ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PAUL HUBERT BÉZANDRY
XAVIER FERNIQUE

Sur la propriété de la limite centrale dans $\mathcal{D}[0,1]$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, n° 1 (1992), p. 31-46
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_1_31_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 28, n° 1, 1992, p. 31-46. *Probabilités et Statistiques*

Sur la propriété de la limite centrale dans $\mathscr{D}[0, 1]$

par

Paul Hubert BÉZANDRY et Xavier FERNIQUE

Université Louis Pasteur, Département de Mathématique,
Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Unité associée au C.N.R.S.,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit $X = \{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in [0, 1]\}$ une fonction aléatoire sur $[0, 1]$ à valeurs dans un espace métrique complet (E, Δ). On établit des critères de cadlaguité de X en utilisant les seules lois des variables $\Delta[X(t), X(s)] \wedge \Delta[X(u), X(t)]$, $s < t < u$. On fournit parallèlement des critères de compacité pour les lois de certaines classes de fonctions aléatoires à trajectoires dans l'espace $\mathscr{D}([0, 1]; E)$ des fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans E, continues à droite et ayant des limites à gauche. Enfin les résultats sont appliqués à l'étude du théorème central limite dans $\mathscr{D}([0, 1]; \mathbb{R})$.

Mots clés : Cadlaguité, compacité relative, théorème central limite.

ABSTRACT. — Let $X = \{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in [0, 1]\}$ be a random function on $[0, 1]$ taking its values in a complete metric space (E, Δ). We show some criteria for the cadlaguity of X involving the laws of the random variables $\Delta[X(t), X(s)] \wedge \Delta[X(u), X(t)]$, $s < t < u$. As a consequence, we give some criteria for the tightness of the laws of $\mathscr{D}([0, 1]; E)$ valued random variables. Finally the central limit theorem is studied in the usual Skorohod space $\mathscr{D}([0, 1]; \mathbb{R})$.

Classification A.M.S. : 60 B 12, 60 G 17.

0. INTRODUCTION

0.1. Le but de ce travail est d'étudier le comportement central limite de certaines fonctions aléatoires continues à droite ayant des limites à gauche (cad.lag) sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$: les trajectoires de telles fonctions aléatoires sont des éléments de $\mathscr{D}=\mathscr{D}([0, 1]); \mathbf{R})$ et nous pouvons les assimiler à des variables aléatoires à valeurs dans cet espace. Pour des détails sur D et sa topologie de Skorohod, le lecteur est renvoyé aux textes de base de Skorohod ([5], [13]) et Billingsley [2].

0.2. Soit $X=\{X(\omega, t), \omega\in\Omega, t\in[0, 1]\}$ une fonction aléatoire sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$; de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la continuité des trajectoires de X ou d'une de ses modifications à partir des seules lois individuelles de ses accroissements $X(t)-X(s)$, $0\leqq s\leqq t\leqq 1$. Parallèlement, les travaux fondamentaux de Censov [3] et de Gihman-Skorohod [5] ont étudié la cadlaguité des mêmes trajectoires à partir des accroissements bilatères $|X(t)-X(s)|\wedge|X(t)-X(u)|$, $0\leqq s\leqq t\leqq u\leqq 1$. Dans un travail précédent [1], nous avons montré que les techniques récentes et plus efficaces ([11], [4]) utilisées pour les problèmes de continuité pouvaient être adaptées aux études de cadlaguité et fournir des résultats plus généraux et plus précis. Nous nous proposons de montrer que ces mêmes techniques permettent d'étudier aussi le comportement de la limite centrale pour certaines variables aléatoires à valeurs dans $\mathscr{D}$; ce comportement a été étudié précédemment par M. G. Hahn [7] qui obtenait des conditions suffisantes pour le T.C.L. liées à des propriétés d'intégrabilité d'ordre 4 pour les accroissements. Récemment, le résultat de M. G. Hahn [7] a été amélioré par V. Paulauskas et Ch. Stieve [10] qui ont obtenu le T.C.L. sous une restriction d'intégrabilité d'ordre 2 seulement sur les accroissements. Nous montrerons que dans notre contexte qui diffère de celui considéré par V. Paulauskas et Ch. Stieve, on peut affaiblir les contraintes d'intégrabilité jusqu'à un ordre voisin de 2.

0.3. Dans le premier paragraphe de ce travail, on étendra les critères de cadlaguité de X publiés précédemment [1] pour les adapter à l'étude de la limite centrale. On fournira parallèlement des critères de compacité pour les lois de certaines familles de variables aléatoires à valeurs dans $\mathscr{D}$. Dans le second paragraphe, on énoncera et démontrera un théorème de la limite centrale.

1. CADLAGUITÉ DE FONCTIONS ALÉATOIRES

1.0. Dans ce paragraphe, nous notons $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{P})$ un espace d'épreuves et (E, Δ) un espace métrique complet; X est une fonction aléatoire sur

[0, 1] à valeurs dans E; pour tout triplet $s \leqq t \leqq u$ d'éléments de [0, 1], nous posons $\Delta_X(s, t, u) = \Delta(X(s), X(t)) \wedge \Delta(X(t), X(u))$. Pour étudier la cadlaguité de X, l'usage veut qu'on suppose la continuité en probabilité; ce n'est pas une hypothèse naturelle. Par contre, si X est une fonction aléatoire cad.lag, alors nécessairement :

1.0.1. L'application : $t \to X(t)$ de [0, 1] dans $L^1\left(\Omega; \left(E, \frac{\Delta}{1+\Delta}\right)\right)$ est continue à droite; l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.

Dans la suite, nous supposerons cette hypothèse 1.0.1 vérifiée, nous supposerons de plus que :

1.0.1'. Le point 1 n'est pas un de ces points de discontinuité.

Nous noterons n un entier positif fixe; $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ et $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ sont deux familles de n applications continues croissantes de [0, 1] dans $\mathbf{R}^+$, nulles à l'origine, les éléments de la famille θ seront de plus supposés concaves.

Avec ces notations, nous définissons $F = F(\delta, \theta)$ comme la classe des fonctions aléatoires X sur [0, 1] à valeurs dans E vérifiant les propriétés 1.0.1 et 1.0.1' et telles que de plus :

1.0.2.
$$\begin{cases} \forall s \leqq t \leqq u, \quad \forall M \in \mathbf{R}^+, \\ \mathbf{E}\{\Delta_X(s, t, u) I_{\Delta_X(s,t,u) \geqq M}\} \\ \leqq \sum_{i=1}^{n} \delta_i(u-s)\, \theta_i \circ \mathbf{P}\{\Delta_X(s, t, u) \geqq M\}. \end{cases}$$

Le maniement de cette classe F utilisera le lemme suivant :

LEMME 1.0.3. — (1) *Pour tout* $X \in F$ *et toute application mesurable* λ *de* Ω *dans* [0, 1], *on a :*

$$\forall s \leqq t \leqq u, \quad \mathbf{E}\{\Delta_X(s, t, u)\lambda\} \leqq \sum_{i=1}^{n} \delta_i(u-s)\, \theta_i \circ \mathbf{E}(\lambda).$$

(2) *Pour tout* $(k, a) \in \mathrm{N} \times [0, 1]$ *et tout* $i \in [1, n]$, *on a aussi :*

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{k} \theta_i(p_j);\ (p_j) \in [0, 1]^k,\ \sum_{j=1}^{k} p_j = a\right\} = k\, \theta_i(a/k).$$

Remarque 1.0.4. — Dans une publication précédente [1], nous avions limité la définition de la classe F au cas où $n=1$; dans cette situation, les propriétés de la classe F sont assez proches de celles de la classe Φ des fonctions aléatoires X sur [0, 1] telles que :

$$\forall s \leqq t \leqq u, \qquad \mathbf{E}\,\Phi\left\{\frac{\Delta_X(s, t, u)}{\delta(u-s)}\right\} \leqq 1,$$

où Φ est certaine fonction convexe qu'on peut associer à θ ([1], remarque 5). Une telle définition se révèlerait dans la suite inefficace pour l'étude de la propriété de la limite centrale que nous nous proposons d'exposer : l'analyse que nous donnerons distinguera en effet dans les majorations deux termes de nature différente, un terme de quasi-centrage et un terme de fluctuation; ces deux termes auront aussi des grandeurs différentes et leur étude précise utilisera en conséquence une classe F associée à $n=2$. Les techniques plus classiques basées sur le maniement des classes du type Φ majoreraient globalement ces deux termes et ne fourniraient pas les résultats que nous présentons ici.

1.1. Le schéma d'approximation

Dans le cadre classique de l'étude de la continuité des trajectoires d'une fonction aléatoire X sur un espace topologique T, on utilise des schémas d'approximation de X à partir de discrétisations de T choisies en fonction de la loi de X. Pour l'analyse de la cadlaguité des trajectoires d'un élément X de F et comme nous l'avons justifié dans [1], nous utiliserons de même des schémas d'approximation de X à partir de discrétisations de [0, 1], mais au lieu d'approximations globales liées à la loi de X, nous déterminerons pour chaque $\omega \in \Omega$, des approximations dépendant explicitement de ce hasard en fonction de la construction que nous présentons maintenant.

Soit X un élément de F; pour tout $(k, t) \in \mathbf{N} \times [0, 1]$, nous posons :

$$S_k = \{ j 2^{-k}, j \in [0, 2]^k \},$$
$$t_k^+ = \inf \{ s \in S_k : s > t \}, \qquad t_k^- = \sup \{ s \in S_k : s \leqq t \}.$$

A partir de ces données, nous construisons pour tout entier k, une fonction aléatoire g_k sur S_{k+1} à valeurs dans S_k en posant pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times S_{k+1}$:

$$g_k(\omega, t) = t_k^- \quad \text{si} \quad \Delta(t_k^-, t, t_k^+)(\omega) = \Delta[X(t), X(t_k^-)](\omega),$$
$$g_k(\omega, t) = t_k^+ \quad \text{sinon.}$$

Nous construisons aussi pour tout couple positif $J \leqq k$ la fonction aléatoire $f_{k, J} = g_J \circ \ldots \circ g_k$ sur S_{k+1} à valeurs dans S_J.

Ces différentes fonctions aléatoires sont bien liées à la structure d'ordre de [0, 1] comme le montre le lemme suivant :

LEMME 1.1.3. — *Les applications g_k de S_{k+1} dans S_k sont croissantes (au sens large). De plus, il existe une suite $(f_J, J \in \mathbf{N})$ de fonctions aléatoires croissantes sur [0, 1] à valeurs dans les S_J telle que :*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \forall J \leqq k+1, \quad \forall t \in [0, 1],$$
$$f_{k, J} \circ f_{k+1}(\omega) = f_J(\omega), \qquad |t - f_J(\omega, t)| \leqq 2^{-J}.$$

Démonstration. — (*a*) Le choix particulier des S_k implique que S_k est contenu dans S_{k+1}; la construction des g_k montre alors que si $s \in S_k$, $g_k(s)$ est égal à s et que si $s \in S_{k+1} \cap ({}^c S_k)$, il est le seul élément de S_{k+1} appartenant à $]s_k^-, s_k^+[$ alors que pour tout $s \in S_{k+1}$, $g_k(s)$ appartient à $[s_k^-, s_k^+]$. Dans ces conditions, soient $s<t$ deux éléments de S_{k+1}, on a l'alternative suivante : ou bien $s \in S_k$ et dans ce cas, $s = g_k(s) \leqq t_k^- \leqq g_k(t)$, ou bien $s \notin S_k$ et dans ce cas, $g_k(s) \leqq s_k^+ \leqq t_k^- \leqq g_k(t)$; la croissance de g_k et celle des $f_{k,J}$ en résultent. (*b*) Nous construisons maintenant les applications aléatoires f_J; nous omettons la variable ω, nous fixons l'entier J; pour tout $s \in S_J$ et tout $k \geqq J$, nous posons $T(k, J, s) = \inf\{t \in S_{k+1} : f_{k,J}(t) = s\}$ de sorte que :

1.1.4 $$(f_{k,J})^{-1}(s) = [T(k, J, s), T(k, J, s_J^+)[\cap S_{k+1} \quad \text{si} \quad s<1,$$
$$(f_{k,J})^{-1}(1) = [T(k, J, 1), 1],$$

1.1.5 $$T(k, J-1, g_{J-1}(s)) \leqq T(k, J, s).$$

La relation 1.1.4 et la croissance des g_k montrent que :

1.1.6 $$T(k, J, s) \geqq T(k+1, J, s) \geqq T(k, J, s) - 2^{-(k+2)},$$

si bien que la suite $\{T(k,J, s), k \in \mathbf{N}\}$ converge en décroissant vers un élément $T(J, s)$ et on a :

$$0 = T(J, 0) \leqq T(J, s) \leqq T(J, s_J^+) \leqq T(J, 1) \leqq 1;$$

on peut donc définir une application f_J de [0, 1] dans S_J en posant $f_J(t) = s$ si $t \in [T(J, s), T(J, s_J^+)[$ et $s \neq 1$ alors que $f_J(t) = 1$ si $t \in [T(J, 1), 1]$; f_J est alors croissante et la propriété de composition de l'énoncé résulte de la relation 1.1.5; de même l'inégalité de l'énoncé résulte de la relation 1.1.6 de sorte que le lemme est démontré.

1.2. Un théorème de cadlaguité

THÉORÈME 1.2. — *On suppose que les différentes intégrales* $\int_0^1 \{u^{-2}\delta_i(u)\theta_i(u)\}\,du$, $i \in [1, n]$ *sont finies. Alors tout élément* X *de* F *a une modification* X_0 *à trajectoires cad.lag telle que pour tout entier* J :

1.2.1 $$\mathbf{E} \sup_{t \in [0,1]} \Delta[X_0(t), X_0 \circ f_J(t)] \leqq 2 \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^{2^{-J}} \{u^{-2}\delta_i(u)\theta_i(u)\}\,du \right].$$

Démonstration. — (*a*) Sous les hypothèses du théorème, pour tout élément X de F et pour tout $k \in \mathbf{N}$, nous pouvons construire une partition finie et mesurable $\{A_t, t \in S_{k+1} \cap ({}^c S_k)\}$ de Ω telle que :

$$\omega \in A_t \Rightarrow \Delta[X(t), X \circ g_k(t)](\omega) = \sup_{t \in S_{k+1}} \Delta[X(t), X \circ g_k(t)](\omega);$$

puisque X appartient à F et en appliquant le lemme 1.0.3, on en déduit:

$$\mathbf{E} \sup_{t \in S_{k+1}} \Delta[X(t), X \circ g_k(t)] = \sum_{t \in S_{k+1} \cap ({}^c S_k)} \mathbf{E}\{\Delta[X(t), X \circ g_k(t)] I_{A_t}\}$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{n} \delta_i(2^{-k-1}) \sum_{t \in S_{k+1} \cap ({}^c S_k)} \theta_i \circ \mathbf{P}(A_t);$$

une deuxième application du lemme 1.0.3, puisque le cardinal de $S_{k+1} \cap ({}^c S_k)$ est égal à 2^k, fournit alors pour tout $i \in [1, n]$:

$$\sum_{t \in S_{k+1} \cap ({}^c S_k)} \theta_i \circ \mathbf{P}(A_t) \leqq 2^k \theta_i(2^{-k}),$$

et donc en additionnant puisque les θ_i sont concaves :

1.2.2 $$\mathbf{E} \sup_{t \in S_{k+1}} \Delta[X(t), X \circ g_k(t)] \leqq \sum_{i=1}^{n} 2^{k+1} \delta_i(2^{-k-1}) \theta_i(2^{-k-1}).$$

(*b*) L'élément X de F restant fixé, la relation 1.2.2 fournit par addition et pour tout entier $J \geqq 0$:

1.2.3 $$\mathbf{E} \sup_{k \geqq J} \sup_{t \in S_{k+1}} \Delta[X(t), X \circ f_{k, J}(t)] \leqq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=J}^{\infty} 2^{k+1} \delta_i(2^{-k-1}) \theta_i(2^{-k-1}) \right],$$

et une évaluation intégrale implique alors :

1.2.4 $$\mathbf{E} \sup_{k \geqq J} \sup_{t \in S_{k+1}} \Delta[X(t), X \circ f_{k, J}(t)] \leqq 2 \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^{2^{-J}} u^{-2} \delta_i(u) \theta_i(u) \, du \right].$$

(*c*) Sous l'hypothèse de convergence de l'énoncé, la relation 1.2.4 montre qu'il existe une suite strictement croissante $(J_p) \subset \mathbf{N}$, un ensemble Ω_0 de probabilité 1 et pour tout $\omega \in \Omega_0$, un nombre $M(\omega)$ fini tels que :

$$\forall \omega \in \Omega_0, \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall k \geqq J_p, \quad \forall t \in S_{k+1},$$
$$\Delta[X(t), X \circ f_{k, J_p}(t)](\omega) \leqq M(\omega) 2^{-p};$$

la formule de composition du lemme 1.1.3 montre que ceci s'écrit aussi :

$$\forall \omega \in \Omega_0, \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall k \geqq J_p, \quad \forall t \in [0, 1],$$
$$\Delta[X \circ f_k(t), X \circ f_{J_p}(t)](\omega) \leqq M(\omega) 2^{-p},$$

c'est-à-dire que pour tout $\omega \in \Omega_0$, la suite $\{t \to X(\omega, f_k(\omega, t)), k \in \mathbf{N}\}$ dont les éléments appartiennent à $\mathscr{D}$ par construction est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme; elle converge donc uniformément vers une limite $X'(\omega)$ appartenant à $\mathscr{D}$. On choisit un élément f de $\mathscr{D}$ et on pose $X_0(\omega) = X'(\omega)$ dans Ω_0, $X'(\omega) = f$ sinon; il reste à montrer que X_0 qui est une fonction aléatoire est une modification de X.

(*d*) Fixons un élément s de $[0, 1]$ en lequel l'application : $t \to X(t)$ de $[0, 1]$ dans $L^1\left(\Omega, E, \frac{\Delta}{1+\Delta}\right)$ soit continue; il existe alors un ensemble Ω_s de probabilité 1 et une suite (J'_p) d'entiers croissant vers l'infini tels que pour tout $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_s$, on ait :

$$\Delta[X(s), X_0(s)](\omega) = \lim_{J \to \infty} \Delta[X(s), X \circ f_J(s)](\omega)$$
$$\leqq \lim_{p \to \infty} \{\Delta[X(s), X(s_{J_p}^-)] + \Delta[X(s), X(s_{J_p}^+)]\}(\omega) = 0$$

et donc $X(\omega, s) = X_0(\omega, s)$.

(*e*) Pour tout élément s de $[0, 1[$, il existe d'après (*d*) et l'hypothèse 1.0.1 une suite (s_k) convergeant en décroissant vers s et un ensemble Ω_s de probabilité 1 tels que pour tout $\omega \in \Omega_s$, on ait :

$$X(\omega, s) = \lim_{k \to \infty} X(\omega, s_k) = \lim_{k \to \infty} X_0(\omega, s_k);$$

par ailleurs la continuité à droite de X_0 fournit pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X_0(\omega, s) = \lim_{k \to \infty} X_0(\omega, s_k);$$

les deux relations ci-dessus impliquent :

$$\forall \omega \in \Omega_s, \quad X(\omega, s) = X_0(\omega, s),$$

le théorème est donc établi.

1.3. Un théorème de compacité des lois

THÉORÈME. — *On suppose que les différentes intégrales* $\int_0^1 [u^{-2} \delta_i(u) \theta_i(u)] \, du$, $i \in [1, n]$, *sont finies.*

Soit C *une classe de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathscr{D}$ *contenue dans* F. *Pour que* C *ait des lois relativement compactes dans* $M(\mathscr{D})$, *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout* $t \in [0, 1]$, *l'ensemble des lois* $\{\mu_{X(t)}, X \in C\}$ *est relativement compact dans* M(E).

(ii) *La famille* $\{t \to \Delta[X(t), X(0)] + \Delta[X(1-t), X(1)], X \in C\}$ *est équicontinue en probabilité au point* $t = 0$.

Démonstration. — Les conditions (i) et (ii) de l'énoncé sont trivialement nécessaires (*cf.* [2], théorème 15.3); nous démontrons seulement qu'elles sont suffisantes et le même théorème 15.3 de [2] implique qu'il suffit pour cela en posant :

$$W(x, \eta)=\sup\{\Delta_x(s, t, u);\ 0\leqq s\leqq t\leqq u\leqq s+\eta\}$$
$$+\sup\{\Delta[x(t), x(0)]+\Delta[x(1-t), x(1)];\ 0\leqq t\leqq \eta\},$$

de vérifier que $\sup\{\mathbf{E}\,W(X, \eta), X\in C\}$ tend vers zéro avec η; on peut d'ailleurs, substituant éventuellement à Δ, la distance bornée $\Delta\wedge 1$, supposer pour cela que Δ est elle-même bornée; sous cette dernière hypothèse, la condition (ii) implique que la famille $\{t\to\Delta[X(t), X(0)]+\Delta[X(1-t), X(1)], X\in C\}$ est équicontinue dans $\mathbf{L}_1$ au point zéro. Pour la preuve, nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 1.3.1. — *Soit* $x\in\mathscr{D}$; *nous notons* $(f_J, J\in\mathbf{N})$, *la suite de fonctions associées à* x *au lemme* 1.1.3; *pour tout* $J\in\mathbf{N}$, *on a alors :*

$$W(x, 2^{-J-1})\leqq 4\sup_{t\in[0,1]}\Delta[x(t), x\circ f_J(t)]$$
$$+\sup_{s\in S_J}\Delta_x(s-2^{-J}, s, s+2^{-J})+\Delta[x(0), x(2^{-J})]+\Delta[x(1), x(1-2^{-J})].$$

Démonstration. — (*a*) Supposons $s\leqq u\leqq s+2^{-J-1}$; dans ces conditions, le lemme 1.1.3 montre que $f_J(u)-f_J(t)\in\{0, 2^{-J}, 2^{-J+1}\}$ de sorte que

$$\Delta_x(f_J(s), f_J(u), f_J(t))\in\{0, \Delta_x(f_J(t)-2^{-J}, f_J(t), f_J(t)+2^{-J}\};$$

on en déduit :

$$\Delta_x(s, t, u)\leqq 2\sup_{t\in[0,1]}\Delta(x(t), x\circ f_J(t))+\sup_{t\in S_J}\Delta_x(t-2^{-J}, t, t+2^{-J}).$$

(*b*) Supposons maintenant $0\leqq t\leqq 2^{-J-1}$; alors le même lemme 1.1.3 montre que $f_J(t)\in\{0, 2^{-J}\}$ et $f_J(1-t)\in\{1-2^{-J}, 1\}$; on en déduit de la même manière :

$$\Delta[x(0), x(t)]+\Delta[x(1), x(1-t)]$$
$$\leqq 2\sup_{t\in[0,1]}\Delta[x(t), x\circ f_J(t)]+\Delta[x(0), x(2^{-J})]$$
$$+\Delta[x(1), x(1-2^{-J})];$$

le résultat du lemme s'obtient alors en regroupant ces deux majorations.

LEMME 1.3.2. — *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathscr{D}$ *appartenant à* F; *pour tout entier* J, *on a :*

$$\mathbf{E}\sup_{s\in S_J}\Delta_X(s-2^{-J}, s, s+2^{-J})\leqq 4\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{2^{2-J}}[u^{-2}\,\delta_i(u)\,\theta_i(u)]\,du.\right.$$

Démonstration. — On utilise le schéma de preuve du théorème 1.2 (*a*); pour tout entier J, nous pouvons construire une partition finie et mesurable $\{A_s, s\in S_J\}$ de Ω telle que :

$$\omega\in A_s\ \Rightarrow\ \Delta_X(s-2^{-J}, s, s+2^{-J})(\omega)=\sup_{s\in S_J}\Delta_X(s-2^{-J}, s, s+2^{-J})(\omega);$$

puisque X appartient à C et en appliquant le lemme 1.0.3, on en déduit comme dans le lemme précité :

$$\mathbf{E} \sup_{s \in S_J} \Delta_X(s-2^{-J}, s, s+2^{-J}) \leqq \sum_{i=1}^{n} \delta_i(2^{1-J}) 2^J \theta_i(2^{-J});$$

le dernier terme se majore alors facilement par l'intégrale indiquée.

1.3.3. Nous terminons maintenant la preuve du théorème : sous ses hypothèses, les conditions (i) et (ii) étant vérifiées, pour tout élément X de C et tout entier J, l'évaluation du théorème 1.2 et les deux lemmes 1.3.1 et 1.3.2 montrent que :

$$\mathbf{E}\,W(X, 2^{-J-1}) \leqq 12 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^{2^{2-J}} [u^{-2} \delta_i(u) \theta_i(u)]\, du \right\} + \mathbf{E}\,\Delta[X(0), X(2^{-J})] + \mathbf{E}\,\Delta[X(1), X(1-2^{-J})];$$

puisque les différentes intégrales sont convergentes et que la famille $\{\Delta[X(0), X(2^{-J})] + \mathbf{E}\,\Delta[X(1), X(1-2^{-J})], X \in C\}$ est équicontinue dans $\mathbf{L}_1$ au point zéro, le dernier membre tend vers zéro quand J tend vers l'infini et le théorème est démontré.

2. SUR LA PROPRIÉTÉ DE LA LIMITE CENTRALE

2.0. Dans ce paragraphe, nous notons $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{P})$ un espace d'épreuves; l'espace (E, Δ) est l'espace $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle; pour toute fonction aléatoire X sur [0, 1] à valeurs réelles et pour tout triplet $s \leqq t \leqq u$ d'éléments de [0, 1], nous posons donc

$$\Delta_X(s, t, u) = |X(s) - X(t)| \wedge |X(t) - X(u)|;$$

les notations n, δ, θ et $F = F(\delta, \theta)$ ont le même sens que précédemment.

Soit X un élément de F; supposons les différentes intégrales $\int_0^1 [u^{-2} \delta_i(u) \theta_i(u)]\, du$ finies et X(0) intégrable . Dans ces conditions, le théorème 1.2 montre qu'il existe une modification X' de X qui est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{D}$, nous la confondons avec X. La formule 1.2.1 appliquée pour J = 0 montre d'ailleurs que pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathbf{E}|X(t)|$ et $\mathbf{E} \sup_{t \in [0, 1]} \|X(t)\|$ sont finis; le théorème de convergence dominée implique donc que l'application $\mathbf{E}(X) : t \to \mathbf{E}(X(t))$ est un élément de $\mathscr{D}$.

Soit $\{X_k, k \in \mathbf{N}\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathscr{D}$, indépendantes et de mêmes lois que X; le théorème 1 de [12] montre que la suite $\left\{ S_N/N = \sum_{k=1}^{N} X_k/N,\ N \in \mathbf{N} \right\}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X)$ pour la topologie de la convergence uniforme et donc aussi pour la topologie de $\mathscr{D}$. On se propose d'étudier ici le comportement de la limite centrale pour X, c'est-à-dire les conditions de la convergence étroite des lois μ_N, $N \in \mathbf{N}$, de la suite $\{(S_N - \mathbf{E}\, S_N)/\sqrt{N},\ N \in \mathbf{N}\}$.

2.1. Supposons que la suite $\{\mu_N,\ N \in \mathbf{N}\}$ converge étroitement vers une probabilité μ; alors le théorème de Skorohod [13] implique qu'il existe une suite $\{x_N,\ N \in \mathbf{N}\}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathscr{D}$ de lois respectives μ_N, $N \in \mathbf{N}$, convergeant sûrement vers une variable aléatoire g à valeurs dans $\mathscr{D}$ de loi μ. Les propriétés topologiques de $\mathscr{D}$ montrent alors que pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$g(\omega, t) \wedge g^-(\omega, t) \leq \liminf_{N \to \infty} x_N(\omega, t) \leq \lim_{N \to \infty} \inf x_N(\omega, t) \leq g(\omega, t) \vee g^-(\omega, t).$$

Les propriétés classiques du T.C.L. dans $\mathbf{R}$ impliquent donc que pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathbf{E}\, X^2(t)$ est fini.

Dans les mêmes conditions, puisque g est à valeurs dans $\mathscr{D}$, elle est cad.lag en probabilité et l'ensemble C_0 de ses points de continuité en probabilité est dense dans $[0, 1]$. Pour tout sous-ensemble fini C de C_0 et puisque g est à valeurs dans $\mathscr{D}$, l'ensemble

$$\Omega_C = \{\forall s \in C,\ \lim_{t \to s} g(\omega, t) = g(\omega, s)\}$$

est mesurable et de probabilité 1. Les propriétés topologiques de $\mathscr{D}$ impliquent donc que pour tout $\omega \in \Omega_C$ et tout $s \in C' = C \cup \{1\}$, la suite $\{x_N(\omega, s),\ N \in \mathbf{N}\}$ converge vers $g(\omega, s)$. Le théorème usuel de la limite centrale dans $\mathbf{R}^{C'}$ montre alors que la restriction de g à $C_0 \cup \{1\}$ est gaussienne. Puisque C_0 est dense dans $[0, 1]$, la continuité à droite de g implique finalement que g est gaussienne sur $[0, 1]$.

On pourra noter que le schéma de preuve précédent montre que g est continu en probabilité si et seulement si X est continu en moyenne quadratique; g est alors presque sûrement à trajectoires continues et les propriétés topologiques de $\mathscr{D}$ impliquent que $\{x_N,\ N \in \mathbf{N}\}$ converge en fait presque sûrement pour la topologie de la convergence uniforme : il y a alors propriété de la limite centrale au sens de la convergence uniforme.

2.3. Dans la suite de ce paragraphe, on prouvera le théorème :

THÉORÈME. — *Soit* X *une fonction aléatoire sur* $[0, 1]$ *à valeurs réelles; on suppose qu'il existe trois applications* δ, η, θ *continues croissantes de*

$[0, 1]$ *dans* $\mathbf{R}$ *nulles à l'origine,* θ *étant de plus concave, telles que :*

2.3.1 $$\begin{cases} \forall s \leqq t \leqq u, \quad \forall A \in \mathbb{A}, \\ \mathbf{E}\{|X(s)-X(t)|^2 \wedge |X(t)-X(u)|^2 I_A\} \\ \leqq \eta^2(u-s)\,\theta \circ \mathbf{P}(A), \end{cases}$$

2.3.2 $$\forall s \leqq t, \quad \mathbf{E}|X(s)-X(t)|^2 \leqq \delta^2(t-s), \qquad \mathbf{E}|X(0)|^2 < \infty,$$

2.3.3 $$\int_0^1 u^{-5/4}[\log(1+1/u)]^{1/4}\,\delta(u)\,du < \infty,$$

2.3.4 $$\int_0^1 u^{-3/2}\,\theta^{1/2}\left[\frac{u\log(1+1/u)}{\log 2}\right]\eta(u)\,du < \infty.$$

Alors X *vérifie la propriété de la limite centrale dans* $\mathscr{D}$ *et au sens de la convergence uniforme.*

Remarque 2.3.5. — Les conditions 2.3.2 et 2.3.3 sont couplées; elles sont toutes deux vérifiées si :

$$\exists \alpha > 1/2, \quad \forall s \leqq t, \qquad \mathbf{E}|X(s)-X(t)|^2 \leqq |t-s|^\alpha,$$

c'est essentiellement la condition (i) du théorème 2 de [7]. Les conditions 2.3.1 et 2.3.4 sont aussi couplées; elles sont toutes deux vérifiées si :

$$\exists p > 1, \ \beta > 1, \quad \forall s \leqq t \leqq u,$$
$$\mathbf{E}\{|X(t)-X(s)|^p\,|X(t)-X(u)|^p\} \leqq |u-s|^\beta;$$

la condition (ii) du théorème 2 de [7] est du même type, mais exige que p soit supérieur ou égal à 2.

Supposons par exemple que l'espace d'épreuves Ω soit un produit $[0, 1] \times [0, 1] \times \Omega_0$, les deux premiers facteurs étant munis de leur probabilité de Lesbesgue; notons λ une variable aléatoire sur le troisième facteur et définissons une fonction aléatoire X sur $[0, 1]$ en posant :

$$X(\omega, t) = \lambda(\omega_3)[I_{t \geqq \omega_1} - I_{t \geqq \omega_2}];$$

alors on a :

$$\mathbf{E}|X(s)-X(t)|^2 \leqq 2|t-s|,$$
$$\mathbf{E}\{\Delta_X^2(s, t, u) I_A\} \leqq |s-u|^2 \sup_{\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(A)} \mathbf{E}\{\lambda^2 I_B\};$$

on peut utiliser le théorème 2.3 en posant :

$$\delta(u) = u^{1/2}, \qquad \eta(u) = u, \qquad \theta(p) = \sup_{\mathbf{P}(B)=p} \mathbf{E}\{\lambda^2 I_B\};$$

on constate dans ce cas que les hypothèses du théorème sont vérifiées si et seulement si $\mathbf{E}\lambda^2$ est fini, c'est-à-dire si et seulement si X a la propriété de la limite centrale dans $\mathscr{D}$.

Par contre, on constate que X ne vérifie les hypothèses du théorème 2 de M. G. Hahn [7] que si $\mathbf{E}\lambda^4$ est fini, celles du théorème 7.4 de E. Giné et J. Zinn [6] que si λ est uniformément borné sur Ω_3 et celles du théorème 1 de [8] que si $\lambda=0$. Le théorème 2.3 améliore donc sensiblement ces différents résultats au moins dans le cadre de cet exemple.

2.4. Démonstration du théorème

Pour alléger cette démonstration, nous décomposerons ses calculs en lemmes successifs; on désignera par C différentes constantes finies. Le premier lemme vise à symétriser les hypothèses sur X :

LEMME 2.4.1. – *Sous les hypothèses du théorème, soit* X′ *une copie indépendante de* X; *posons* $X^s=X-X'$. *Pour tout triplet* $s\leqq t\leqq u$ *d'éléments de* [0, 1] *et toute partie mesurable* A *de* Ω, *on a alors :*

(1) $$\mathbf{E}\,|X^s(s)-X^s(t)|^2\leqq C\,\delta^2(t-s),$$

(2) $$\mathbf{E}\{\Delta^2 X^s(s,t,u)\,I_A\}\leqq C\,[\eta^2(u-s)\,\theta\circ\mathbf{P}(A)+\delta^2(u-s)\,\mathbf{P}^{1/2}(A)].$$

Démonstration. – Il suffit de prouver la seconde inégalité; nous posons:

$$x=X(t)-X(s),\quad x'=X'(t)-X'(s),$$
$$y=X(t)-X(u),\quad y'=X'(t)-X'(u);$$

on a alors :

$$|x-x'|\wedge|y-y'|\leqq|x|\wedge|y|+|x'|\wedge|y'|+|x'|\wedge|y|+|x|\wedge|y'|,$$

et par suite :

$$\mathbf{E}\{|x-x'|^2\wedge|y-y'|^2 I_A\}$$
$$\leqq 8\,\eta^2(u-s)\,\theta\circ\mathbf{P}(A)+4\,\mathbf{E}\{|x|^2\wedge|y'|^2 I_A\}$$
$$+4\,\mathbf{E}\{|x'|^2\wedge|y|^2 I_A\};$$

les deux derniers termes sont du même type et pour les évaluer, il suffit (lemme 1.0.3) de majorer:

$$\mathbf{E}\{[|x|^2 I_{|x|\geqq M}]\wedge[|y'|^2 I_{|y'|\geqq M}]\}$$

en fonction de $\mathbf{P}\{|x|\wedge|y'|\geqq M\}$. Or on a :

$$\mathbf{E}\{[|x|^2 I_{|x|\geqq M}]\wedge[|y'|^2 I_{|y'|\geqq M}]\}\leqq\mathbf{E}\{|x|\,I_{|x|\geqq M}\}\,\mathbf{E}\{|y'|\,I_{|y'|\geqq M}\},$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz majore ce dernier produit par :

$$\delta^2(u-s)\,[\mathbf{P}\{|x|\geqq M\}\,\mathbf{P}\{|y|\geqq M\}]^{1/2}$$
$$=\delta^2(u-s)\,[\mathbf{P}\{|x|\geqq M,\,|y|\geqq M\}]^{1/2},$$

d'où le résultat du lemme.

Dans le second lemme qui représente l'étape cruciale du calcul, on évalue des paramètres de la loi de $(S_N)^s$ à partir des mêmes paramètres de la loi de X^s :

LEMME 2.4.2. – *Sous les hypothèses du théorème et avec les notations du lemme* 2.4.1, *on a :*

(1) $$\mathbf{E}\,|(S_N)^s(s)-(S_N)^s(t)|^2\leqq CN\,\delta^2(t-s),$$

$$(2)\quad \mathbf{E}\{\Delta_{(S_N)^s}(s,t,u)\,\mathrm{I}_A\}$$
$$\leqq C N^{1/2}\left[\eta(u-s)\,\mathbf{P}^{1/2}(A)\,\theta^{1/2}\left[\frac{\mathbf{P}(A)\log(1+1/\mathbf{P}(A))}{\log 2}\right] + \delta(u-s)\,\mathbf{P}^{3/4}(A)\,[\log(1+1/\mathbf{P}(A))]^{1/4}\right].$$

Démonstration. — Il suffit de prouver la seconde inégalité; nous posons pour cela :

$$x = X^s(s) - X^s(t), \qquad y = X^s(t) - X^s(u),$$
$$m = |x| \wedge |y|, \qquad \mathrm{signe}(x) = \alpha, \qquad \mathrm{signe}(y) = \beta,$$
$$u = |x| - m, \qquad v = |y| - m,$$

et nous notons (ε_k) une suite de Bernoulli indépendante des données; nous voulons évaluer :

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k x_k\right| \wedge \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k y_k\right|;$$

or on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k x_k\right| \leqq \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \alpha_k m_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \{|x_k| - m_k\}\,\alpha_k\right|,$$
$$\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k y_k\right| \leqq \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \beta_k m_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \{|y_k| - m_k\}\,\beta_k\right|,$$

et par suite :

$$2.4.3\quad \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k x_k\right| \wedge \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k y_k\right| \leqq \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \alpha_k m_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \beta_k m_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \alpha_k u_k\right| \wedge \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \beta_k v_k\right|;$$

nous intégrons successivement ces différentes expressions relativement à la loi $\mathbf{P}_\varepsilon$ des (ε_k), puis à la loi $\mathbf{P}$ des autres variables. Pour toute partie mesurable A de l'espace d'épreuves produit et un utilisant une majoration d'Orlicz classique pour la première intégration ([9], lemme 3.1), on obtient :

$$\mathbf{E}_\varepsilon\left\{\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \alpha_k m_k\right|^2 \mathrm{I}_A\right\} \leqq C \sum_{k=1}^{N} m_k^2\, \mathbf{P}_\varepsilon(A)\log(1+1/\mathbf{P}_\varepsilon(A)),$$
$$\mathbf{E}_\varepsilon\left\{\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \beta_k m_k\right|^2 \mathrm{I}_A\right\} \leqq C \sum_{k=1}^{N} m_k^2\, \mathbf{P}_\varepsilon(A)\log(1+1/\mathbf{P}_\varepsilon(A));$$

en réintégrant, en utilisant l'hypothèse 2.4.1 (2), le lemme 1.0.3 et la concavité de la fonction : $x \to \dfrac{x \log(1+1/x)}{\log 2}$, on obtient :

$$\mathbf{E}\left\{\left[\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \alpha_k m_k\right|^2 + \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \beta_k m_k\right|^2\right] \mathrm{I}_A\right\}$$
$$\leqq \mathrm{CN}\left[\eta^2 (u-s)\, \theta\left[\frac{\mathbf{P}(A) \log(1+1/\mathbf{P}(A))}{\log 2}\right] + \delta^2 (u-s)\, \mathbf{P}^{1/2}(A) [\log(1+1/\mathbf{P}(A))]^{1/2}\right],$$

et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbf{E}\left\{\left[\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \alpha_k m_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \beta_k m_k\right|\right] \mathrm{I}_A\right\}$$
$$\leqq \mathrm{CN}^{1/2} \mathbf{P}^{1/2}(A)\left[\eta (u-s)\, \theta^{1/2}\left[\frac{\mathbf{P}(A) \log(1+1/\mathbf{P}(A))}{\log 2}\right] + \delta (u-s)\, \mathbf{P}^{1/4}(A) [\log(1+1/\mathbf{P}(A))]^{1/4}\right].$$

Pour conclure, il reste à évaluer le dernier terme de l'inégalité 2.4.3, nous le majorons brutalement à partir de son moment du quatrième ordre en utilisant l'idée fondamentale du théorème 2 de [7]. Nous remarquons que les ε_k sont indépendants des $(\alpha_k, \beta_k, m_k, u_k, v_k)$ et que les produits $(u_k v_k)$, $k \in [1, N]$ sont tous identiquement nuls. Il en résulte :

$$\mathrm{E}\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \alpha_k u_k\right|^4 \wedge \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \beta_k v_k\right|^4 \leqq \mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \alpha_k u_k\right|^2 \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \beta_k v_k\right|^2$$
$$\leqq \mathrm{N}^2\, \mathbf{E}\, u^2\, \mathbf{E}\, v^2 \leqq \mathrm{CN}^2 \delta^4 (u-s),$$

et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathrm{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \alpha_k u_k\right| \wedge \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \beta_k v_k\right| \mathrm{I}_A\right] \leqq \mathrm{CN}^{1/2} \delta (u-s)\, \mathbf{P}^{3/4}(A).$$

En regroupant les évaluations des termes successifs de 2.4.3, on obtient le résultat du lemme.

Le lemme suivant procède à la désymétrisation des évaluations précédentes :

LEMME 2.4.4. — *Sous les hypothèses du théorème et avec les notations des lemmes* 2.4.1 *et* 2.4.2, *en posant* $T_N = [S_N - \mathbf{E}\, S_N]/N^{1/2}$, *on a :*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\Delta_{(T_N}(s, t, u)\,I_A\}\\ &\leqq C\left[\eta(u-s)\,\mathbf{P}^{1/2}(A)\,\theta^{1/2}\left[\frac{\mathbf{P}(A)\log(1+1/\mathbf{P}(A))}{\log 2}\right]\right.\\ &\qquad\left.+\delta(u-s)\,\mathbf{P}^{3/4}(A)\,[\log(1+1/\mathbf{P}(A))]^{1/4}\right].\end{aligned}$$

Démonstration. — Nous posons $x = T_N(s) - T_N(t)$, $y = T_N(t) - T_N(u)$; pour établir l'inégalité ci-dessus, nous utilisons la majoration :

$$|x| \wedge |y| \leqq |x-x'| \wedge |y-y'| + |x'| \wedge |y| + |x| \wedge |y'|$$

et il suffit d'évaluer convenablement $\mathbf{E}[|x| \wedge |y|\,I_A]$ dans le seul cas (lemme 1.0.3) où A est (x, y)-mesurable et donc indépendant de x' et y'. Dans ce cas, on a successivement :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{|x-x'| \wedge |y-y'|\,I_A\} &\leqq \mathbf{E}\{\Delta_{(S_N)^s}(s, t, u)\,I_A\}/N^{1/2},\\ \mathbf{E}\{|x'| \wedge |y|\,I_A\} &\leqq \mathbf{E}\{|x'|\,I_A\} \leqq \delta(u-s)\,\mathbf{P}(A),\\ \mathbf{E}\{|x| \wedge |y'|\,I_A\} &\leqq \mathbf{E}\{|y'|\,I_A\} \leqq \delta(u-s)\,\mathbf{P}(A),\end{aligned}$$

en reportant, on obtient l'inégalité énoncée.

2.4.5. Nous terminons maintenant la preuve du théorème : sous ses hypothèses, le lemme 2.4.4 et le théorème 1.3 montrent que les lois μ_N des $[S_N - \mathbf{E}\, S_N]/N^{1/2}$, $N \in \mathbf{N}$, forment un ensemble relativement compact dans $M(\mathscr{D})$. De plus les hypothèses montrent que pour toute partie finie $T \subset [0, 1]$, les lois $\mu_N(T)$ des $\{[S_N(t) - \mathbf{E}\, S_N(t)]/N^{1/2}, t \in T\}$, $N \in \mathbf{N}$, convergent étroitement dans $M(\mathbf{R}^T)$ de sorte que la suite $(\mu_N, N \in \mathbf{N})$ n'a qu'un point adhérent et converge étroitement; c'est la propriété de la limite centrale dans $M(\mathscr{D})$; on rappelle que par ailleurs les hypothèses impliquent que la limite est la loi d'une fonction aléatoire gaussienne sur $[0, 1]$ à trajectoires continues dont la covariance Γ est donnée par :

$$\Gamma(t, s) = \mathbf{E}[(X(t) - \mathbf{E}\, X(t))\,(X(s) - \mathbf{E}\, X(s))],$$

et qu'il y a aussi propriété de la limite centrale au sens de la convergence uniforme.

RÉFÉRENCES

[1] P. H. BÉZANDRY et X. FERNIQUE, Analyse de fonctions aléatoires peu régulières sur [0, 1], *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **310**, série I, 1990, p. 745-750.

[2] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, J. Wiley, New York, 1968.
[3] N. N. Censov, Weak Convergence of Stochastic Processes whose Trajectories Have no Discontinuities of the Secund Order, *Theory Prob. Appl.*, vol. **1-3**, 1956, p. 140-149.
[4] X. Fernique, Régularité de fonctions aléatoires non gaussiennes, *Springer Lect. Notes Math.*, n° **976**, p. 1-74.
[5] I. I. Gihman et A. V. Skorohod, *The Theory of Stochastic Processes*, I, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.
[6] E. Giné et J. Zinn, Lectures on the Central Limit Theorem for Empirical Processes, *Lect. Notes Math.*, vol. **1221**, p. 50-113, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1986.
[7] M. G. Hahn, Central Limit Theorems in $\mathscr{D}$ ([0, 1]), *Z. Wahr verw. Gebiete*, vol. **44**, 1978, p. 89-101.
[8] D. Jukneviciene, Central Limit Theorem in the Space $\mathscr{D}$[0, 1], *Lithuanian Math. J.*, vol. **25**, 1985, p. 293-298.
[9] M. B. Marcus et G. Pisier, Characterisation of Alsmost Surely Continuous p-Stable Random Fourier Series and Strongly Stationary Processes, *Acta Math.*, vol. **152**, 1984, p. 245-301.
[10] V. Paulauskas et Ch. Stieve, On the Central Limit Theorem in D([0, 1]) and D([0, 1); H), *Lietuvos Matematikos Rinkings*, vol. **30**, 1990, p. 267-276.
[11] G. Pisier, Conditions d'entropie assurant la continuité de certains processus et applications à l'analyse harmonique, *Sém. d'Anal. Fonct.*, 1979-1980, exposés 13-14, Paris, École Polytechnique.
[12] R. Ranga Rao, The Law of Large Numbers for $\mathscr{D}$([0, 1])-Valued Random Variables, *Theory Prob. Appl.*, vol. **8**, 1963, p. 70-74.
[13] A. V. Skorohod, Limit Theorem for Stochastic Processes, *Theory Prob. Appl.*, vol. **1-3**, 1956, p. 261-290.

(*Manuscrit reçu le* 17 *septembre* 1990;
corrigé le 13 *mai* 1991.)