

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

## CHRISTOPHE STRICKER **Arbitrage et lois de martingale**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 26, n° 3 (1990), p. 451-460

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1990\\_\\_26\\_3\\_451\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_3_451_0)

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Echanges Annuaire

## Arbitrage et lois de martingale

par

**Christophe STRICKER**

Université de Franche-Comté  
U.A. CNRS 741  
25030 Besançon Cedex, France

---

RÉSUMÉ. — Etant donné un processus  $(X_t)$  càdlàg et adapté, nous étudions dans cet article des conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence d'une loi  $Q$  équivalente à la loi initiale  $P$  telle que  $(X_t)$  soit une martingale sous  $Q$ . Cette question particulièrement importante en mathématiques financières a été abordée par de nombreux auteurs. Elle vient d'être complètement résolue dans le cas discret par Dalang, Morton et Willinger [3]. Les méthodes que nous proposons dans cet article, nous permettent de traiter le cas continu grâce à un résultat de Yan [8] et d'aborder le cas discontinu.

ABSTRACT. — We characterize those vector-valued continuous stochastic processes which can become a martingale under an equivalent change of measure. Characterizing stochastic processes which can be transformed into martingales by means of an equivalent change of measure is of particular interest in the analysis of stochastic models of securities markets. The discrete case has been recently solved by Dalang, Morton and Willinger [3]. But their proof does not work in the continuous case. Our main tool is a result of Yan [8].

---

*Mots clés* : loi de martingale, arbitrage, semimartingale  
*Classification A.M.S.* : 60 G 44

## 0. INTRODUCTION

Soit  $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t \leq 1}, P)$  un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles et soit  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq 1}$  un processus càdlàg, adapté à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . L'objet de cet article est d'étudier des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les intégrales stochastiques  $(H \cdot X)_1$  pour qu'il existe une loi  $Q$  équivalente à  $P$ , de densité bornée, telle que  $(X, Q)$  soit une martingale. Divers auteurs ont abordé ce problème qui a un lien très étroit avec la notion d'arbitrage en mathématiques financières. En particulier Harrison et Pliska [6] ont étudié le cas où le cardinal de  $\Omega$  était fini et où  $(X_t)$  était un processus discret intégrable indexé par  $t = t_0, \dots, t_n$ . Dans ce cas il existe une loi  $Q$  possédant les propriétés ci-dessus si et seulement s'il n'existe pas de processus prévisible élémentaire borné  $H$  tel que  $(H \cdot X)_{t_n \geq 0}$  et  $P[(H \cdot X)_{t_n} > 0] > 0$ .

Récemment Back et Pliska [2] ont étendu ce résultat au cas où le cardinal de  $\Omega$  n'est pas fini mais ils supposaient que  $d = 1$ . Enfin, Dalang, Morton et Willinger [3] l'ont démontré pour  $d \geq 1$ .

Grâce à un théorème de Yan [8] nous allons donner une condition nécessaire et suffisante assurant l'existence d'une loi de martingale  $Q$ . Puis nous appliquerons ce résultat au cas continu. Enfin nous traiterons le cas d'un processus càdlàg ayant un nombre fini de sauts qui ont tous lieu à des instants prévisibles.

## I. NOTATIONS

On désigne par  $(x | y)$  le produit scalaire des vecteurs  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Lorsque  $\alpha$  est un nombre réel, on note  $\alpha^+$  (resp.  $\alpha^-$ ) le nombre  $\sup(\alpha, 0)$  (resp.  $\sup(-\alpha, 0)$ ). Toutes les filtrations et tous les processus considérés seront indexés par  $[0, 1]$ . Soit  $(\Omega, F, (F_t), P)$  un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Nous supposons que  $F = F_1$ . Nous dirons que le processus  $(X_t)$  est intégrable si chaque variable  $X_t$  est intégrable. La notation  $(H \cdot X)_t$  désigne l'intégrale stochastique du processus prévisible  $H$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  intégrable par rapport à la semimartingale vectorielle  $X = (X^1, \dots, X^d)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Nous supposons toujours que  $(H \cdot X)_0 = 0$ . Si  $H$  est localement borné, il est

bien connu que  $(H \cdot X)_t = \sum_{j=1}^d \int_0^t H_s^j dX_s^j$ . Pour la définition générale de l'intégrale stochastique vectorielle, nous renvoyons à Jacod [7]. Lorsque  $H$  est un processus prévisible élémentaire, c'est-à-dire  $H = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$  où  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$  et  $\lambda_i = (\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^d)$  est un vecteur aléatoire

$F_t$ , mesurable, on peut définir l'intégrale stochastique  $(H \cdot X)_1$  même si  $X$  n'est pas une semimartingale : on pose  $(H \cdot X)_1 = \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_i | X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ .

Si  $Q$  est une autre loi sur  $(\Omega, F)$ , nous noterons  $E^Q[Z]$  (resp.  $E^Q[Z | F_t]$ ) l'espérance de la variable  $Z$  par rapport à la loi  $Q$  (resp. l'espérance conditionnelle de  $Z$  par rapport à  $F_t$  sous  $Q$ ). Soient  $X$  un processus càdlàg adapté et  $1 \leq p \leq +\infty$ . Nous dirons que le couple  $(X, P)$  possède la propriété  $\mathcal{M}^p$  s'il existe une loi  $Q$  équivalente à  $P$ , de densité  $\frac{dQ}{dP}$  appartenant à  $L^q$  ( $q$  étant l'exposant conjugué de  $p$ ) telle que  $(X, Q)$  soit une martingale. Enfin lorsque  $X$  est un processus càdlàg, nous noterons  $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$  le saut de  $X$  à l'instant  $t$ .

## II. UNE CONDITION NÉCESSAIRE

La proposition suivante donne une condition nécessaire pour l'existence d'une loi  $Q$  équivalente à  $P$  telle que  $X$  soit une martingale sous  $Q$  mais cette condition n'est pas suffisante en général (voir paragraphe 4). Toutefois Dalang, Morton et Willinger [3] ont montré qu'elle l'était dans le cas discret. Notons que cette condition ne dépend que de la classe d'équivalence de la loi  $P$ .

PROPOSITION 1 : Soit  $X$  une martingale sous une loi  $Q$  équivalente à  $P$ . Alors pour tout processus prévisible élémentaire  $H$  tel que  $(H \cdot X)_1 \geq 0$ , on a  $(H \cdot X)_1 = 0$ .

Démonstration : Puisque  $H$  est un processus prévisible élémentaire, il est de la forme :  $H = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}] } H^i$  où  $0 \leq t_0 < \dots < t_n \leq 1$  et  $H^i$  est un vecteur aléatoire  $F_{t_i}$  mesurable. Faisons une récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , supposons que  $(H \cdot X)_1 = (H_o | X_{t_1} - X_{t_o}) \geq 0$ . Or pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $E^Q[\mathbf{1}_{\{\|H_o\| \leq p\}} H_o | X_{t_1} - X_{t_o} | F_{t_o}] = 0$  puisque  $X$  est une martingale sous  $Q$ . Mais  $(\mathbf{1}_{\{\|H_o\| \leq p\}} H_o | X_{t_1} - X_{t_o}) = \mathbf{1}_{\{\|H_o\| \leq p\}} (H_o | X_{t_1} - X_{t_o}) \geq 0$ . Donc pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{1}_{\{\|H_o\| \leq p\}} (H \cdot X)_1 = 0$ , si bien que  $(H \cdot X)_1 = 0$ .

Supposons la propriété vraie jusqu'à  $n$  et montrons la pour  $n + 1$ . Soit

$$Y = \sum_{i=0}^{n-1} (H_i | X_{t_{i+1}} - X_{t_i}). \text{ Si } (H \cdot X)_1 \geq 0, \text{ alors}$$

$$0 \leq E^Q[\mathbf{1}_{\{|Y| + \|H_n\| \leq p\}} (H \cdot X)_1 | F_{t_n}] = \mathbf{1}_{\{|Y| + \|H_n\| \leq p\}} Y.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée à  $Y$  on en conclut que  $Y = 0$ . Donc  $(H \cdot X)_1 = (H_{t_n} | X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) \geq 0$ .

En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $(H_{t_n} | X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$  on en déduit que  $(H \cdot X)_1 = 0$ .

*Remarque 1* : Si  $H$  est un processus prévisible tel que  $(H \cdot X)_{0 \leq t \leq 1}$  soit une *martingale*, la condition  $(H \cdot X)_1 \geq 0$  entraîne que  $(H \cdot X)_1 = 0$ . Toutefois Dudley [4] a montré que si  $(B_t)$  est un mouvement brownien réel issu de 0 et si  $(F_t)$  est sa filtration naturelle, alors pour toute variable aléatoire  $Y$  mesurable par rapport à  $F_1$ , il existe un processus prévisible  $H$  tel que  $\int_0^1 H_s^2 ds < +\infty$  et  $Y = \int_0^1 H_s dX_s$ . Bien entendu, lorsque  $Y \geq 0$  le processus  $H \cdot B$  est seulement une *martingale locale*. C'est pourquoi on ne peut pas étendre la proposition précédente à n'importe quel processus prévisible (même borné si  $X$  n'est pas dans  $H^1(Q)$ ).

### III. UN RÉSULTAT DE YAN

Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Si  $G \subset L^p(\Omega, F, P)$ , nous désignerons par  $\overline{G}$  l'adhérence de  $G$  dans  $L^p(\Omega, F, P)$ . Nous noterons  $B^+$  l'ensemble des variables aléatoires bornées positives ou nulles et  $L_+^p$  l'ensemble des variables aléatoires de  $L^p$  positives ou nulles. En s'inspirant de la démonstration du théorème de Dellacherie et Mokobodski sur la caractérisation des semi-martingales, Yan [8] a établi le théorème suivant dans le cas  $p = 1$  et Ansel [1] a noté qu'on pouvait étendre ce résultat au cas  $1 \leq p < +\infty$ .

**THÉORÈME 1** : Soit  $K$  un sous-ensemble convexe de  $L^p(\Omega, F, P)$  tel que  $0 \in K$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Pour tout  $\eta \in L_+^p$ ,  $\eta \neq 0$ , il existe  $c > 0$  tel que  $c\eta \notin \overline{K - B^+}$ .
- (b) Pour tout  $A \in F$  tel que  $P(A) > 0$  il existe  $c > 0$  tel que  $c\mathbf{1}_A \notin \overline{K - B^+}$ .
- (c) Il existe une v.a.  $Z \in L^q$  telle que  $Z > 0$  p.s. et  $\sup_{Y \in K} E[ZY] < +\infty$ .

Soit  $X$  un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , càdlàg, adapté et vérifiant  $X_t \in L^p$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Posons :  $K = \{(H \cdot X)_1 ; H \text{ étant prévisible, élémentaire et borné}\}$ . Grâce au théorème 1 nous obtenons le résultat suivant :

**THÉORÈME 2** : Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(X, P)$  possède la propriété  $\mathcal{M}^p$ .
- (ii) Pour tout  $A \in F$  tel que  $P(A) > 0$  on a  $\mathbf{1}_A \notin \overline{K - B^+}$ .
- (iii)  $L_+^p \cap \overline{K - B^+} = \{0\}$ .

*Démonstration* : Vérifions que (i) implique (ii).

Si  $Q$  est équivalente à  $P$ , de densité  $\frac{dQ}{dP} = Z$  appartenant à  $L^q(P)$  et si  $X$  est une martingale sous  $Q$ , alors  $E^Q[(H \cdot X)_1] = 0$  pour tout  $H$  prévisible élémentaire et borné. Donc la condition (c) du théorème 1 est vérifiée avec  $Z = \frac{dQ}{dP}$ . Comme la condition (c) est équivalente à (b), si  $A \in F$  et vérifie  $P(A) > 0$  il existe  $c > 0$  tel que  $c1_A \notin \overline{K - B^+}$ . Mais  $\overline{K}$  est un espace vectoriel et  $B^+$  est positivement homogène. Donc  $1_A \notin \overline{K - B^+}$ . Réciproquement si la condition (ii) est vérifiée, la condition (b) du théorème 1 est aussi vérifiée. Donc il existe une variable aléatoire  $Z$  appartenant à  $L^q(P)$  telle que  $\sup_{Y \in K} E[ZY] < +\infty$ .

Comme  $K$  est un espace vectoriel, il en résulte que  $E[ZY] = 0$  pour  $Y \in K$ . Donc  $X$  est une martingale sous la loi  $Q$  de densité  $\frac{dQ}{dP} = \alpha Z$  avec  $\alpha = (E[Z])^{-1}$ , si bien que  $(X, P)$  possède  $\mathcal{M}^p$ . Enfin pour vérifier l'équivalence des conditions (ii) et (iii) il suffit d'appliquer le théorème 1 en remarquant à nouveau que  $K$  est un espace vectoriel et que  $B^+$  est positivement homogène.

*Remarques 2 :*

(i) Comme nous l'a signalé C.F. Huang, le théorème 2 est un cas particulier du théorème A.1 de [5] si  $L^p(\Omega, F, P)$  est séparable.

(ii) Si  $(X, P)$  possède  $\mathcal{M}^p$  et si  $X_t \in L^p$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , alors pour tout  $Y \in \overline{K}$  il existe un processus prévisible  $H$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $Y = (H \cdot X)_1$ . En effet si  $Y \in \overline{K}$ , il existe une suite de processus prévisibles élémentaires bornés  $(H^n)$  tels que  $(H^n \cdot X)_1$  converge vers  $Y$  dans  $L^p$ . Soit  $Q$  une loi équivalente à  $P$ , de densité  $\frac{dQ}{dP} = Z$  appartenant à  $L^q(P)$  telle que  $X$  soit une martingale sous  $Q$ . Alors  $(H^n \cdot X)_1$  converge dans  $L^1(Q)$  vers  $Y$ . On peut alors appliquer le théorème 2.4 ou son corollaire 2.5.2 de [9] (qui se généralise aisément au cas  $d > 1$  grâce aux résultats de Jacod [7]), si bien qu'il existe un processus prévisible  $H$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $(H \cdot X)_1 = Y$ . En revanche, lorsque  $X$  est simplement une semimartingale, j'ignore si tout élément de  $\overline{K}$  peut s'écrire sous la forme d'une intégrale stochastique par rapport à  $X$ . Toutefois on a la proposition suivante :

**PROPOSITION 2 :** Soient  $G$  une sous-tribu de  $F$  et  $X$  un vecteur aléatoire  $G$  mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Si  $(H^n)$  est une suite de vecteurs aléatoires  $G$  mesurables à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , telle que  $(H^n | X)$  converge dans  $L^0$  vers  $Y$ , il existe un vecteur aléatoire  $G$ -mesurable  $H$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $Y = (H | X)$ .

*Démonstration :* Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $(H^n | X)$  converge p.s. vers  $Y$ . Dans ce cas la suite  $(H^n | X)$  est bornée, si bien qu'il existe une loi  $Q$  équivalente à  $P$  telle que  $(H^n | X)$  converge

dans  $L^2(Q)$  vers  $Y$  et que  $X$  appartienne aussi à  $L^2(Q)$ . Il suffit alors d'adapter la démonstration du lemme 4.29 page 128 de [7].

Considérons la matrice symétrique positive  $A = (E^Q[X_i X_j \mid G])$  avec  $X = (X_1, \dots, X_d)$ . Pour tout vecteur  $H$  mesurable par rapport à  $G$ ,  $E[(H \mid X)^2] = E[{}^t H A H]$ . Comme  $A$  est  $G$ -mesurable, on peut choisir une matrice orthogonale  $0$  et une matrice diagonale  $D = (d_{ij})$  mesurables par rapport à  $G$ , telles que  $A = 0D{}^t 0$ . Posons  $K^n = {}^t 0 H^n$ ,  $\widehat{K}_i^n = K_i^n \mathbf{1}_{\{d_{ii} > 0\}}$  et  $\widehat{H}^n = 0 \widehat{K}^n$ . Puisque  ${}^t H^n A H^n = \sum_{i \leq d} (K_i^n)^2 d_{ii}$ , on

a  ${}^t (\widehat{H}^n - H^n) A (\widehat{H}^n - H^n) = 0$ . Donc  $E[(H^n - \widehat{H}^n \mid X)^2] = 0$ . Quitte à remplacer  $H^n$  par  $\widehat{H}^n$ , on peut supposer que  $K_i^n = 0$  si  $d_{ii} = 0$ . Or  $E[(H^n - H^m \mid X)^2] = \sum_{i \leq d} E[(K_i^n - K_i^m)^2 d_{ii}]$  tend vers 0 si  $n$  et  $m$

tendent vers  $+\infty$ , si bien que  $(H_i^n)$  est une suite de Cauchy dans  $L^2$  pour tout  $i$ . Il existe alors un vecteur  $H$  mesurable par rapport à  $G$  tel que  $E[(H^n - H \mid X)^2]$  tende vers 0. Donc  $Y = (H \mid X)$ .

#### IV. CAS CONTINU

Lorsque  $X$  est continu, nous pouvons affaiblir la condition (iii) du théorème 2 en remplaçant  $\overline{K} - B^+$  par  $\overline{K}$ . Nous supposons toujours que  $1 \leq p < +\infty$ .

**THÉORÈME 3 :** *Soit  $X$  un processus continu à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , adapté et vérifiant  $X_t \in L^p$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Alors  $(X, P)$  possède  $\mathcal{M}^p$  si et seulement si  $\overline{K} \cap L_+^p = \{0\}$ .*

*Démonstration :* La condition  $\overline{K} \cap L_+^p = \{0\}$  est évidemment nécessaire (Théorème 2). Réciproquement supposons que  $\overline{K} \cap L_+^p = \{0\}$  et montrons, en raisonnant par l'absurde, que la condition  $\mathbf{1}_A \notin \overline{K} - B^+$  pour tout  $A \in F$  tel que  $P(A) > 0$ , est satisfaite. Sinon on peut trouver une suite de variables aléatoires positives bornées  $(B_n)$ , une suite de processus prévisibles élémentaires bornés  $(H^n)$  et un ensemble  $A \in F$  avec  $P(A) > 0$  tels que  $(H^n \cdot X)_1 - B_n$  converge dans  $L^p(\Omega, F, P)$  vers  $\mathbf{1}_A$ . Nous allons construire deux suites  $(U^n)$  et  $(B'_n)$  telles que :  $B'_n \in B^+$ ,  $U_n$  est un processus prévisible élémentaire borné,  $((U^n \cdot X)_1)$  est uniformément intégrable (resp. borné dans  $L^p$ ) si  $p = 1$  (resp.  $p > 1$ ) et  $((U^n \cdot X)_1 - B'_n)$  converge vers  $\mathbf{1}_A$  dans  $L^p$ . A cet effet introduisons le temps d'arrêt  $T_n = \inf\{t > 0, (H^n \cdot X)_t \geq 1\}$  avec la convention  $T_n = 1$  si  $(H^n \cdot X)_t < 1$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Remarquons que  $(H^n \cdot X)_1^- \geq (H^n \cdot X)_{T_n}^- \geq 0$ . Or  $(H^n \cdot X)_1^-$  tend vers 0 dans  $L^p$ , si bien que la suite  $(H^n \cdot X)_{T_n}$  est uniformément intégrable pour  $p = 1$  (resp. bornée dans  $L^p$  pour  $p > 1$ ) en

vertu de l'inégalité  $0 \leq (H^n \cdot X)_{T_n}^+ \leq 1$ . Toutefois le processus  $\mathbf{1}_{[0, T_n]} H^n$  n'est pas élémentaire.

Il s'agit alors de construire une suite de temps d'arrêt  $S_n$  tels que  $S_n$  ne prenne qu'un nombre fini de valeurs et que  $E[|(H^n \cdot X)_{T_n} - (H^n \cdot X)_{S_n}|^p]$  tende vers 0. Il est bien connu qu'il existe une suite de temps d'arrêt  $(T_{nm})_m$  ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et tendant en décroissant vers  $T_n$ . Quitte à poser  $T'_{nm} = T_{nm}$  si  $|(H^n \cdot X)_{T_n} - (H^n \cdot X)_{T_{nm}}| \leq 1$  et  $T'_{nm} = 1$  sinon, on voit que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} E[|(H^n \cdot X)_{T_n} - (H^n \cdot X)_{T'_{nm}}|^p] = 0$ . On peut donc choisir  $m$  tel que  $E[|(H^n \cdot X)_{T_n} - (H^n \cdot X)_{T'_{nm}}|^p] \leq \frac{1}{n}$ . Posons  $S_n = T'_{nm}$ ,  $U_n = \mathbf{1}_{[0, S_n]} H_n$ , et  $B'_n = \mathbf{1}_{\{T_n < 1\} \cap A^c} + \mathbf{1}_{\{T_n = 1\}} B_n$ . Mais :

$$(H^n \cdot X)_{T_n} - B'_n = \begin{cases} (H^n \cdot X)_1 - B_n & \text{sur } \{T_n = 1\} \\ 0 & \text{sur } A^c \cap \{T_n < 1\} \\ 1 & \text{sur } A \cap \{T_n < 1\} \end{cases}$$

Ainsi  $(H^n \cdot X)_{T_n} - B'_n$  converge aussi vers  $\mathbf{1}_A$  dans  $L^p$ . Il en sera de même pour  $(H^n \cdot X)_{S_n} - B'_n$ . En résumé nous avons construit deux nouvelles suites  $(U_n)$  et  $B'_n$  telles que :  $B'_n \in B^+$ ,  $U_n$  est un processus prévisible élémentaire borné,  $(U^n \cdot X)_1$  est uniformément intégrable (resp. borné dans  $L^p$ ) si  $p = 1$  (resp.  $p > 1$ ) et  $(U^n \cdot X)_1 - B'_n$  converge vers  $\mathbf{1}_A$  dans  $L^p$ . Puisque  $((U^n \cdot X)_1)$  est uniformément intégrable pour  $p = 1$  (resp. borné dans  $L^p$  pour  $p > 1$ ), on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans  $L^p$  vers une v.a.  $Y$ . Comme  $\bar{K}$  est convexe et fermé pour la topologie forte,  $Y$  appartient à  $\bar{K}$ . Mais  $(H^n \cdot X)_1 - B_n$  converge vers  $\mathbf{1}_A$  dans  $L^p$ , si bien que la convergence faible de  $(H^n \cdot X)_1$  entraîne la convergence faible de  $B_n$  vers une variable aléatoire  $B \geq 0$ . Donc  $Y = B + \mathbf{1}_A$ , ce qui est absurde puisque  $Y \in \bar{K}$ . Par conséquent  $\mathbf{1}_A \notin \bar{K} - B^+$ , si bien que  $(X, P)$  possède la propriété  $\mathcal{M}^p$ .

*Remarque 4 :* On ne peut pas remplacer  $\bar{K}$  par  $K$  dans le théorème précédent. En effet soit  $(B_t)$  un mouvement brownien standard à valeurs réelles défini sur l'espace probabilisé filtré  $(\Omega, F, (F_t), P)$  et soit  $h$  une fonction déterministe continue à variation bornée sur  $[0, 1]$ . Il existe une loi  $Q$  équivalente à  $P$  telle que la semimartingale  $X_t = B_t + h(t)$  soit une martingale sous  $Q$  si et seulement si  $h$  est dans  $H^1$ , c'est-à-dire de

la forme  $h(t) = \int_0^t g(s) ds$  avec  $g \in L^2([0, 1])$ . Supposons que  $H$  soit un

processus prévisible élémentaire borné de la forme  $H = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$  avec  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \leq 1$  et  $P[\lambda_n \neq 0] > 0$ . Comme les variables aléatoires  $\lambda_n$  et  $Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \lambda_n (h(t_{n+1}) - h(t_n))$



sont indépendantes de la variable gaussienne non dégénérée  $B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$ , on a  $P[(H \cdot X)_1 < 0] > 0$ . Donc il n'existe pas de processus prévisible élémentaire  $H$  vérifiant  $(H \cdot X)_1 \geq 0$  et  $P[(H \cdot X)_1 > 0] > 0$ .

### V. UN RÉSULTAT DE DALANG, MORTON ET WILLINGER

Ces trois auteurs ont démontré récemment le très joli résultat suivant :

**THÉORÈME 4 :** *Soient  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = 1$  une suite finie de temps d'arrêt prévisibles et  $(X_t)$  un processus adapté constant sur les intervalles  $[T_i, T_{i+1}]$ . Il existe une loi  $Q$  équivalente à  $P$  de densité bornée telle que  $X$  soit une martingale si et seulement si pour tout  $i = 1, \dots, n$  et tout vecteur aléatoire  $H$  mesurable par rapport à  $F_{T_i^-}$  on a l'implication :*

$$\langle H \mid \Delta X_{T_i} \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle H \mid \Delta X_{T_i} \rangle = 0.$$

*Remarque 5 :*

Le théorème 4 ci-dessus est une version légèrement plus générale du théorème 2.6 de [3]. Toutefois cette extension est triviale à démontrer : il suffit de considérer le processus discret  $(Y_i)_{0 \leq i \leq n}$  défini par  $Y_i = X_{T_i}$  et la filtration discrète  $G_i = F_{T_{i+1}^-}$  pour  $i = 0, \dots, n - 1$  et  $G_n = F_1$ .

Rappelons que  $K = \{(H \cdot X)_1 : H \text{ prévisible, élémentaire et borné}\}$  et que  $\bar{K}$  est l'adhérence de  $K$  dans  $L^1$ . Nous allons maintenant combiner les théorèmes 3 et 4 pour obtenir le :

**THÉORÈME 5 :** *Soit  $(X_t)$  un processus càdlàg, adapté et borné. Supposons que les instants de sauts soient en nombre fini et prévisibles. Si  $\bar{K} \cap L_+^1 = \{0\}$ , il existe une loi  $Q$  équivalente à  $P$  telle que  $X$  soit une martingale sous  $Q$ .*

*Démonstration :*

Soient  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = 1$  les instant de sauts éventuels de  $X$ . Ces temps d'arrêt sont prévisibles par hypothèse. Nous allons commencer par construire une suite  $(Z_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  de variables aléatoires strictement positives et vérifiant  $E[Z_i; ((\mathbf{1}_{]T_i, T_{i+1}[} H) \cdot X)_1] = 0$  pour  $i = 0, \dots, n - 1$ . Afin d'alléger les notations nous posons :  $S = T_i, T = T_{i+1}, Y = \mathbf{1}_{]S, T[} \cdot X$  et  $V = \mathbf{1}_{]T, 1[} \Delta X_T$ . Rappelons que  $T$  est prévisible. Il est bien connu qu'il existe une suite décroissante (resp. croissante) de temps d'arrêt  $S_n$  (resp.  $T'_n$ ) ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (resp. un nombre dénombrable de valeurs) et convergeant vers  $S$  (resp.  $T$ ). Si  $\{a_1^n, a_2^n, \dots\}$  est l'ensemble des valeurs prises par  $T'_n$ , on choisit  $j$  tel que  $\sum_{i > j} P[T'_n = a_i^n] < \frac{1}{2^n}$

et on pose  $T_n = T'_n$  si  $T'_n \in \{a_1^n, \dots, a_j^n\}$  et  $T_n = 1$  sinon. D'après le lemme de Borel-Cantelli  $T_n = T'_n$  pour  $n$  assez grand, si bien que  $\mathbf{1}_{]S_n, T_n[}$  tend vers  $\mathbf{1}_{]S, T[}$  p.s. De même on peut construire une suite décroissante de temps d'arrêt  $U_n$  ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et convergeant vers  $T$ . Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue montre que pour tout processus prévisible élémentaire borné  $H$  les suites  $((\mathbf{1}_{]S_n, T_n[} \cdot X)_1$  et  $((\mathbf{1}_{]T_n, U_n[} H \cdot X)_1$  tendent dans  $L^1$  respectivement vers  $(H \cdot Y)_1$  et  $(H \cdot V)_1$ . Si  $K_1 = \{H \cdot Y\}_1 : H$  prévisible, élémentaire et borné} et  $K_2 = \{H \cdot V\}_1 : H$  prévisible, élémentaire et borné}, on a les inclusions  $\overline{K}_1 \subset \overline{K}$  et  $\overline{K}_2 \subset \overline{K}$ . Grâce aux théorèmes 3 et 4, on en déduit l'existence de variables aléatoires  $Z'$  et  $Z''$  strictement positives et bornées telles que  $E[(H \cdot Y)_1 Z'] = 0 = E[(H \cdot V)_1 Z'']$  pour tout processus prévisible élémentaire et borné. Quitte à remplacer  $Z'$  par  $E[Z' | F_{T-}]$  (car  $(H \cdot Y)_1$  est  $F_{T-}$  mesurable) et  $Z''$  par  $E[Z'' | F_T]$  (car  $(H \cdot V)_1$  est  $F_T$  mesurable), on peut supposer que  $Z'$  (resp.  $Z''$ ) est  $F_{T-}$  mesurable (resp.  $F_T$  mesurable). Il ne reste plus qu'à poser :  $Z_i = Z' Z'' / E[Z'' | F_{T-}]$ . Comme  $Z'$  est  $F_{T-}$  mesurable,  $Z_i$  est une variable aléatoire intégrable et  $E[Z_i] = E[Z']$ . En outre, si  $H$  est prévisible élémentaire et borné,  $(H \cdot Y)_1$  est  $F_{T-}$  mesurable de telle sorte que  $E[(H \cdot Y)_1 Z_i] = E[(H \cdot Y)_1 Z'] = 0$ . Grâce au théorème des classes monotones on vérifie aisément que pour tout processus prévisible  $S$  vérifiant  $E[Z'' | (S_T | \Delta X_T)] < +\infty$ , on a  $E[Z''(S_T | \Delta X_T)] = 0$ . Comme pour toute variable aléatoire  $U$  qui est  $F_{T-}$  mesurable, il existe un processus prévisible  $S$  tel que  $U = S_T$ , on a :

$$E[(H \cdot V)_1 Z_i] = E[Z''((Z' / E[Z'' | F_{T-}]) H_T | \Delta X_T)] = 0.$$

Pour achever la démonstration du théorème 5 on pose

$Z = Z_o \prod_{i=1}^{n-1} (Z_i / E[Z_i | F_{T_i}])$  et on vérifie que  $X$  est une martingale sous la loi  $Q$  de densité  $Z/E[Z]$ . En effet soient  $H$  un processus élémentaire borné et  $\lambda$  une variable aléatoire  $F_{T_i}$  mesurable vérifiant  $E[Z_i \lambda | ((\mathbf{1}_{]T_i, T_{i+1}[} H) \cdot X)_1] < +\infty$ . Une nouvelle application du théorème des classes monotones entraîne que  $E[Z_i \lambda ((\mathbf{1}_{]T_i, T_{i+1}[} H) \cdot X)_1] = 0$ . Or  $((\mathbf{1}_{]T_i, T_{i+1}[} H) \cdot X)_1$  est  $F_{T_{i+1}}$  mesurable et  $E[Z | F_{T_{i+1}}] = Z_o \prod_{j=1}^i Z_j / E[Z_j | F_{T_j}]$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} E[(H \cdot X)_1 Z] &= \sum_{i=0}^{n-1} E[Z((\mathbf{1}_{]T_i, T_{i+1}[} H) \cdot X)_1] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[Z_i \lambda_i ((\mathbf{1}_{]T_i, T_{i+1}[} H) \cdot X)_1] = 0. \end{aligned}$$

Donc  $X$  est une martingale sous  $Q$  de densité  $Z/E[Z]$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. ANSEL, C. STRICKER, Quelques remarques sur un théorème de Yan. A paraître dans le Séminaire de Probabilités XXIV, *Lect. Notes Math.* Springer 1990.
- [2] K. BACK, S.R. PLISKA, *Arbitrage and martingales in markets with positive wealth constraints*, Preprint (1987).
- [3] R.C. DALANG, A. MORTON, W. WILLINGER, *Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models*, To appear.
- [4] R.M. DUDLEY, Wiener functionals as Ito integrals, *Ann. Prob.*, **5**, 140-141 (1977).
- [5] D. DUFFIE, C.F. HUANG, Multiperiod security markets with differential information, *J. Math. Eco.* **15**, 283-303 (1986).
- [6] J.M. HARRISON, S.R. PLISKA, Martingales and stochastics integrals in the theory of continuous trading, *Stoch. Proc. Appl.*, **11**, 215-260 (1981).
- [7] J. JACOD, Calcul stochastique et problèmes de martingales. *Lect. Notes Math.*, **714**. Springer 1979.
- [8] J.A. YAN, Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de  $L^1$  ou  $H^1$ . Séminaire de Probabilités XIV, *Lect. Notes Math.*, **784**, 220-222. Springer 1980.
- [9] M. YOR, Sous-espaces denses dans  $L^1$  ou  $H^1$  et représentation des martingales, Séminaire de Probabilités XII, *Lect. Notes Math.*, **649**, 205-309. Springer 1978.

(Manuscrit reçu le 24 octobre 1989;  
révisé le 18 janvier 1990)