ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHÈLE THIEULLEN

Temps d'explosion d'équations différentielles stochastiques du type Doléans-Dade

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, n° 4 (1991), p. 549-557
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_4_549_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 4, 1991, p. 549-557. *Probabilités et Statistiques*

Temps d'explosion d'équations différentielles stochastiques du type Doléans-Dade

par

Michèle THIEULLEN

Laboratoire de Probabilités, Université Paris-VI, Tour 56, 3^e^ étage,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Nous montrons qu'une famille d'équations de Doléans-Dade : $X_t = x + \int_0^t A(X)_s \, dZ_s$ dans $\mathbb{R}^d$, où A est localement lipschitzien et $T(\infty, x)$ désigne le temps d'explosion de la solution issue de x, vérifie : $\mathbb{P}(\forall x \in \mathbb{R}^d, T(\infty, x) = +\infty) = 1$ lorsque A est à croissance sous-linéaire et que $C(n) \leqq (\operatorname{Log} n)^{1/2}$ pour tout n, $C(n)$ étant le rapport de Lipschitz de la restriction de A à l'ensemble des processus u tels que $\sup_{t \geqq 0} |u_t| \leqq n$.

Mots clés : Équations différentielles stochastiques, semi-martingales, temps d'explosion.

ABSTRACT. — For a family of Doléans-Dade equations: $X_t = x + \int_0^t A(X)_s \, dZ_s$ in $\mathbb{R}^d$ where A is locally lipschitz and $T(\infty, x)$ is the explosion time of the solution starting from x, we prove that $\mathbb{P}(\forall x \in \mathbb{R}^d, T(\infty, x) = +\infty) = 1$ when A has at most linear growth and $C(n) \leqq (\operatorname{Log} n)^{1/2}$ for every n, where $C(n)$ is the lipschitz coefficient of the restriction of A to the set of processes u such that $\sup_{t \geqq 0} |u_t| \leqq n$.

Classification A.M.S. : 60 H 10.

1. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité. La filtration $\mathscr{F}$ vérifie les conditions habituelles. Nous noterons $\mathscr{C}(\mathscr{F}; d)$ [resp. $\mathscr{C}(\mathscr{F}; d, m)$] l'ensemble des processus $\mathscr{F}$-adaptés continus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (resp. dans l'ensemble des matrices réelles à d lignes et m colonnes). A est une application de $\mathscr{C}(\mathscr{F}; d)$ dans $\mathscr{C}(\mathscr{F}; d, m)$ qui vérifie pour tout $\mathscr{F}$-temps d'arrêt T et tout couple (X, Y) de processus :

$$X^T = Y^T \quad \Rightarrow \quad A(X)^T = A(Y)^T \tag{A.1}$$

Z est une $\mathscr{F}$-semi-martingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $Z = (Z^i; 1 \leqq i \leqq m)$ où pour tout i, Z^i est une semi-martingale réelle égale à $M^i + V^i$, M^i étant une martingale locale continue et V^i un processus à variation finie continu. $\langle M^i \rangle$ désigne le crochet de M^i et pour tout $T > 0$, $\int_{[0, T]} |dV_s^i|$ est la variation totale de V^i sur [0; T]. On dit que Z appartient à $\mathscr{S}_\infty$ si pour tout $1 \leqq i \leqq m$, $\sqrt{\langle M^i \rangle_\infty} + \int_0^\infty |dV_s^i|$ appartient à $L^\infty(\Omega)$.

$$\sup_{1 \leqq i \leqq m} \left\| \sqrt{\langle M^i \rangle_\infty} + \int_0^\infty |dV_s^i| \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

définit une norme sur $\mathscr{S}^\infty$ que nous noterons $\|.\|$. $|.|$ désignera suivant les cas une norme sur $\mathbb{R}^d$ ou sur l'ensemble des matrices à d lignes et m colonnes. Nous noterons $\mathscr{R}_p$ l'ensemble des processus continus $\mathscr{F}$ adaptés pour lesquels $E(\sup_{t \geqq 0} |X_t|^p)$ est fini et $\mathscr{R}_{p,0}$ le sous-ensemble de $\mathscr{R}_p$ formé des X tels que $X_0 = 0$. $\sup_{[0, r]} |u|$ désignera $\sup_{0 \leqq t \leqq r} |u_t|$ et nous convenons que la borne inférieure d'un ensemble vide est $+\infty$.

Nous considérons la famille d'équations dites de Doléans-Dade :

$$X(x)_t = x + \int_0^t A(X(x))_s \, dZ_s \tag{A.x}$$

où $\int_0^{\cdot} A(X(x))_s \, dZ_s$ désigne l'intégrale stochastique du processus $A(X(x))$ par rapport à la semi-martingale Z et sera notée dorénavant $\int_0^{\cdot} A(X(x)) \, dZ$.

LEMME FONDAMENTAL 1.1 (cf. [2]). — *Soit $p > 2$. Supposons que Z appartient à $\mathscr{S}^\infty$. Il existe une constante $C_p > 0$ ne dépendant que de d, p et* *m telle que pour tout $\mathscr{F}$ temps d'arrêt* T *et tout* R *de* $\mathscr{C}(\mathscr{F}; d, m)$

$$\left[\mathrm{E}\left(\sup_{[0,\,\mathrm{T}]}\left|\int_0^{\cdot}\mathrm{R}\,d\mathrm{Z}\right|^p\Big|\mathscr{F}_0\right)\right]^{1/p}\leqq \mathrm{C}_p\|\mathrm{Z}\|[\mathrm{E}(\sup_{[0,\,\mathrm{T}]}|\mathrm{R}|^p|\mathscr{F}_0)]^{1/p}\quad (1.1)$$

Ce lemme est une conséquence du lemme suivant. On dit qu'un processus adapté croissant A engendre un potentiel borné par c si pour tout temps d'arrêt T, $\mathrm{E}(\mathrm{A}_\infty-\mathrm{A}_\mathrm{T}|\mathscr{F}_\mathrm{T})\leqq c$.

LEMME 1.2. – *Soit* Z *une semi-martingale réelle continue de décomposition* $\mathrm{Z}=\mathrm{M}+\mathrm{V}$ *où* M *appartient à* BMO *et* $\int_0^{\cdot}|d\mathrm{V}|$ *engendre un potentiel borné par c. Alors, pour tout* $p>1$ *il existe une constante a dépendant de p,* $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{BMO}}$ *et c telle que :*

$$\forall \mathrm{X}\in\mathscr{R}_p,\quad \left\|\int_0^{\cdot}\mathrm{X}\,d\mathrm{Z}\right\|_{\mathscr{R}_p}\leqq a\|\mathrm{X}\|_{\mathscr{R}_p}.$$

Démonstration du lemme 1.2. – Posons

$$\mathrm{A}_t=\int_0^t|d\mathrm{V}_s|,\qquad \mathrm{R}_t=\sup_{[0\,;\,t]}|\mathrm{X}|,$$

$$\mathrm{K}_t=\sup_{[0\,;\,t]}\left|\int_0^{\cdot}\mathrm{X}\,d\mathrm{M}\right|\qquad\text{et}\qquad \mathrm{L}_t=\int_0^t\mathrm{R}_u\,d\mathrm{A}_u.$$

Montrons qu'il existe une constante $\alpha>0$ telle que pour tous temps d'arrêt S et T tels que $\mathrm{S}\leqq\mathrm{T}$,

$$\mathrm{E}(\mathrm{K}_\mathrm{T}-\mathrm{K}_\mathrm{S})^2\leqq\alpha\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{BMO}}^2\,\mathrm{E}(\mathrm{R}_\mathrm{T}^2)$$

et

$$\mathrm{E}(\mathrm{L}_\mathrm{T}-\mathrm{L}_\mathrm{S})^2\leqq 4\,c^2\,\mathrm{E}(\mathrm{R}_\mathrm{T}^2).$$

L'inégalité annoncée est alors une conséquence du lemme 1.1 de [4].

Par l'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy il existe une constante $\alpha>0$ telle que pour tous temps d'arrêt S et T tels que $\mathrm{S}\leqq\mathrm{T}$

$$\mathrm{E}(\mathrm{K}_\mathrm{T}-\mathrm{K}_\mathrm{S})^2\leqq\alpha\,\mathrm{E}\left(\int_\mathrm{S}^\mathrm{T}\mathrm{R}_u^2\,d\langle\mathrm{M}\rangle_u\right),$$

Par intégration par parties le second membre de cette inégalité est majoré par $\alpha\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{BMO}}^2\,\mathrm{E}(\mathrm{R}_\mathrm{T}^2)$. Nous remarquons également que

$$\sup_{[0\,;\,t]}\left|\int_0^{\cdot}\mathrm{X}_u\,d\mathrm{V}_u\right|\leqq\mathrm{L}_t$$

et que

$$(\mathrm{L}_\mathrm{T}-\mathrm{L}_\mathrm{S})^2=2\int_\mathrm{S}^\mathrm{T}[(\mathrm{L}_t-\mathrm{L}_\mathrm{S})\,\mathrm{R}_t]\,d\mathrm{A}_t.$$

Par intégration par parties cette expression est majorée par $2c\,\mathrm{E}(\mathrm{L_T}-\mathrm{L_S})\,\mathrm{R_T}$. Ce qui donne, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\mathrm{E}(\mathrm{L_T}-\mathrm{L_S})^2 \leqq 4c^2\,\mathrm{E}(\mathrm{R_T^2})$.

2. ÉTUDE DE (A . x) LORSQUE A EST GLOBALEMENT LIPSCHITZIEN

Nous supposons dans ce paragraphe que A est globalement lipschitzien c'est-à-dire qu'il existe une constante $\mathrm{C}>0$ telle que pour tout $\mathscr{F}$-temps d'arrêt T et tous u, v appartenant à $\mathscr{C}(\mathscr{F}; d)$

$$\sup_{[0;\mathrm{T}]} |\mathrm{A}(u)-\mathrm{A}(v)| \leqq \mathrm{C} \sup_{[0;\mathrm{T}]} |u-v|.$$

Nous introduisons tout d'abord un type d'équations plus général que (A . x) qui permet d'étudier la solution de l'équation (A . x) après un temps d'arrêt. Ci-dessous pour une filtration $\mathscr{G}$, $\mathscr{C}^0(\mathscr{G}; d)$ désigne l'ensemble des X de $\mathscr{C}(\mathscr{G}; d)$ tels que $\mathrm{X}_0=0$. Un résultat tel que celui du théorème 2.1 est nécessaire ici car en général la solution de (A . x) ne définit pas un processus markovien puisque, pour tout t, $\mathrm{A}(\mathrm{X})_t$ dépend de $\{\mathrm{X}_s;\ s\leqq t\}$ et pas seulement de X_t.

THÉORÈME 2.1. — *Soit $\mathscr{G}$ une filtration vérifiant les conditions habituelles et* Y *une $\mathscr{G}$-semi-martingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ appartenant à $\mathscr{S}$. Soit* $(\mathrm{B}(x, .);\ x\in\mathbb{R}^d)$ *une famille d'applications de $\mathscr{C}^0(\mathscr{G}; d)$ dans $\mathscr{C}(\mathscr{G}; d, m)$ telle que :*

(B . 1) *Pour tout $\mathscr{G}$-temps d'arrêt* T *et tout u de $\mathscr{C}^0(\mathscr{G}; d)$*

$$\int_0^{\cdot} \mathrm{B}(x, u)^{\mathrm{T}}\, d\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} = \int_0^{\cdot} \mathrm{B}(x, u^{\mathrm{T}})\, d\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}.$$

(B . 2) *Il existe une application* $\mathrm{H}: \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\Omega\to\mathrm{R}^+$, *telle que*

(i) *pour tous x, y de $\mathbb{R}^d$ $\mathrm{H}(x, y, .)$ est $\mathscr{G}_0$-mesurable;*

(ii) *p.s. $(x, y)\mapsto\mathrm{H}(x, y)$ est une distance sur $\mathbb{R}^d$;*

(iii) *il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tous x, y de $\mathbb{R}^d$, tous u, v dans $\mathscr{C}^0(\mathscr{G}, d)$ et tout $\mathscr{G}$-temps d'arrêt* T *:*

$$\sup_{[0,\mathrm{T}]} |\mathrm{B}(x, u)-\mathrm{B}(y, v)| \leqq \alpha\,[\mathrm{H}(x, y)+\sup_{[0,\mathrm{T}]} |u-v|].$$

Alors pour tout x de $\mathbb{R}^d$ l'équation $\mathrm{U}=\int_0^{\cdot}\mathrm{B}(x, \mathrm{U})\,d\mathrm{Y}$ (B . x) *a une solution unique* $\mathrm{U}(x)$ *dans $\mathscr{R}_{p,0}$ qui vérifie pour tout $\mathscr{G}$-temps d'arrêt* T :

$$[\mathrm{E}(\sup_{[0,\mathrm{T}]} |\mathrm{U}(x)-\mathrm{U}(y)|^p \,|\, \mathscr{G}_0)]^{1/p} \leqq \mathrm{H}(x, y)\, 2^{4\alpha^2 m^2 \mathrm{C}_p^2 \|\cdot\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\|^2+1}.$$

La démonstration de ce théorème est obtenue en adaptant la méthode de [2]. Elle consiste à établir l'existence et l'unicité de la solution sur des intervalles successifs sur lesquels la norme de Y est « petite » comme l'indiquent les deux propositions suivantes que nous ne démontrons pas.

PROPOSITION 2.2. — *Soit* R *un* $\mathcal{G}$*-temps d'arrêt tel que* $\|Y^R\| \leqq 1/(2\alpha C_p)$. *Alors pour tout* x *de* $\mathbb{R}^d$ *l'équation* $u=\int_0^{\cdot} B(x;u)\,dY^R$ *a une solution unique notée* $u(x)$ *qui vérifie :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad [E(\sup_{[0,R]} |u(x)-u(y)|^p \,|\, \mathcal{G}_0)]^{1/p} \leqq H(x, y).$$

PROPOSITION 2.3. — *Soient* R *et* S *deux* $\mathcal{G}$*-temps d'arrêt vérifiant* $R \leqq S$ *p.s. et* $\|Y^R - Y^S\| \leqq 1/(2\alpha C_p)$. *On suppose que pour tout* x *de* $\mathbb{R}^d$ *l'équation* $u=\int_0^{\cdot} B(x;u)\,dY^R$ *a une solution unique dans* $\mathcal{R}_{p,0}$. *Il en est alors de même de l'équation* $v=\int_0^{\cdot} B(x;v)\,dY^S$. *De plus, pour tout* x, $v(x)^R = u(x)^R$ *et pour tous* x, y *:*

$$[E(\sup_{[0,S]} |v(x)-v(y)|^p \,|\, \mathcal{G}_0)]^{1/p} \leqq H(x, y) + 2[E(\sup_{[0,R]} |u(x)-u(y)|^p \,|\, \mathcal{G}_0)]^{1/p}.$$

Démonstration du théorème 2.1. — Posons $Y=(Y_i; 1 \leqq i \leqq m)$ avec $Y_i = m_i + a_i$ où m_i est une martingale continue et a_i un processus à variation finie continu. Soit $(S_k; k \geqq 0)$ la suite de temps d'arrêt définie par récurrence par $S_0 = 0$,

$$S_{k+1} = \inf\left\{ t > S_k : \sup_{1 \leqq i \leqq m} \left(\int_{S_k}^t d\langle m_i \rangle_s\right)^{1/2} + \int_{S_k}^t |da_i(s)| \geqq \frac{1}{2\alpha C_p} \right\}.$$

Montrons que pour temps tout d'arrêt T (y compris T égal à $+\infty$ p.s.) il existe r tel que $\mathbb{P}(S_r \geqq T) = 1$. Par définition de $\|Y^T\|$, on a pour tout $1 \leqq i \leqq m$, p.s. :

$$\|Y^T\| \geqq \left(\int_0^T d\langle m_i \rangle_s\right)^{1/2} + \int_0^T |da_i(s)|$$

Grâce à la concavité de la racine carrée, ceci entraîne, pour tout $k \geqq 1$:

$$\|Y^T\| \mathbf{1}_{\{S_k < T\}} \geqq \mathbf{1}_{\{S_k < T\}} \frac{1}{\sqrt{k}} \left[\sum_{l=0}^{k-1} \left(\int_{S_l}^{S_{l+1}} d\langle m_i \rangle_s \right)^{1/2} + \int_{S_l}^{S_{l+1}} |da_i(s)| \right].$$

On en déduit :

$$m\|Y^{T}\|\mathbf{1}_{\{S_k<T\}}\geqq\mathbf{1}_{\{S_k<T\}}\frac{1}{\sqrt{k}}$$
$$\times\sum_{l=0}^{k-1}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\int_{S_l}^{S_{l+1}}d\langle m_i\rangle_s\right)^{1/2}+\int_{S_l}^{S_{l+1}}|da_i(s)|\right]\geqq\frac{\sqrt{k}}{2m\alpha C_p}\mathbf{1}_{\{S_k<T\}},$$

par définition des S_l. On en déduit pour $r=[4(m\alpha C_p)^2\|Y^T\|^2]+1$, $\mathbb{P}(S_r\geqq T)=1$. Remarquons que par construction, pour $k\leqq r$, $\|Y^{S_k}-Y^{S_{k-1}}\|\leqq 1/(2\alpha C_p)$. On en déduit le théorème en appliquant la proposition 2.2 et en itérant la proposition 2.3.

Nous supposons désormais que $p>d$ et que A est globalement lipschitzien de rapport C. Nous supposons également dans ce paragraphe ainsi que dans le paragraphe 3 que Z appartient $\mathcal{S}_\infty$.

Le corollaire 2.4 ci-dessous est classique (*cf.* par exemple [1]).

COROLLAIRE 2.4. — $(A.x)$ *a une unique solution dans* $\mathcal{R}_p$ *et l'application de* $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *qui à* (x, t) *associe* $X(x)_t$ *est continue.*

THÉORÈME 2.5. — *Soit* S *un* $\mathcal{F}$*-temps d'arrêt. La famille* $\{(X(x)_{t+S}-X(x)_S;t\geqq 0);\ x\in\mathbb{R}^d\}$ *est solution d'une famille d'équations* $(B.x)$ *avec* $\alpha=C$ *et* $H(x, y)=2\sup_{[0,S]}|X(x)-X(y)|$.

Démonstration du corollaire 2.4. — X est solution de $(A.x)$ si et seulement si $X-x$ est solution de l'équation $u=\int_0^{\cdot}B(x;u)\,dZ$ où $B(x;u)=A(u+x)$ et $H(x, y)=|x-y|$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.1 et le critère de Kolmogorov.

Démonstration du théorème 2.5. — Pour tout $t\geqq 0$, posons $\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_{t+S}$, $Y_t=Z_{t+S}-Z_S$ et $U_t=X(x)_{t+S}-X(x)_S$. U est solution de l'équation $U_t=\int_0^t B(x;U)\,dY$ où pour tout u de $\mathcal{C}^0(\mathcal{G};d)$,

$$B(x;u)=\{A(F(u))(t+S);t\geqq 0\},$$

$F(u)$ étant défini par $F(u)_s=X(x)_s$ si $s\leqq S$; $F(u)_s=u_{s-S}+X(x)_S$ si $s\geqq S$. On vérifie sans difficulté que B satisfait (B.1) et (B.2).

3. ÉTUDE DE $(A.x)$ LORSQUE A EST LOCALEMENT LIPSCHITZIEN

Rappelons tout d'abord deux définitions.

DÉFINITION 3.1. — On dit que A est localement lipschitzien si pour tout n il existe une constante $C(n)>0$ telle que pour tout $\mathcal{F}$-temps d'arrêt

T et tous u, v appartenant à $\mathscr{C}(\mathscr{F};d)$ vérifiant $\sup_{[0;T]}|u| \leqq n$ et $\sup_{[0;T]}|v| \leqq n$ on ait :

$$\sup_{[0;T]} |A(u)-A(v)| \leqq C(n) \sup_{[0;T]} |u-v|.$$

DÉFINITION 3.2. – On dit que A est à croissance sous-linéaire s'il existe une constante $\Gamma > 0$ telle que pour tout temps d'arrêt T et tout u de $\mathscr{C}(\mathscr{F};d)$ on ait

$$\sup_{[0;T]} |A(u)| \leqq \Gamma(\sup_{[0;T]} |u|+1).$$

Nous supposerons désormais que $p > 2d$. Pour n entier, h_n désigne l'application qui à tout u de $\mathscr{C}(\mathscr{F};d)$ associe le processus défini par $h_n(u)_t = u_t$ si $|u_t| \leqq n$ et $h_n(u)_t = nu_t/|u_t|$ sinon. L'application $A \circ h_n$ est notée A_n. Les deux propositions suivantes sont bien connues

PROPOSITION 3.3. – *Supposons* A *localement lipschitzien. Soit* $x \in \mathbb{R}^d$. $X^n(x)$ *désigne la solution de l'équation*

$$X^n(x) = x + \int_0^{\cdot} A_n(X^n(x))\, dZ$$

et

$$T(n, x) = \inf\{t > 0 : |X^n(x)_t| > n\}.$$

Pour tout couple d'entiers (n, m) *vérifiant* $n < m$ *les processus* $(X^n(x))^{T(n, x)}$ *et* $(X^m(x))^{T(n, x)}$ *coïncident. La suite* $(T(n, x))_n$ *est strictement croissante.*

Dans la suite nous noterons $T(\infty, x) = \sup_n T(n, x)$.

PROPOSITION 3.4. – *Si de plus* A *est à croissance sous-linéaire :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}(T(\infty, x) = +\infty) = 1.$$

Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME 3.5. – *Si* A *est localement lipschitzien à croissance sous-linéaire et vérifie pour tout* n $C(n) \leqq (\operatorname{Log} n)^{1/2}$, *alors* $\mathbb{P}(\forall x \in \mathbb{R}^d$, $T(\infty, x) = +\infty) = 1$.

Pour obtenir ce théorème nous utiliserons deux lemmes.

LEMME 3.6. – *Soit* S *un temps d'arrêt tel que* $\|Z^S\| < \dfrac{1}{2mC_p\sqrt{\operatorname{Log} 2}}$.

Alors :

(*) *pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}^d$: $\lim_{n \to \infty} \sup_{r > 0} \mathbb{P}(\exists x \in K : T(n, x) \leqq S \wedge r) = 0$.

LEMME 3.7. — *Soit* S *et* T *deux temps d'arrêt tels que* $\| Z^T - Z^S \| < \frac{1}{2 m C_p \sqrt{\operatorname{Log} 2}}$ *et* $S \leqq T$ *p. s. Supposons que* S *vérifie l'assertion* $(*)$ *du lemme* 3.6. *Il en est alors de même de* T.

Remarque. — Si un temps d'arrêt τ vérifie $(*)$ alors

$$P(\forall x \in \mathbb{R}^d,\ T(\infty, x) \geqq \tau) = 1.$$

Démonstration du lemme 3.6. — Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $r > 0$. D'après ce qui précède pour tous x, y :

$$E\big(\sup_{[O\,;\,S \wedge r]} |X^n(x) - X^n(y)|^p\big) \leqq 2 n^q |x-y|^p,$$

où $q = 4 p m^2 C_p^2 \| Z^S \|^2 \operatorname{Log} 2$. Fixons a dans K. D'après le lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey (*cf.* [5], p. 47 et 60) p. s. pour tout x de K

$$\sup_{[O\,;\,S \wedge r]} |X^n(x) - X^n(a)|^p \leqq \gamma(m, p, K)\, B(S, p, n, K),$$

où $\gamma(m, p, K)$ est une constante ne dépendant que de m, p, et du diamètre de K et $E(B(S, p, n, K)) \leqq 2 n^q |K|^2$ où $|K|$ désigne la mesure de Lebesgue de K. En posant $k = [n^p/2]$ on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\sup_{x \in K} \sup_{[O\,;\,S \wedge r]} |X^n(x)|^p \geqq n^p\big)$$
$$\leqq \mathbb{P}(T(k, a) \leqq S \wedge r) + \mathbb{P}\left(\gamma(m, p, K)\, B(S, p, n, K) \geqq \frac{n^p}{2}\right).$$

On obtient le lemme 3.6 en utilisant la proposition 3.4 et l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff.

Démonstration du lemme 3.7. — Fixons $n_0 \in \mathbb{N}$ et considérons $F(n_0) = \{ S < +\infty \} \cap \{ \forall x \in K,\ T(n_0, x) \geqq S \}$. Pour $n \geqq n_0$, $(X^n)^S$ et $(X^{n_0})^S$ coïncident sur $F(n_0)$. Compte tenu des théorèmes 2.1 et 2.5 ceci nous permet d'écrire pour tous x, y de K :

$$E\big(\sup_{[S\,;\,T \wedge (S+r)]} |X^n(x) - X^n(y)|^p \mathbf{1}_{F(n_0)}\big) \leqq n^k n_0^l 8^p |x-y|^p,$$

avec $k = 4 p C_p^2 \| Z^T - Z^S \|^2 m^2 \operatorname{Log} 2$ et $l = 4 p C_p^2 \| Z^S \|^2 m^2 \operatorname{Log} 2$. On conclut comme précédemment grâce au lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey que :

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{r \geqq 0} \mathbb{P}(\exists x \in K,\ T(n, x) \leqq T \wedge (S+r) \mid F(n_0)) = 0,$$

ce qui entraîne :

$$\sup_{r \geqq 0} \mathbb{P}\big(\bigcap_{n \geqq 0} \{ \exists x \in K,\ T(n, x) \leqq T \wedge (S+r) \} \mid F(n_0)\big) = 0.$$

On fait tendre n_0 vers $+\infty$ et on utilise que, puisque S vérifie $(*)$, $\bigcup_{n_0} F(n_0)=\{S<+\infty\}$ p.s. On conclut alors sans difficulté que T vérifie $(*)$.

Démonstration du théorème 3.5. — On obtient ce théorème en utilisant les deux lemmes précédents et le même argument que celui utilisé pour démontrer le théorème 2.1.

Remarques :

1. La condition $C(n) \leqq (\operatorname{Log} n)^{1/2}$ provient de la norme choisie sur l'espace des semi-martingales qui donne lieu à l'inégalité du lemme 1.1.
2. Léandre [3] a donné des contre exemples d'équations du type

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \int_0^t b(X_s)\, ds$$

(où B est un mouvement brownien) avec σ et b localement lipschitziens sur $\mathbb{R}^d$ telles que, pour tout x $\mathbb{P}(T(\infty, x) = +\infty) = 1$ et $\mathbb{P}(\forall x \in \mathbb{R}^d,\ T(\infty, x) = +\infty) < 1$. Mais dans aucun de ces exemples σ et b ne sont à croissance sous-linéaire.

RÉFÉRENCES

[1] Y. BLAGOVESCENSKII et M. FREIDLIN, Certain Properties of Diffusion Processes Depending on a Parameter, *Soviet Mathematics* (*A.M.S. Translation of Doklady, Academy of Sciences of the U.S.S.R.*), vol. **2**, n° 3, 1961, p. 633-636.

[2] M. EMERY, Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques; application aux intégrales stochastiques multiplicatives, *Z. Wahr. verw. Gebiete*, vol. **41**, 1978, p. 241-262.

[3] R. LÉANDRE, Un exemple en théorie des flots stochastiques, *Séminaire de probabilités*, XVII; *Lect. Notes Math.*, Springer-Verlag, n° **986**, 1981/1982, p. 158-161.

[4] E. LENGLART, D. LÉPINGLE et M. PRATELLI, Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales, *Séminaire de probabilités*, XIV; *Lect. Notes Math.*, Springer-Verlag, n° **784**, 1978/1979, p. 26-48.

[5] D. STROOCK et S. R. S. VARADHAN, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag.

(*Manuscrit reçu le* 3 *septembre* 1990;
révisé le 17 *mai* 1991.)