscr{G}$*-mesurable.*

Supposons qu'il existe $p>0$ *et* $C_p \in \mathbb{R}_+$ *tels que pour tout couple de temps aléatoires* (K, L), *on ait* :

$$\| A_{K,L} \|_p \leqq C_p \| B_L \|_\infty \| D_K \|_\infty$$

Alors, pour tout couple de temps aléatoires (K, L)

$$\| A_{K,L} \|_p \leqq c\, C_p \| B_L D_K (1+(\log D_K)^2+(\log B_L)^2) \|_\infty$$

où c est une constante universelle.

Démonstration. — Supposons $D_\infty=B_\infty=+\infty$.

On a :

$$\begin{aligned}
&\| A_{K,L} \|_p \\
&\quad \leqq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \| A_{K,L}\, 1(e^{n+1} \geqq D_K \geqq e^n,\ e^{m+1} \geqq B_L \geqq e^m) \|_p \\
&\quad \leqq C_p \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \| B_L\, 1(e^{n+1} \geqq D_K \geqq e^n,\ e^{m+1} \geqq B_L \geqq e^m) \|_\infty \\
&\qquad \ldots \| D_K\, 1(e^{n+1} \geqq D_K \geqq e^n,\ e^{m+1} \geqq B_L \geqq e^m) \|_\infty \\
&\quad \leqq C_p \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{n+m} \| 1(e^{n+1} \geqq D_K \geqq e^n,\ e^{m+1} \geqq B_L \geqq e^m) \|_\infty
\end{aligned}$$

Or :

i)
$$\begin{aligned}
&\sum_{m\geqq 0,\, n\geqq 0} e^{n+m} \| 1\,(\mathrm{D_K}\geqq e^n,\ \mathrm{B_L}\geqq e^m)\|_\infty \\
&\leqq \sum_{m\geqq 0,\, n\geqq 0} e^{n+m} \| 1\,(m+n\leqq \log(\mathrm{B_L}\,\mathrm{D_K}))\|_\infty \\
&\leqq \Big\| \sum_{m\geqq 0,\, n\geqq 0} e^{n+m}\, 1\,(m+n\leqq \log(\mathrm{B_L}\,\mathrm{D_K}))\Big\|_\infty \\
&\leqq \mathrm{C}\,\| \mathrm{B_L}\,\mathrm{D_K}\,(1+\log(\mathrm{B_L}\,\mathrm{D_K}))\, 1\,(\mathrm{B_L}\geqq 1,\ \mathrm{D_K}\geqq 1)\|_\infty
\end{aligned}$$

car

$$\sum_{n+m\leqq \mathrm{N},\, n\geqq 0,\, m\geqq 0} e^{n+m} \leqq \frac{\mathrm{N}+1}{e-1} e^{\mathrm{N}+1}$$

ii)
$$\begin{aligned}
&\sum_{m\geqq 0,\, n\geqq 0} e^{-n-m} \| 1\,(\mathrm{D_K}\geqq e^{-n},\ \mathrm{B_L}\geqq e^{-m},\ \mathrm{D_K}<1,\ \mathrm{B_L}<1)\|_\infty \\
&\leqq \sum_{m\geqq 0,\, n\geqq 0} e^{-n-m} \| 1\,(n+m\geqq -\log(\mathrm{D_K}\,\mathrm{B_L}),\ \mathrm{D_K}<1,\ \mathrm{B_L}<1)\|_\infty \\
&\leqq \Big\| \sum_{m\geqq 0,\, n\geqq 0} e^{-n-m}\, 1\,(n+m\geqq -\log(\mathrm{D_K}\,\mathrm{B_L}),\ \mathrm{D_K}<1,\ \mathrm{B_L}<1)\Big\|_\infty \\
&\leqq c\,\| \mathrm{D_K}\,\mathrm{B_L}\, 1\,(\mathrm{D_K}<1,\ \mathrm{B_L}<1\,\|_\infty
\end{aligned}$$

car

$$\sum_{n\geqq 0,\, m\geqq 0,\, n+m\geqq \mathrm{N}} e^{-n-m} \leqq \frac{e^2}{(e-1)^2} e^{-\mathrm{N}}$$

iii)
$$\begin{aligned}
&\sum_{m\geqq 0,\, n\geqq 1} e^{n-m} \| 1\,(\mathrm{D_K}\geqq e^n,\ \mathrm{B_L}\geqq e^{-m},\ \mathrm{D_K}\geqq e,\ \mathrm{B_L}<1)\|_\infty \\
&\leqq \sum_{m\geqq 0,\, n\geqq 1} e^{n-m} \| 1\,(m-n-2\log n\geqq -\log(\mathrm{D_K}\,\mathrm{B_L})-2\log\log \mathrm{D_K},\ \mathrm{D_K}\geqq e)\|_\infty \\
&\leqq \Big\| \sum_{m\geqq 0,\, n\geqq 1} e^{n-m}\, 1\,(m-n-2\log n\geqq -\log(\mathrm{D_K}\,\mathrm{B_L})-2\log\log \mathrm{D_K},\ \mathrm{D_K}\geqq e)\Big\|_\infty \\
&\leqq c\,\| \mathrm{D_K}\,\mathrm{B_L}\,(\log \mathrm{D_K})^2\, 1\,(\mathrm{D_K}\geqq e\,\|_\infty
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqq 1,\, m\geqq 0,\, m-n-2\log n\geqq \mathrm{N}} e^{n-m} &\leqq \sum_{n\geqq 1} e^n \sum_{m\geqq n+2\log n+\mathrm{N}} e^{-m} \\
&\leqq \frac{e}{e-1} \sum_{n\geqq 1} e^n e^{-n} e^{-2\log n} e^{-\mathrm{N}} \\
&\leqq \frac{e}{e-1} e^{-\mathrm{N}} \Big(\sum_{n\geqq 1} \frac{1}{n^2} \Big)
\end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré si $\mathrm{B}_\infty = \mathrm{D}_\infty = +\infty$.

Pour s'affranchir de cette hypothèse, il suffit d'appliquer le résultat ci-dessus aux processus $\mathrm{B}_t + \varepsilon t$ et $\mathrm{D}_s + \varepsilon s$ et de faire tendre ε vers 0.

Démonstration du théorème A. — D'après le corollaire A.1 et la remarque A.2, pour $p \geqq 2$, on a :

$$\| F(M_K^*) G(N_L^*) \|_p \leqq C(f, g) p^{(i+j)/2} \| F(\sqrt{\langle M \rangle_K}) \|_\infty \| G(\sqrt{\langle N \rangle_L}) \|_\infty$$

Donc, d'après le lemme A.2 :

$$\begin{aligned} &\| F(M_K^*) G(N_L^*) \|_p \\ &\qquad \leqq C(f, g) p^{(i+j)/2} \| F(\sqrt{\langle M \rangle_K}) G(\sqrt{\langle N \rangle_L}) \\ &\qquad\qquad (1 + (\log F(\sqrt{\langle M \rangle_K}))^2 + (\log G(\sqrt{\langle N \rangle_L}))^2) \|_\infty \end{aligned}$$

La fonction $x \to x(1 + (\log x)^2 + c)$, $c \geqq 0$ est croissante.

Donc, d'après le lemme A.1 : pour tout $q > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(F(M_K^*) G(N_L^*))^q] \\ &\qquad \leqq C(f, g)^{q+1} \| \mathscr{E}^{q(i+j)/2} \|_\psi \| F(\sqrt{\langle M \rangle_K})^q G(\sqrt{\langle N \rangle_L})^q \\ &\qquad\qquad (1 + (\log F(\sqrt{\langle M \rangle_K}))^2 + (\log G(\sqrt{\langle N \rangle_L}))^2)^q \|_\varphi \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On applique l'inégalité ci-dessus avec $q = \varepsilon$ aux fonctions à croissance modérée $F^{1/\varepsilon}$, $G^{1/\varepsilon}$, d'exposants respectifs $\frac{i}{\varepsilon}$ et $\frac{j}{\varepsilon}$.

D'où :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[F(M_K^*) G(N_L^*)] \\ &\qquad \leqq C(\varepsilon, f, g) \| \mathscr{E}^{(i+j)/2} \|_\psi \| F(\sqrt{\langle M \rangle_K}) G(\sqrt{\langle N \rangle_L}) \\ &\qquad\qquad (1 + (\log F(\sqrt{\langle M \rangle_K}))^2 + (\log G(\sqrt{\langle N \rangle_L}))^2)^\varepsilon \|_\varphi \end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré.

b) On montrerait par la même méthode le théorème suivant.

Soient $M = (M_t^n, t \geqq 0, n = 1 \ldots k)$, k $\mathscr{F}$-martingales continues, issues de 0.

On note M_t^{n*} et $\langle M^n \rangle_t$ les processus des supremas et les processus croissants associés.

Soient $F = (F^n, n = 1 \ldots k)$ k fonctions croissantes modérées, de fonctions de taux respectifs $f = (f^n, n = 1 \ldots k)$ et d'exposants respectifs $i = (i_n, n = 1 \ldots k)$. On note $i_0 = \sum_n i_n$.

Alors on a :

THÉORÈME A'. — *Soit* $\varepsilon > 0$.

Il existe une constante, $C(f, \varepsilon)$, *indépendante de* M, *telle que, pour tout k-uplet de temps aléatoires* $(L_n, n = 1 \ldots k)$, *on ait* :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(\prod_{n=1}^k F^n(M_{L_n}^{n*})\right)\right] \leqq C(f, \varepsilon) \| \mathscr{E}^{i_0/2} \|_\psi \\ &\qquad \left\| \left(\prod_{n=1}^k F^n(\sqrt{\langle M^n \rangle_{L_n}})\right)\left(1 + \sum_{n=1}^k | F^n(\sqrt{\langle M^n \rangle_{L_n}}) |^\varepsilon\right) \right\|_\varphi \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\prod_{n=1}^{k} F^n\left(\sqrt{\langle M^n\rangle_{L_n}}\right)\right)\right] \leqq C(f, \varepsilon)\,\|\mathscr{E}^{i_0/2}\|_\psi \left\|\left(\prod_{n=1}^{k} F^n(M^{n*}_{L_n})\right)\left(1+\sum_{n=1}^{k}|F^n(M^{n*}_{L_n})|^\varepsilon\right)\right\|_\varphi$$

3. Quelques précisions

a) Soit $\eta > 1$. On notera φ_η la fonction de Young $x \to x^\eta$, et ψ_η sa conjuguée.

On vérifie que, pour tout $q > 0$: $\|\mathscr{E}^q\|_{\psi_\eta} < \infty$.

De plus, d'après la formule de Stirling, pour tout $q > 0$, il existe une constante c_q telle que si $\eta < 1 + c_q^{-1}$ alors :

$$\|\mathscr{E}^q\|_{\psi_\eta} \leqq c_q\left(\frac{1}{\eta-1}\right)^q$$

Par ailleurs, si M et N sont deux mouvements browniens indépendants, alors :

$$\sup_{a,b} \frac{\mathbb{E}[|M_1 N_1|^q 1_{|M_1|\geqq a, |N_1|>b}]}{\|1_{|M_1|\geqq a, |N_1|\geqq b}\|_\eta} = \left(\sup_a \frac{\mathbb{E}[|M_1|^q 1_{|M_1|\geqq a}]}{\|1_{|M_1|\geqq a}\|_\eta}\right)^2$$
$$\geqq \sup_a a^{2q}\,\mathbb{P}[|M_1|\geqq a]^{2(1-(1/\eta))}$$
$$\geqq C\left(\frac{1}{1-\eta}\right)^q$$

On en déduit la :

PROPOSITION 3. — *Soient* $q > 0$, $\varepsilon > 0$.

$$\sup_{M,N,K,L} \frac{\|M^*_L N^*_K\|_q}{\left\|\sqrt{\langle M\rangle_K \langle N\rangle_L}\,(1+|\log\langle M\rangle_K|^\varepsilon + |\log\langle N\rangle_L|^\varepsilon)\right\|_{q\eta}} = O\left(\frac{1}{\eta-1}\right)$$

quand $\eta \to 1$.

où le sup est pris par rapport à M *et* N *variant parmi les couples de martingales continues, et* (K, L) *parmi les couples de temps aléatoires.*

b) Notons que les conditions d'intégrabilité requises sur φ dans le théorème A sont en général optimales. En effet, on a :

PROPOSITION 4. — *Soient* $q > 0$, *et* $\varepsilon > 0$.

(φ, ψ) *désigne toujours un couple de fonctions de Young conjuguées. La condition* :

$$\sup_{M,N,K,L} \frac{\mathbb{E}[(M^*_L N^*_K)^q]}{\|(\langle M\rangle_K \langle N\rangle_L)^{q/2}(1+|\log\langle M\rangle_K|^\varepsilon + |\log\langle N\rangle_L|^\varepsilon)\|_\varphi} < \infty$$

implique $\|\mathscr{E}^q\|_\psi < \infty$.

Démonstration. — Supposons

$$\sup_{M,N,K,L} \frac{\mathbb{E}[(M_L^* N_K^*)^q]}{\left\| \sqrt{\langle M\rangle_K \langle N\rangle_L^q}\,(1+|\log\langle M\rangle_K|^\varepsilon+|\log\langle N\rangle_L|^\varepsilon)\right\|_\varphi} < \infty$$

Alors

$$\sup_{\Gamma\in\mathcal{F}_1} \frac{\mathbb{E}[(M_1^*)^{2q} 1_\Gamma]}{\|1_\Gamma\|_\varphi} < \infty$$

où M est un mouvement brownien réel.

Donc, d'après [B-J-Y] paragraphe (1.6):

$$\psi(x)\,\mathbb{P}[(M_1^*)^{2q} \geqq C x] \leqq 1$$

pour une certaine constante C.

Soit $q(u) = \mathbb{P}[(M_1^*)^{2q} \geqq u]$.

On vérifie que: $q(u) > 0$ pour tout $u > 0$,

$$\int_0^\infty -\frac{dq(u)}{q(u/\nu)} < \infty,$$

pour un certain $\nu > 0$.

Donc, d'après le lemme 1.6.2 de [B-J-Y], $\|(M_1^*)^{2q}\|_\psi < \infty$.

Or, grâce au lemme 1.7.1, il est facile de voir que cela implique $\|\mathcal{E}^q\|_\psi < \infty$.

c) Soit $\alpha > 0$. On note φ^α, la fonction de Young $x \to \int_0^x (\log(1+t))^\alpha\, dt$, et ψ^α sa conjuguée.

PROPOSITION 5. — *Soit* $q > 0$, $\varepsilon > 0$.

La condition

$$\sup_{M,N,K,L} \frac{\mathbb{E}[(\sup_{t<K,\, s<L} |M_t N_s|)^q]}{\left\|(\langle M\rangle_K \langle N\rangle_L)^{q/2}(1+|\log\langle M\rangle_K|^\varepsilon+|\log\langle N\rangle_L|^\varepsilon)\right\|_{\varphi^\alpha}} < \infty$$

équivaut à $\alpha \geqq q$.

Démonstration. — On a

$$\psi^\alpha(x) = \int_0^x (\exp(t^{1/\alpha}) - 1)\, dt$$

On vérifie que $\|\mathcal{E}^q\|_{\psi^\alpha} < \infty$ équivaut à $\alpha \geqq q$.

La proposition A.4 implique donc le résultat.

II. INÉGALITÉS AVEC POIDS

1. Nous commençons par prouver des inégalités avec poids dans un cadre plus général que celui du théorème B, nous en déduirons ensuite les

inégalités (5) et (5′) : soient $(X_t, t \geqq 0)$ et $(Y_t, t \geqq 0)$ deux processus adaptés, croissants, cad-lag, nuls en 0, tels que :

(H) pour toute fonction modérée F, de fonction de taux f, et d'exposant i, il existe une constante, $C_0(f)$, telle que pour tout temps d'arrêt T, on ait :

$$\mathbb{E}[F(X_T)] \leqq C_0(f) \| F(Y_T) \|_\infty \tag{7}$$

Remarquons que, d'après la remarque B.1 ci-dessous, si (X, Y) satisfait cette hypothèse, alors pour toute fonction modérée F, il existe une constante, $C(f)$, telle que, pour tout temps aléatoire L, on ait :

$$\mathbb{E}[F(X_L)] \leqq C(f) \| F(Y_L) \|_\infty$$

En effet, si $p > 0$, alors la fonction F^p est modérée, et on a donc :

$$\mathbb{E}[F^p(X_T)] \leqq C(f, p) \| F^p(Y_T) \|_\infty$$

pour tout temps d'arrêt T.

Donc, d'après le théorème et la remarque B.1 :

$$\mathbb{E}[F^p(X_L)] \leqq C(f, p) \| F^p(Y_L) \|_2 \leqq C(f, p) \| F^p(Y_L) \|_\infty$$

pour tout temps aléatoire L.

Dans la suite A est une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable, positive (ou nulle). On ne suppose pas pour l'instant $\mathbb{E}[A] = 1$.

THÉORÈME B′. — *Supposons l'hypothèse* (H) *vérifiée.*

Soit F *une fonction modérée.*

Pour tous $\eta > 1$, $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $C(f, \eta, \varepsilon)$ *ne dépendant que de* $C_0(f)$ *et de* η, ε *telle que, pour tout temps aléatoire* L, *on ait* :

$$\mathbb{E}[AF(X_L)] \leqq C(f, \eta, \varepsilon) \| AF(Y_L)(1 + |\log A|^\varepsilon + |\log F(Y_L)|^\varepsilon) \|_\eta \tag{8}$$

Ce résultat découle du lemme A.2 et de la variante du lemme A.1 suivante :

LEMME 1. — *Soient* $(A_t, t \geqq 0)$, $(B_t, t \geqq 0)$ *deux processus croissants cad-lag, tels que, pour tout* t, A_t *et* B_t *soient* $\mathcal{G}$*-mesurables, et* $A_0 = B_0 = 0$.

On suppose que :

il existe $p_0 \geqq 0$ *tel que, pour tout* $p \geqq p_0$, *il existe* $C_p \in \mathbb{R}_+$, *tel que, pour tout temps aléatoire* L *on ait* :

$$\mathbb{E}[(A_L)^p] \leqq C_p \| B_L \|_\infty$$

Alors, pour tous $\eta > 1$, $q > 0$, *il existe une constante* $C_{\eta, q}$ *telle que, pour tout temps aléatoire* L, *on ait* :

$$\mathbb{E}[A_L^q] \leqq C_{\eta, q} \| B_L^q \|_\eta$$

Démonstration. — Soient $q>0$ et $\eta>1$

On peut de plus supposer $q\dfrac{\eta}{\eta-1}>p_0$

On pose

$$\pi^*(\beta)=\sup_{\lambda>0}\ \sup_{\text{L, temps aleatoire}}\ \mathbb{P}[A_L^q>\beta\lambda;\ B_L^q\leqq\lambda]$$

D'après la proposition (2.4.1) de [B-J-Y], il suffit, pour montrer le lemme B.1, de vérifier que:

$$\int_0^\infty \pi^*(\beta)\,\beta^{1/(\eta-1)}\,d\beta<\infty$$

Soient L un temps aléatoire, et $\lambda>0$, $\beta>0$.

Soit p, tel que $p>\dfrac{q\eta}{\eta-1}$.

On a:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A_L^q>\beta\lambda;\ B_L^q\leqq\lambda]&\leqq\frac{1}{(\beta\lambda)^{p/q}}\mathbb{E}[A_L^p\,1_{B_L^q\leqq\lambda}]\\&\leqq\frac{1}{(\beta\lambda)^{p/q}}C_p\|B_L^p\,1_{B_L^q\leqq\lambda}\|_\infty\ \text{ car } p>p_0\\&\leqq\frac{C_p}{\beta^{p/q}}\end{aligned}$$

D'où:

$$\pi^*(\beta)\leqq\frac{C_p}{\beta^{p/q}},\quad\text{avec}\quad\frac{p}{q}>\frac{\eta}{\eta-1}.$$

De plus $\pi^*(\beta)\leqq 1$.

Donc

$$\int_0^\infty \pi^*(\beta)\,\beta^{1/(\eta-1)}\,d\beta<\infty$$

Remarque 1. — Si A et B sont optionnels pour une certaine filtration, $\mathscr{H}$, alors, de même que dans la remarque A.1, il suffit d'avoir

$$\|A_T\|_p\leqq C_p\|B_T\|_\infty$$

pour tout $\mathscr{H}$-temps d'arrêt T, pour que la conclusion du lemme demeure.

Démonstration du théorème B'. Soit $A_t=t\wedge A$. $(A_t,\ t\geqq 0)$ est un processus croissant, cad-lag, issu de 0.

Soit $p>0$.

Soient K, L, deux temps aléatoires.

On a:

$$\|A_K F(X_L)\|_p\leqq C(f,p)\|A_K\|_\infty\|F(Y_L)\|_\infty$$

Donc, d'après le lemme A.2 appliqué aux processus $(A_t F(X_s))^{1/\varepsilon}$, $A_t^{1/\varepsilon}$ et $F(X_s)^{1/\varepsilon}$:

$$\| A_K F(X_L) \|_p \leqq C(f, p, \varepsilon) \| A_K F(Y_L)(1 + |\log A_K|^\varepsilon + |\log F(Y_L)|^\varepsilon) \|_\infty$$

Donc pour tout temps aléatoire κ:

$$\| A_{K \wedge \kappa} F(X_{L \wedge \kappa}) \|_p \leqq C(f, p, \varepsilon) \| A_{K \wedge \kappa} F(Y_{L \wedge \kappa}) (1 + |\log A_{K \wedge \kappa}|^\varepsilon + |\log F(Y_{L \wedge \kappa})|^\varepsilon) \|_\infty$$

et, d'après le lemme B.1, pour tout $\eta > 1$:

$$\| A_{K \wedge \kappa} F(X_{L \wedge \kappa}) \|_p \leqq C(f, p, \varepsilon, \eta) \| A_{K \wedge \kappa} F(Y_{L \wedge \kappa}) (1 + |\log A_{K \wedge \kappa}|^\varepsilon + |\log F(Y_{L \wedge \kappa})|^\varepsilon) \|_{\eta p}$$

Donc

$$\| A_K F(X_L) \|_p \leqq C(f, p, \varepsilon, \eta) \| A_K F(Y_L)(1 + |\log A_K|^\varepsilon + |\log F(Y_L)|^\varepsilon) \|_{\eta p}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre K vers l'infini.

2. Démonstration du théorème B

Maintenant nous supposons que $\mathbb{E}[A] = 1$.

Le théorème B est une conséquence des inégalités B.G. et du théorème B'' ci-dessous.

En effet ($X = M^*$, $Y = \langle M \rangle$) ou ($X = \langle M \rangle$, $Y = M^*$) sont des couples de processus qui vérifient l'hypothèse (H) d'après B.G., et de plus on a le:

THÉORÈME B''. — *Supposons qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\mathbb{E}[A^{1+\delta}] < \infty$.

Soit (X, Y) *un couple de processus satisfaisant l'hypothèse* (H).

Alors, pour tout $\eta > 1$, *il existe une constante* $C(A, \eta, \delta)$, *ne dépendant que de* A, η, δ *et de* $C_0(f)$, *telle que, pour tout temps aléatoire* L, *on ait*:

$$\mathbb{E}[AF(X_L)] \leqq C(A, \eta, \delta) \| F(Y_L); A \|_\eta$$

où $\| Z; A \|_\eta = \mathbb{E}[Z^\eta A]^{1/\eta}$ *désigne la norme* L_η *de* Z *sous la probabilité de densité* A *relativement à* $\mathbb{P}$.

Démonstration. — Soit η'' tel que $1 < \eta'' < \eta$.

Soit $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[A^{1+\delta}(1 + |\log A|^{\eta''(1+\delta)/(\eta''-1)})] < \infty$.

On pose $\eta' = \dfrac{\eta''}{\eta'' + \delta}(1 + \delta)$. Alors $\eta'' > \eta' > 1$.

Donc, d'après le théorème B'.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[AF(X_L)] \\
&\quad \leqq C(f, \eta') \| AF(Y_L)(1 + |\log A|)(1 + |\log F(Y_L)|) \|_{\eta'} \\
&\quad \leqq C(f, \eta') \| A^{1/\eta''} F(Y_L)(1 + |\log F(Y_L)|) \|_{\eta' r} \\
&\qquad\qquad \| A^{1-(1/\eta'')}(1 + |\log A|) \|_{\eta' r'}
\end{aligned}$$

$$\text{d'après l'inégalité de Hölder avec } r=\frac{\eta''}{\eta'},\ \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1.$$

$$\leqq C(f,\eta')\,\|F(Y_L)(1+|\log F(Y_L)|)\colon A\|_{\eta''}$$
$$\mathbb{E}[A^{1+\delta}(1+|\log A|)^{\eta''(1+\delta)/\eta''-1)}]^{(\eta''-1)/((1+\delta)\eta'')}$$
$$\leqq C(A,f,\eta')\,\|F(Y_L)(1+|\log F(Y_L)|);\ A\|_{\eta''}$$
$$\leqq C(A,f,\eta',\eta'',\varepsilon)\,\|F(Y_L)^{1-\varepsilon/\eta''}+F(Y_L)^{1+(\varepsilon/\eta'')};\ A\|_{\eta''}$$
$$\text{pour } \varepsilon \text{ assez petit.}$$
$$\leqq C(A,f,\eta',\eta'',\varepsilon)\,(\mathbb{E}[F(Y_L)^{\eta''+\varepsilon}A]^{1/\eta''}$$
$$+\mathbb{E}[F(Y_L)^{\eta''+\varepsilon}A]^{(1/\eta'')(\eta''-\varepsilon)/(\eta''+\varepsilon)})$$

d'après l'inégalité de Hölder.

On peut, dans l'inégalité ci-dessus, remplacer F par λF, pour $\lambda>0$. La fonction taux de λF est encore f. On trouve alors:

$$\mathbb{E}[F(X_L)A]$$
$$\leqq C(A,f,\eta,\delta,\eta'',\varepsilon)\inf_{\lambda}(\lambda\,\mathbb{E}[F(Y_L)^{\eta''+\varepsilon}A]^{1/\eta''}$$
$$+\lambda^{-1}\,\mathbb{E}[F(Y_L)^{\eta''+\varepsilon}A]^{(1/\eta'')(\eta''-\varepsilon)/(\eta''+\varepsilon)})$$
$$\leqq C(A,f,\eta,\delta,\eta'',\varepsilon)\,\mathbb{E}[F(Y_L)^{\eta''+\varepsilon};\ A]^{1/(\eta''+\varepsilon)}$$
$$\leqq C(A,f,\eta,\delta)\,\mathbb{E}[F(Y_L)^{\eta};\ A]^{1/\eta},$$

si on a pris soin de choisir $\varepsilon=\eta-\eta''$.

RÉFÉRENCES

[Ba-Yor] M. BARLOW, M. YOR, Semi-Martingale Inequalities via the Garsia-Rodemich-Rumsey Lemma and Applications to Local Times, *Journ. Funct. Ana.*, Vol. **49**, 1982, pp. 199-229.

[B-J-Y] M. BARLOW, S. JACKA, M. YOR, Inequalities for a Pair of Processes Stopped at a Random Time, *Proc. of the L.M.S.*, vol. **52**, 1986, pp. 142-172.

[Burk] D. L. BURKHODLDER, Distribution Function Inequalities for Martingales, *Ann. Prob.*, Vol. **1**, 1973, pp. 19-42.

[I-K] M. IZUMISAWA, N. KAZAMAKI, Weighted Norm Inequalities for Martingales. *Tohoku Math. J.*, Vol. **29**, 1977, pp. 115-124.

[Ja-Yor] S. JACKA, M. YOR, Inequalities for non-Moderate Functions of a Pair of Processes, 1990. A paraître au *Proc. L.M.S.* (1993).

[Mat] P. MATHIEU, Thèse de doctorat. Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris-VI. (En préparation).

[Muck] B. MUCKENHOUPT, Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function, *T.A.M.S.*, Vol. **165**, 1972, pp. 207-226.

[Sek] T. SEKIGUCHI, BMO Martingales and Inequalities, *Tohoku Math.*, Vol. **31**, 1979, pp. 355-358.

[Yor] M. YOR, Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque, in: *Grossissement de filtrations: exemples et applications*, p. 110-170, LNM 1118, Springer, 1985.

(*Manuscrit reçu le* 10 *septembre* 1991.)