

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARC YOR

## **Une explication du théorème de Ciesielski-Taylor**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 27, n° 2 (1991), p. 201-213

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1991\\_\\_27\\_2\\_201\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_2_201_0)

© Gauthier-Villars, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Une explication du théorème de Ciesielski-Taylor

par

**Marc YOR**

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre-et-Marie-Curie,  
Tour 56, 3<sup>e</sup> étage,  
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

---

RÉSUMÉ. — Pour tout entier  $d \geq 1$ , Ciesielski et Taylor ont montré, par un calcul de transformées de Laplace, l'identité en loi du temps passé par un mouvement brownien de dimension  $d+2$  dans la boule unité de  $\mathbb{R}^{d+2}$  et du premier temps d'atteinte par le mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$  de la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ .

En représentant ces deux quantités comme intégrales des temps locaux des parties radiales de ces deux mouvements browniens, et en s'appuyant sur les théorèmes de Ray-Knight qui explicitent les lois de ces deux processus de temps locaux, on obtient une explication de l'identité de Ciesielski-Taylor comme cas particulier de certaines identités en loi entre deux fonctionnelles quadratiques du mouvement brownien réel, lesquelles découlent d'un théorème de Fubini élémentaire pour les intégrales de Wiener doubles.

ABSTRACT. — For any integer  $d \geq 1$ , Ciesielski and Taylor have shown, via the computation of Laplace transforms, the identity in law between the total time spent by a  $(d+2)$ -dimensional Brownian motion in the unit ball of  $\mathbb{R}^{d+2}$  and the first hitting time of the unit sphere of  $\mathbb{R}^d$  by a  $d$ -dimensional Brownian motion.

These two quantities may be represented as integrals of the local times of the radial parts of the two Brownian motions. With the help of the Ray-Knight theorems which describe the laws of the two processes of radial local times, a simple explanation of the Ciesielski-Taylor identity in

---

*Classification A.M.S.* : Primary: 60J65, 60J55. Secondary: 60H05, 60G44.

law is presented, as a particular case of a large class of identities in law between two quadratic functionals of linear Brownian motion, which are consequences of an elementary Fubini theorem for double Wiener integrals.

*Key words* : Local times, Bessel processes, Fubini theorem, Wiener integrals.

## 1. PRÉLIMINAIRES

Dans cette Note, on considère, pour tout réel  $d > 0$ , le processus de Bessel de dimension  $d$  ( $R_d(t)$ ,  $t \geq 0$ ), issu de 0, c'est-à-dire la diffusion à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , dont le générateur infinitésimal  $L_d$  satisfait :

$$L_d(f)(x) = \frac{1}{2} f''(x) + \frac{d-1}{2x} f'(x)$$

pour tout  $x > 0$ , et  $f \in C_c^2(0, \infty)$ .

On spécifie de plus que, pour  $0 < d < 2$ , le point 0 est une barrière instantanément réfléchissante [pour  $d \geq 2$ , 0 n'est pas visité par ( $R_d(t)$ ,  $t > 0$ )].

Par souci de clarté, nous noterons  $H(R_d)$  la quantité  $H$  associée à  $R_d$ ; ainsi :  $T_1(R_d) = \inf \{ t \geq 0 : R_d(t) = 1 \}$ , et ( $L_t^a(R_d)$ ;  $a > 0$ ,  $t \geq 0$ ) désigne la famille bicontinue des temps locaux de  $R_d$ , définis comme densités de temps d'occupation, c'est-à-dire :

pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , borélienne,

$$\int_0^t ds \varphi(R_d(s)) = \int_0^\infty da \varphi(a) L_t^a(R_d).$$

(1.1) Notre but dans ce travail est de donner une explication aussi simple que possible, et ne reposant pas sur le calcul explicite de transformées de Laplace, de l'identité en loi (1 a) ci-dessous.

THÉORÈME 1 (Ciesielski-Taylor [5]) :

Pour tout  $d > 0$ , on a l'identité en loi :

$$(1 a) \quad \int_0^\infty ds \mathbf{1}_{(R_{d+2}(s) \leq 1)} \stackrel{(\text{loi})}{=} T_1(R_d).$$

*Remarque.* — La transformée de Laplace, en  $\frac{\lambda^2}{2}$ , de la loi de chacune des deux variables figurant en (1 a), est :

$$(1b) \quad \Phi_\nu(\lambda) \equiv \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1) I_\nu(\lambda)}$$

où  $I_\nu$  désigne la fonction de Bessel modifiée, dont l'indice  $\nu$  est lié à la « dimension »  $d$  par la formule :  $d=2(\nu+1)$ .

*Nous n'utiliserons pas ce résultat.*

Pour être tout à fait précis, indiquons que Ciesielski et Taylor [5] ont obtenu le théorème 1 pour les dimensions entières  $d=1, 2, \dots$ , puis que Gettoor-Sharpe [10] l'ont étendu à toute dimension  $d>0$  (voir également Pitman-Yor [13] pour de nombreux calculs sur les lois de certaines fonctionnelles des processus de Bessel qui complètent les résultats de Gettoor-Sharpe).

D'autre part, Biane [2] a étendu l'identité en loi (1 a) à des couples de diffusions plus généraux que  $(R_{d+2}, R_d)$ . Bien que notre méthode de démonstration de (1 a) s'applique également à la démonstration de la plupart des résultats de Biane, il nous a paru préférable ici, par souci de clarté, de présenter uniquement la démonstration de (1 a).

(1.2) Nous réécrivons maintenant chacun des deux membres de (1 a) comme intégrale de temps locaux; nous obtenons ainsi l'identité suivante, équivalente à (1 a) :

$$(1c) \quad \int_0^1 da L_\infty^a(R_{d+2}) \stackrel{(loi)}{=} \int_0^1 da L_{T_1}^a(R_d).$$

De façon à donner une démonstration directe de (1 c), nous commençons par représenter les processus  $(L_\infty^a(R_d), a>0)$  lorsque  $d>2$  (auquel cas  $R_d$  est transient), et  $(L_{T_1}^a(R_d), 0<a\leq 1)$  en termes de la norme euclidienne du mouvement brownien  $(B_t, t\geq 0)$ , ou du pont brownien  $(\tilde{B}_t, 0\leq t\leq 1)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , et tels que  $B_0 = \tilde{B}_0 = \tilde{B}_1 = 0$ .

THÉORÈME 2. — 1. Soit  $\alpha>0$ . Alors :

$$(L_\infty^a(R_{\alpha+2}); a>0) \stackrel{(loi)}{=} \left( \frac{1}{\alpha a^{\alpha-1}} |B_{a^\alpha}|^2; a\geq 0 \right)$$

$$(L_{T_1}^a(R_{\alpha+2}), 0<a\leq 1) \stackrel{(loi)}{=} \left( \frac{1}{\alpha a^{\alpha-1}} |\tilde{B}_{a^\alpha}|^2; 0\leq a\leq 1 \right)$$

2.  $(L_{T_1}^a(R_2), 0<a\leq 1) \stackrel{(loi)}{=} (a |B_{\log 1/a}|^2; 0<a\leq 1)$ .  
 3. Soit  $0<\alpha\leq 2$ . Alors :

$$(L_{T_1}^a(R_{2-\alpha}); 0<a\leq 1) \stackrel{(loi)}{=} \left( \frac{1}{\alpha a^{\alpha-1}} |B_{1-a^\alpha}|^2; 0<a\leq 1 \right).$$

L'essentiel des assertions énoncées dans ce théorème 2 est connu; en particulier, l'assertion 3 dans le cas particulier  $\alpha = 1$  se ramène au théorème de Ray-Knight classique :

$$(L_{T_1}^{1-a}(\beta); 0 \leq a \leq 1) \stackrel{(\text{loi})}{=} (|B_a|^2; 0 \leq a \leq 1)$$

(où  $\beta$  désigne le mouvement brownien réel issu de 0) en représentant  $(R_1(t), t \geq 0)$  comme :

$$(\beta_{A^{-1}(t)}, t \geq 0), \quad \text{avec} \quad A(t) = \int_0^t ds \mathbf{1}_{(\beta_s > 0)}$$

l'assertion 1 dans le cas particulier  $\alpha = 1$  a été déduite du résultat précédent par D. Williams [15] par retournement du temps de  $(\beta_t, t \leq T_1(\beta))$  en  $T_1(\beta)$ ; d'autre part, l'assertion 2 a été obtenue par Le Gall [11]. Enfin, pour obtenir les assertions 1 et 3 dans toute leur généralité, il suffit de procéder par changement de temps à partir de  $R_3$  et de  $R_1$  respectivement, à l'aide du

LEMME 1 (Biane-Yor [3]). — Soit  $\alpha > 0$ . On note, pour simplifier l'écriture,  $h(x) = x^\alpha$ .  $R_d$  désigne toujours un processus de Bessel de dimension  $d$ .

1. Si  $d > 2(1 - \alpha)$ , il existe un processus de Bessel  $R_{d_\alpha}$ , avec

$$d_\alpha = \frac{d}{\alpha} + 2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right),$$

tel que :

$$R_d^\alpha(t) \equiv h(R_d(t)) = R_{d_\alpha} \left( \int_0^t ds h'^2(R_d(s)) \right) \quad (t \geq 0).$$

2. Si  $\alpha > 0$ , il existe un processus de Bessel de dimension 3, soit  $R_3$ , tel que :

$$R_{2+\alpha}^\alpha(t) \equiv h(R_{2+\alpha}(t)) = R_3 \left( \int_0^t ds h'^2(R_{2+\alpha}(s)) \right) \quad (t \geq 0).$$

3. Si  $0 < \alpha < 2$ , il existe un mouvement brownien réfléchi, soit  $R_1$ , tel que :

$$R_{2-\alpha}^\alpha(t) \equiv h(R_{2-\alpha}(t)) = R_1 \left( \int_0^t ds h'^2(R_{2-\alpha}(s)) \right).$$

Reprenons la discussion des assertions du théorème 2 :

la première partie de l'assertion 1 du théorème a été démontrée de cette façon par J. F. Le Gall [11], et Biane-Yor [4] qui donnent une autre représentation du membre de droite; cette assertion, ainsi que l'assertion 2 ont également été utilisées de façon essentielle dans Pitman-Yor [14].

(1.3) Grâce au théorème 2, la démonstration de l'identité en loi (1 c) est ramenée, selon les valeurs de  $d$ , à la démonstration des trois égalités

en loi suivantes :

$$(1d) \quad \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{da}{a^{\alpha-1}} |B_{a^\alpha}|^2 \stackrel{(loi)}{=} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-2} \int_0^1 \frac{da}{a^{\alpha-3}} |\tilde{B}_{a^{\alpha-2}}|^2 & (\alpha > 2) \\ \int_0^1 da a |B_{\log 1/a}|^2 & (\alpha = 2) \\ \frac{1}{2-\alpha} \int_0^1 \frac{da}{a^{1-\alpha}} |B_{1-a^{2-\alpha}}|^2 & (\alpha < 2) \end{cases}$$

A l'évidence, il est suffisant de démontrer les égalités en loi (1d) avec  $B$ , mouvement brownien réel, resp :  $\tilde{B}$  pont brownien réel, ce que nous supposerons toujours à partir de maintenant; dans la suite, nous supprimerons donc la notation de la norme euclidienne  $|\cdot|$  dans les deux membres de (1d), ou des identités en loi dérivées de (1d).

D'autre part, compte tenu des calculs menés dans le paragraphe 2, il nous a paru plus commode de transformer les deux membres de (1d) après y avoir effectué le changement de variables  $a = b^{1/\alpha}$  (voir toutefois la remarque qui termine le paragraphe 2); nous obtenons ainsi :

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{da}{a^{\alpha-1}} B_{a^\alpha}^2 = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^1 \frac{db}{b^{2(1-(1/\alpha))}} B_b^2,$$

et des formules semblables pour les expressions qui figurent dans le membre de droite de (1d). L'identité en loi (1d) équivaut donc, en posant  $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ , à :

$$(1e) \quad \frac{1}{\alpha^2} \int_0^1 \frac{db}{b^{2(1-\bar{\alpha})}} B_b^2 \stackrel{(loi)}{=} \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-2)\alpha} \int_0^1 \frac{db}{b^{2(1-\bar{\alpha})}} \tilde{B}_{b^{1-2\bar{\alpha}}}^2 & (\alpha > 2) \\ \frac{1}{4} \int_0^1 db B_{\log 1/b}^2 & (\alpha = 2) \\ \frac{1}{(2-\alpha)\alpha} \int_0^1 db B_{1-b^{2\bar{\alpha}-1}}^2 & (\alpha < 2) \end{cases}$$

C'est cette dernière identité en loi (1e) que nous allons démontrer au paragraphe suivant.

## 2. THÉORÈME DE FUBINI POUR LES INTÉGRALES DE WIENER DOUBLES, ET APPLICATIONS

(2.1) La clé de notre preuve de (1 e) est la

PROPOSITION 1. — 1. Soient  $B$  et  $C$  deux mouvements browniens réels issus de 0, indépendants, et  $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  fonction borélienne telle que :

$$\int_0^1 du \int_0^1 ds \varphi^2(u, s) < \infty.$$

Alors, on a :

$$\int_0^1 dB_u \int_0^1 dC_s \varphi(u, s) = \int_0^1 dC_s \int_0^1 dB_u \varphi(u, s).$$

En conséquence, on a :

$$(2a) \quad \int_0^1 du \left( \int_0^1 dB_s \varphi(u, s) \right)^2 \stackrel{(loi)}{=} \int_0^1 du \left( \int_0^1 dB_s \varphi(s, u) \right)^2.$$

2. En particulier, pour tout  $0 \leq \beta < 1$ , on a :

$$\int_0^1 \frac{dB_u}{u^\beta} C_u = \int_0^1 dC_s \int_s^1 \frac{dB_u}{u^\beta},$$

et, en conséquence :

$$(2b) \quad \int_0^1 \frac{du}{u^{2\beta}} B_u^2 \stackrel{(loi)}{=} \int_0^1 du \left( \int_u^1 \frac{dB_s}{s^\beta} \right)^2.$$

La première partie de la proposition, dont la démonstration est d'ailleurs immédiate, est reprise de Donati-Martin - Yor [7]; la seconde partie est une application de la précédente pour  $\varphi(u, s) = \frac{1}{u^\beta} 1_{(s \leq u)}$ .

(2.2) Nous remarquons maintenant que le membre de gauche de (1 e) n'est autre, à la constante multiplicative  $\frac{1}{\alpha^2}$  près, que le membre de gauche de (2 b), dans lequel on prend  $\beta = 1 - \bar{\alpha}$ .

De façon à rapprocher les expressions qui figurent dans le membre de droite de (1 e) de celle qui figure dans le membre de droite de (2 b), nous donnons une autre représentation des processus gaussiens qui figurent en (2 b).

LEMME 2. — Soit  $\beta \in ]0, 1[$ . Les identités en loi suivantes ont lieu entre les différents processus gaussiens ci-dessous, indexés par  $a \in ]0, 1[$  :

$$(2c) \quad \left( \int_a^1 \frac{dB_s}{s^\beta}, 0 < a \leq 1 \right) \stackrel{(loi)}{=} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\beta-1}} \frac{1}{a^{2\beta-1}} \tilde{B}_{a^{2\beta-1}} \\ (0 < a \leq 1), \text{ pour } \beta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\stackrel{(loi)}{=} \begin{cases} B_{\log 1/a} \\ (0 < a \leq 1), \text{ pour } \beta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\stackrel{(loi)}{=} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}} B_{(1-a^{1-2\beta})} \\ (0 < a \leq 1), \text{ pour } \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

En fait, il nous a paru intéressant de présenter ces identités en loi dans un cadre plus général (qui permettrait d'ailleurs d'obtenir la démonstration de certains des résultats de Biane [2]).

PROPOSITION 2 :

1. Soit  $\varphi : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  fonction borélienne telle que : pour tout  $0 < a < 1$ ,  $\int_a^1 ds \varphi^2(s) < \infty$ .

Alors, on a :

$$(i) \quad \left( \int_a^1 dB_s \varphi(s), 0 < a \leq 1 \right) \stackrel{(loi)}{=} (B_{\int_a^1 ds \varphi^2(s)}; 0 < a \leq 1).$$

2. Soit  $\varphi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction borélienne telle que : pour tout  $a > 0$ ,  $0 < \int_a^\infty ds \varphi^2(s) < \infty$ .

Supposons en outre que :  $\int_1^\infty ds \varphi^2(s) = 1$ , et posons :

$$\psi(a) = \left( \int_a^\infty ds \varphi^2(s) \right)^{-1}.$$

Alors, on a :

$$(ii) \quad \left( \int_a^1 dB_s \varphi(s), 0 < a \leq 1 \right) \stackrel{(loi)}{=} \left( \frac{1}{\psi(a)} \tilde{B}_{\psi(a)}, 0 < a \leq 1 \right).$$

Démonstration : 1. La première assertion découle immédiatement du calcul de la covariance de chacun des deux processus qui figurent en (i).



2. On commence par remarquer que :

$$(iii) \left( \Psi(a) \int_a^\infty dB_s \varphi(s); a > 0 \right) \stackrel{(loi)}{=} (B_{\Psi(a)}; a > 0),$$

en identifiant, là encore, les covariances des deux membres.

On écrit ensuite, pour  $0 < a < 1$  :

$$\begin{aligned} \int_a^1 dB_s \varphi(s) &= \int_a^\infty dB_s \varphi(s) - \int_1^\infty dB_s \varphi(s) \\ &= \frac{1}{\Psi(a)} \left( \Psi(a) \int_a^\infty dB_s \varphi(s) - \Psi(a) \int_1^\infty dB_s \varphi(s) \right) \end{aligned}$$

et l'identité en loi (ii) découle alors de (iii) et de la représentation (en loi) de  $(\tilde{B}_u, u \leq 1)$  comme :  $(B_u - u B_1; u \leq 1)$ .

(2.3) Finalement, l'identité en loi (1 e) découle des identités en loi (2 b) et (2 c), dans lesquelles on a pris  $\beta = 1 - \bar{\alpha}$ .

*Remarque.* — Il apparaît maintenant clairement, à la suite de cette démonstration, que le changement de variables  $a = b^{1/\alpha}$  effectué au cours du paragraphe 1 n'a rien d'essentiel, et qu'une légère modification de la démonstration ci-dessus permettrait de démontrer directement (1 d) au lieu de (1 e).

### 3. IDENTITÉ DE HARDY ET APPLICATIONS

(3.1) Comme nous l'avons signalé en (1.2), Biane-Yor [4] ont présenté une partie des résultats du théorème 2 de manière un peu différente, en introduisant, pour tout  $p > -\frac{1}{2}$ , les processus gaussiens suivants :

$$(3a) \quad V_p(t) = \frac{1}{t^p} \int_0^t dB_s s^p \quad (t > 0); \quad V_p(0) = 0$$

(de façon à ne pas créer de confusion de notations entre ce travail et [4], nous supposons à nouveau ici, dans un premier temps, que  $B$  est un mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , issu de 0).

Remarquons que, par application de la formule d'Itô, on a les formules :

$$(3a') \quad V_p(t) = B_t - \frac{1}{t^p} \int_0^t ds p s^{p-1} B_s \quad (t > 0)$$

et

$$(3a'') \quad V_p(t) = B_t - p \int_0^t \frac{ds}{s} V_p(s) \quad (t \geq 0)$$

[en particulier,  $(V_p(t), t \geq 0)$  est une semi-martingale].

La raison pour laquelle les processus  $V_p$  sont particulièrement bien adaptés à l'énoncé des théorèmes de Ray-Knight pour les temps locaux des processus de Bessel (théorème 2 ci-dessus) est que l'on déduit de (3 a), par changement de temps, les relations suivantes :

$$(3 b) \quad (V_p(t), t \geq 0) \stackrel{(loi)}{=} \left( \frac{1}{t^p} B_{(t^{2p+1}/2p+1)}, t \geq 0 \right) \\ \stackrel{(loi)}{=} \left( \frac{1}{\sqrt{2p+1} t^p} B_{t^{2p+1}}, t \geq 0 \right).$$

Introduisons également le processus  $(\tilde{V}_p(t), t \leq 1)$  défini comme étant  $(V_p(t), t \leq 1)$  conditionné par  $V_p(1) = 0$ .

On déduit immédiatement de (3 b) la relation :

$$(3 \tilde{b}) \quad (\tilde{V}_p(t), t \leq 1) \stackrel{(loi)}{=} \left( \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \tilde{B}_{t^{2p+1}}, t \leq 1 \right).$$

Nous pouvons maintenant réécrire partiellement le théorème 2 sous la forme des identités en loi suivantes :

$$(3 c) \quad \text{pour } p > -\frac{1}{2}, (L_\infty^a(\mathbf{R}_{2p+3}), a \geq 0) \stackrel{(loi)}{=} (|V_p(a)|^2, a \geq 0)$$

$$(3 d) \quad \text{pour } p > \frac{1}{2}, (L_{T_1}^a(\mathbf{R}_{2p+1}), a \leq 1) \stackrel{(loi)}{=} (|\tilde{V}_{p-1}(a)|^2, a \leq 1).$$

En conséquence, le théorème de Ciesielski-Taylor, sous la forme de l'identité (1 c) :

$$\int_0^1 da L_\infty^a(\mathbf{R}_{2p+3}) \stackrel{(loi)}{=} \int_0^1 da L_{T_1}^a(\mathbf{R}_{2p+1}) \quad \left( p > -\frac{1}{2} \right)$$

peut être réécrit, tout au moins lorsque  $p > \frac{1}{2}$ , sous la forme :

$$(3 e) \quad \int_0^1 da |V_p(a)|^2 \stackrel{(loi)}{=} \int_0^1 da |\tilde{V}_{p-1}(a)|^2.$$

D'après la remarque qui suit le théorème 1, la transformée de Laplace, en  $\frac{\lambda^2}{2}$ , de la loi de chacune de ces variables est donnée par la formule (1 b),

dans laquelle on prend  $v = p - \frac{1}{2}$ , ce qui donne :

$$(3 f) \quad \Phi_{p-1/2}(\lambda) \equiv \frac{\lambda^{p-1/2}}{2^{p-1/2} \Gamma(p + (1/2)) I_{p-1/2}(\lambda)}.$$

Nous terminons cette liste de remarques élémentaires concernant les processus  $(V_p(t), t \geq 0)$  en ramenant l'étude de la loi de  $\int_0^1 \frac{ds}{s^m} |V_p(s)|^2$ , pour  $m < 2$ , à celle de  $\int_0^1 ds |V_{p_m}(s)|^2$ , pour un nouvel indice  $p_m \equiv \frac{4p+m}{4-2m}$ .

En effet, à l'aide de l'identité en loi (3 b), on obtient :

$$(3 g) \quad \int_0^1 \frac{ds}{s^m} |V_p(s)|^2 \stackrel{(loi)}{=} \frac{1}{(2p+1)^2} \times \int_0^1 \frac{du |B_u|^2}{u^{(4p+m)/(2p+1)}} \stackrel{(loi)}{=} \left(\frac{2}{2-m}\right)^2 \int_0^1 ds |V_{p_m}(s)|^2$$

(3.2) Nous réécrivons maintenant  $(V_p(t), t \leq 1)$  à l'aide de la formule (3 a'), sous la forme :

$$V_p(t) = B_t - G_p(t), \quad \text{où} \quad G_p(t) = \frac{1}{t^p} \int_0^t ds p s^{p-1} B_s;$$

Dans la suite, nous noterons simplement  $G_p$  au lieu de  $G_p(1)$ .

Remarquons que  $G \equiv G_1$  n'est autre que le barycentre de la trajectoire brownienne  $(B_t, t \leq 1)$ ; plus généralement,  $G_p$  est le barycentre de  $(B_t, t \leq 1)$  relativement à la mesure  $\mu_p(ds) \equiv p s^{p-1} ds$  sur  $[0, 1]$ .

L'identité de Hardy (3 h) ci-dessous, que nous appliquerons par la suite à  $f(t) = B_t$ , et à  $\mu(dt) \equiv \mu_p(dt)$  nous fournira une identité presque sûre qui complète les identités en loi déjà obtenues dans ce travail.

**THÉORÈME 3.** — Soit  $\mu(dt)$  probabilité diffuse sur  $[0, 1]$  telle que, pour tout  $t \in ]0, 1]$ , on ait :  $\mu([0, t]) > 0$ .

A toute fonction  $f \in L^2(\mu)$ , on associe sa transformée de Hardy :

$$Hf(t) = \frac{1}{\mu[0, t]} \int_0^t d\mu(s) f(s), \quad \text{et} \quad \bar{f} = \int_0^1 d\mu(s) f(s).$$

On a alors l'identité de Hardy :

$$(3 h) \quad \int d\mu(t) (f(t) - \bar{f})^2 = \int d\mu(t) (f(t) - Hf(t))^2.$$

$H$  est un opérateur continu de  $L^2(\mu)$  dans lui-même, tel que :

$$\|Hf\|_2 \leq 2 \|f\|_2.$$

Plus généralement, pour tout  $p > 1$ ,  $H$  définit un opérateur continu de  $L^p(\mu)$  dans lui-même tel que :  $\|Hf\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$ .

Ce théorème est tout à fait classique, surtout en ce qui concerne les inégalités dans  $L^p$  (voir par exemple, Hardy-Littlewood-Polya [12], qui contient en outre de nombreuses références).

L'identité (3h) est peut-être un peu moins connue; en voici une démonstration : on peut supposer, sans perte de généralité, que  $\bar{f}=0$ . Il est alors équivalent de démontrer :

$$\int d\mu(t) (Hf)^2(t) = 2 \int d\mu(t) f(t) Hf(t).$$

Or, on montre aisément cette identité en utilisant l'expression de  $(Hf)^2(t)$  donnée par la formule :

$$0 = \bar{f}^2 \equiv (Hf)^2(1) = (Hf)^2(t) + 2 \int_t^1 d(Hf)(y) (Hf)(y).$$

En fait, il est beaucoup plus instructif d'interpréter les inégalités  $L^p$  du théorème 3 comme des cas particuliers de l'inégalité de Doob dans  $L^p$  pour les martingales (Dubins-Gilat [9], Azéma-Yor [1]) et l'identité (3h) comme un cas particulier de l'identité :

$$E[M_\infty^2] = E[[M, M]_\infty]$$

pour les martingales de carré intégrable; cette dernière interprétation est faite par Dellacherie-Meyer-Yor [6], p. 112-113.

(Pour d'autres relations entre la transformation de Hardy et le mouvement brownien, voir, par exemple, C. Donati-Martin et M. Yor [8].)

Voici maintenant l'application au mouvement brownien que nous avons en vue ici.

COROLLAIRE. — Soit  $p > 0$ , et  $(B_t, t \geq 0)$  mouvement brownien plan issu de 0. On a alors :

$$(3i) \quad \int_0^1 ds s^{p-1} |B_s - G_p|^2 = \int_0^1 ds s^{p-1} |B_s - G_p(s)|^2, \quad p.s.$$

De plus, la loi de la variable ci-dessus est identique à celle de

$$\left( \frac{2}{1+p} \right)^2 \int_0^1 ds |V_{p'}(s)|^2, \quad \text{avec } p' \equiv \frac{3p+1}{2+2p},$$

ou encore à celle de :

$$\left( \frac{2}{1+p} \right)^2 \int_0^1 ds |\tilde{V}_{p''}(s)|^2, \quad \text{avec } p'' = \frac{p-1}{2+2p}, \quad \text{d'après (3e).}$$

La transformée de Laplace, en  $\frac{\lambda^2}{2}$ , de la loi de ces deux dernières variables est :

$$(3j) \quad \Phi_{p/1+p} \left( \frac{2\lambda}{1+p} \right) \quad [\text{cf. : (1b), où } \Phi_v \text{ est définie}]$$

Nous terminons ce paragraphe par le commentaire suivant, concernant le cas  $p=1$  du corollaire : l'identité en loi suivante

$$\int_0^1 ds |B_s - G|^2 \stackrel{(\text{loi})}{=} \int_0^1 ds |\tilde{B}_s|^2$$

qui est un cas très particulier des résultats de ce corollaire, a déjà été obtenue en [7] au moyen d'une application du théorème de Fubini ci-dessus [plus précisément, de la formule (2 a)], différente de celle développée dans le présent travail pour :

$$\int_0^1 ds |V_1(s)|^2 = \int_0^1 ds |B_s - G_1(s)|^2.$$

Remarquons d'autre part que, d'après (3 c), la variable :

$$\int_0^1 ds |B_s - G|^2 = \int_0^1 ds |V_1(s)|^2$$

est aussi égale, en loi, à :  $\int_0^\infty ds 1_{(\mathbb{R}_s(s) \leq 1)}$ .

Ce sont ces considérations qui nous ont amené à envisager plus généralement une démonstration de l'identité (1 a) due à Ciesielski et Taylor à l'aide du théorème de Fubini (proposition 1) pour les intégrales de Wiener doubles.

## RÉFÉRENCES

- [1] J. AZÉMA et M. YOR, (i) Une solution simple au problème de Skorokhod, p. 90-115; (ii) Compléments à l'exposé précédent, p. 625-633, *Séminaire de Probabilités XIII; Lect. Notes Maths.*, n° 721, Springer, 1979.
- [2] Ph. BIANE, Comparaison entre temps d'atteinte et temps de séjour de certaines diffusions réelles, *Séminaire de Probabilités XIX; Lect. Notes Maths.*, n° 1123, Springer, 1985, p. 291-296.
- [3] Ph. BIANE et M. YOR, Valeurs principales associées aux temps locaux browniens, *Bull. Sci. Maths.*, t. 111, 1987, p. 23-101.
- [4] Ph. BIANE et M. YOR, Variations sur une formule de Paul Lévy, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 23, suppl. au n° 2, 1987, p. 359-377.
- [5] Z. CIESIELSKI et S. J. TAYLOR, First Passage Time and Sojourn Density for Brownian Motion in Space and the Exact Hausdorff Measure of the Sample Path, *Trans. Am. Math. Soc.* vol. 103, 1962, p. 434-450.
- [6] C. DELLACHERIE, P. A. MEYER et M. YOR, Sur certaines propriétés des espaces de Banach  $H^1$  et BMO, *Séminaire de Probabilités XII; Lect. Notes Maths.*, n° 649, Springer, 1978, p. 98-113.
- [7] C. DONATI-MARTIN et M. YOR, Fubini's Theorem for Double Wiener Integrals and the Variance of the Brownian Path, *Ann. Inst. H.-Poincaré, Probabilités et Statistiques*, vol. 27, n° 2, 1991, p.181-200

- [8] C. DONATI-MARTIN et M. YOR, Mouvement brownien et inégalité de Hardy dans  $L^2$ , *Séminaire de Probabilités XXIII; Lect. Notes Maths.*, n° 1372, Springer, 1989, p. 315-323.
- [9] L. E. DUBINS et D. GILAT, On the Distribution of Maxima of Martingales, *Proc. A.M.S.*, vol. 68, n° 3, 1978, p. 337-338.
- [10] R. K. GETTOOR et M. J. SHARPE, Excursions of Brownian Motion and Bessel Processes, *Z. Wahr.*, vol. 47, 1979, p. 83-106.
- [11] J. F. LE GALL, Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne, *Séminaire de Probabilités XIX; Lect. Notes Maths.*, n° 1123, Springer, 1985, p. 297-313.
- [12] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1967.
- [13] J. W. PITMAN et M. YOR, Bessel Processes and Infinitely Divisible Laws, *Stochastic Integrals*, D. WILLIAMS éd., *Lect. Notes Maths.*, n° 851, Springer, 1981, p. 285-370.
- [14] J. W. PITMAN et M. YOR, Some Divergent Integrals of Brownian Motion, *Analytic and Geometric Stochastics*, D. KENDALL éd., Supplement to *Adv. Appl. Prob.*, 1986, p. 109-116.
- [15] D. WILLIAMS, Path Decomposition and Continuity of Local Time for One Dimensional Diffusions. *Proc. London Math. Soc.*, (3), vol. 28, 1974, p. 736-768.

(Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> mars 1990.)