

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

THIERRY COULHON

LAURENT SALOFF-COSTE

Puissances d'un opérateur régularisant

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, n° 3 (1990), p. 419-436

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_3_419_0

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Puissances d'un opérateur régularisant

par

Thierry COULHON

Université Paris VI
Equipe d'Analyse, T.46. 4^e étage
4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France

et

Laurent SALOFF-COSTE

CNRS
Laboratoire Analyse Complexe et Géométrie
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — On relie, pour un opérateur T régularisant à puissances bornées sur les espaces L^p , la décroissance polynômiale éventuelle de $\|T^k\|_{1 \rightarrow \infty}$ à des propriétés de continuité $L^p - L^q$, pour $q > p$, des «opérateurs potentiels» $T(I - T)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. On applique ces résultats à l'étude des marches aléatoires sur les groupes, pour étendre un théorème de Varopoulos en simplifiant sa démonstration.

ABSTRACT. — Let T be a regularizing, power bounded operator on the L^p spaces. One links the possible polynomial decay of $\|T^k\|_{1 \rightarrow \infty}$ to $L^p - L^q$ boundedness properties, for $q > p$, of the “potential operators” $T(I - T)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. One applies these results to the study of random

Mots clés : marches aléatoires, groupes localement compacts, théorème de Sobolev
Classification A.M.S : 47 D, 43, 60 J 15

walks on groups, and extends a theorem of Varopoulos while simplifying its proof.

0. INTRODUCTION

Soit $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ le noyau d'une chaîne de Markov symétrique sur l'espace mesuré (X, ξ) telle que $\sup_{x, y \in X \times X} p(x, y) < +\infty$, et soit T l'opérateur associé : $Tf(x) = \int p(x, y)f(y)d\xi(y)$, pour $f \in L^1 + L^\infty$. Un problème classique est d'estimer la suite $\|T^n\|_{1 \rightarrow \infty} = \sup_{X \times X} p_n(x, x)$, où p_n est le noyau de T^n , autrement dit $p_n(x, y) = \int p_{n-1}(x, z)p(z, y)d\xi(z)$ et $p_1 = p$.

Pour ce faire, N. Varopoulos a eu l'idée d'interpréter l'éventuelle décroissance de $\|T_t\|_{1 \rightarrow \infty}$, où $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs sur les espaces L^p , en termes d'inégalités de Dirichlet portant sur son générateur infinitésimal, et de raisonner sur le semi-groupe $C_t^p = e^{-t(I-T)} = e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tT)^k}{k!}$ ([13], [14], [15], [18]). Cette technique lui a permis, par exemple, de démontrer la conjecture de Kesten selon laquelle les seuls groupes discrets finiment engendrés et récurrents sont les extensions finies de $\{0\}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ ([17]).

La clef de cette méthode est l'équivalence, pour un semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$, disons sous-markovien symétrique, de générateur infinitésimal $-A$, entre :

$$(a) \quad \|T_t\|_{1 \rightarrow \infty} \leq Ct^{-d/2}, \quad \forall t > 0.$$

$$\text{et } (b) \quad \|f\|_{2d/(d-2)} \leq C\|A^{1/2}f\|_2, \quad \forall f \in \mathcal{D}(A), \text{ pour } d > 2, \text{ cf [15].}$$

Cependant l'utilisation du semi-groupe C_t^p pour étudier la chaîne de Markov de noyau p n'est pas sans poser quelques problèmes techniques. L'un d'entre eux est le passage d'une estimation du comportement de C_t^p en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$ à une estimation de celui de T^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ (voir [15]). Plus sérieusement, on ne peut utiliser l'équivalence ci-dessus entre (a) et (b) qu'à propos d'un semi-groupe vérifiant $\|T_t\|_{1 \rightarrow \infty} < +\infty$; or, sauf à supposer X discret, C_t^p n'a pas cette propriété, même si $\|T\|_{1 \rightarrow \infty} < +\infty$. Il ne s'agit pas là d'obstacles insurmontables, voir [18], [10], mais qui compliquent singulièrement la mise en œuvre de cette méthode.

L'objet de ce travail est de montrer que l'on peut appliquer le cercle d'idées évoqué ci-dessus sans passer au semi-groupe C_t^p , mais en restant

au niveau de la suite d'opérateurs T^n . Cette approche permet de court-circuiter les difficultés techniques indiquées précédemment, sans en introduire de nouvelles ! La raison d'être de cet article réside même pour une bonne part dans le caractère élémentaire des arguments utilisés.

Dans les premiers paragraphes qui suivent, on explicite les relations entre les propriétés :

$$\begin{aligned} & \text{(a')} \quad \|T^n\|_{1 \rightarrow \infty} \leq Cn^{-d/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \text{et} \quad & \text{(b')} \quad \|Tf\|_{2d/(d-2)} \leq C\|(I-T)^{1/2}\|_2, \quad \forall f \in L^2, \end{aligned}$$

avec $d > 2$, qui sont les analogues de (a) et (b) pour un opérateur à puissances bornées lorsque T est sous-markovien symétrique.

On applique ensuite ces résultats aux chaînes de Markov sur les groupes pour retrouver et étendre les résultats de [18] en adaptant l'approche de [10]. La possibilité de développer cette méthode, en particulier grâce à une notion analogue pour les puissances d'un opérateur à celle d'analyticité d'un semi-groupe, nous est apparue à la suite des simplifications et variations apportées par le premier auteur aux résultats de Varopoulos sur les semi-groupes ([4], [3]). Enfin l'idée que certaines techniques de semi-groupes puissent s'adapter directement au niveau de la chaîne de Markov est l'objet du (§IV) de [1] et le second auteur doit à D. Stroock d'avoir attiré son attention sur ce fait. On trouvera d'ailleurs ci-dessous un écho des résultats de [1].

I. OPÉRATEURS RÉGULARISANTS SUR LES ESPACES L^p

Soit (X, ξ) un espace mesuré σ -fini. Nous dirons qu'un opérateur T agissant sur les espaces $L^p(X, \xi)$, $1 \leq p \leq +\infty$, est régularisant si $\|T\|_{1 \rightarrow \infty} < +\infty$, et que c'est un o.p.b.r. s'il est à puissances bornées sur les $L^p(X, \xi)$, $1 \leq p \leq +\infty$, et régularisant. Pour $0 < d < +\infty$, nous dirons que T vérifie (R_d) s'il existe C tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|T^n\|_{1 \rightarrow \infty} \leq Cn^{-d/2}$.

Un exemple est fourni par $X = \mathbb{Z}^d$, ξ la mesure de dénombrement, et l'opérateur T tel que $Tf(x)$ soit la moyenne des valeurs de f sur les 2^d plus proches voisins de $x \in \mathbb{Z}^d$; T est bien sûr l'opérateur associé à la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}^d$. Il est classique que T vérifie (R_d) et on en trouvera d'ailleurs une preuve amusante au (§VII).

Nous allons montrer que la propriété (R_d) est équivalente à des propriétés analogues de régularisation, mais de L^p dans L^q .

PROPOSITION 1 : *Soit T un o.p.b.r.; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) T vérifie (R_d) .
 (ii) il existe $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et C tels que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $\|T^n\|_{p \rightarrow q} \leq Cn^{-d(1/p-1/q)/2}$.

Preuve : L'implication i) $\Rightarrow$ ii) s'obtient par interpolation.
 Pour démontrer que ii) $\Rightarrow$ i), notons, pour $f \in L^1(X, \xi) \cap L^q(X, \xi)$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$K(N, f) = \sup_{n \in \{1, \dots, N\}} \left\{ n^{d/2q'} \|T^n f\|_q / \|f\|_1 \right\}, \quad \text{où} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Soit $\theta \in]0, 1]$ tel que $\frac{1}{p} = \theta + (1 - \theta)/q$, autrement dit $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q'}$.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après ii) :

$$\|T^{2n} f\|_q \leq Cn^{-d\theta/2q'} \|T^n f\|_p.$$

D'après Hölder, $\|T^n f\|_p \leq \|T^n f\|_1^\theta \|T^n f\|_q^{1-\theta} \leq C\|f\|_1^\theta \|T^n f\|_q^{1-\theta}$, puisque T est à puissances bornées sur $L^1(X, \xi)$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|T^{2n} f\|_q &\leq Cn^{-d\theta/2q'} \|T^n f\|_q^{1-\theta} \|f\|_1^\theta \\ &\leq Cn^{-d/2q'} K(N, f)^{1-\theta} \|f\|_1, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

On en déduit facilement, en utilisant $\|T\|_{1 \rightarrow q} < +\infty$, que

$$\|T^n f\|_q \leq Cn^{-d/2q'} K(N, f)^{1-\theta} \|f\|_1, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

et donc que

$$K(N, f) \leq CK(N, f)^{1-\theta}.$$

Il en résulte que $K(N, f)$ est bornée indépendamment de N et de f , et que, par densité de $L^1(X, \xi) \cap L^q(X, \xi)$ dans $L^1(X, \xi)$,

$$\|T^n\|_{1 \rightarrow q} \leq Cn^{-d/2q'}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On en déduit que le transposé T^* de T vérifie :

$$\|T^{*n}\|_{q' \rightarrow \infty} \leq Cn^{-d/2q'}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Le raisonnement qui vient d'être fait prouve que $\|T^{*n}\|_{1 \rightarrow \infty} \leq Cn^{-d/2}$, et donc que T vérifie (R_d) .

L'idée de cette preuve provient de [3].

II. THÉORIE DE HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV POUR LES PUISSANCES D'UN OPÉRATEUR

Pour $z \in \mathbb{C}$, notons $a_n(z)$ les coefficients de la série de Taylor en 0 de $(1-x)^z$, et définissons formellement pour un opérateur T :

$$(I - T)^z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z) T^n.$$

Rappelons l'estimation classique $|a_n(z)| \leq c_z n^{-\operatorname{Re} z - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; il en résulte en particulier que $(I - T)^z$ est un opérateur borné si T est à puissance bornées et $\operatorname{Re} z > 0$ (nous tirons cette remarque de [2]).

Nous allons maintenant tirer les conséquences de (R_d) en termes des "opérateurs potentiels" $(I - T)^z$, $\operatorname{Re} z < 0$.

THÉORÈME 1 : *Soit un o.p.b.r. vérifiant (R_d) .*

Alors, $\forall p \in [1, +\infty[$, $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z = \alpha > 0$ avec $0 < \alpha p < d$, $(I - T)^{-z/2} - I$ est borné de $L^p(X, \xi)$ dans $L^q(X, \xi)$ si $p > 1$, $L^{q, \infty}(X, \xi)$ si $p = 1$, où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$.

Preuve : Elle est inspirée de la preuve classique du théorème de plongement de Sobolev dans $\mathbb{R}^d$ (cf. [11]), comme dans [15], [16].

Nous allons montrer que $\forall p \geq 1$, $(I - T)^{-z/2} - I$ est borné de $L^p(X, \xi)$ dans $L^{q, \infty}(X, \xi)$. Le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz fournira alors la conclusion annoncée.

Soit $f \in L^p(X, \xi)$, de norme un. La série définissant

$F = [(I - T)^{-z/2} - I]f$ converge dans $L^\infty(X, \xi)$, puisque $\left| a_n\left(-\frac{z}{2}\right) \right| \leq c_z n^{\alpha/2-1}$ et $\|T^n\|_{p \rightarrow \infty} \leq C n^{-d/2p}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $\|F\|_\infty \leq c_1$, et si $\lambda \geq c_1$, $\xi(|F| > \lambda) = 0$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, posons $F^N = \sum_{n=1}^{N-1} a_n\left(-\frac{z}{2}\right) T^n f$ et $F_N = F - F^N$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \text{ on a } \xi(\{|F| > \lambda\}) \leq \xi\left(\left\{|F^N| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \xi\left(\left\{|F_N| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right).$$

Or

$$\|F_N\|_\infty \leq C \sum_{n=N}^{+\infty} n^{\alpha/2-1-d/2p} \leq C_1 N^{-d/2q}.$$

Soit N_0 le plus petit entier tel que $C_1 N_0^{-d/2q} \leq \lambda/2$.

On a alors

$$\xi(\{|F| > \lambda\}) \leq \xi\left(\left\{\left|F^{N_0}\right| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^p \|F^{N_0}\|_p^p.$$

or

$$\|F^{N_0}\|_p \leq C \sum_{n=1}^{N_0-1} n^{\alpha/2-1} \leq C_2 N_0^{\alpha/2}.$$

Finalement, si $\lambda < c_1$,

$$\xi(\{|F| > \lambda\}) \leq C \lambda^{-p} N_0^{\alpha p/2} \leq C \lambda^{-q},$$

ce qui est l'inégalité cherchée.

Il résulte facilement du théorème 1 que si S est un opérateur régularisant, $S(I-T)^{-z/2}$ et $(I-T)^{-z/2}S$ sont bornés de $L^p(X, \xi)$ dans $L^q(X, \xi)$ si $p > 1$, $L^{q, \infty}(X, \xi)$ si $p = 1$.

III. OPÉRATEURS ANALYTIQUES ET INÉGALITÉS DE DIRICHLET

Nous dirons qu'un opérateur T sur $L^p(X, \xi)$ est analytique s'il existe C tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|T^n - T^{n+1}\|_{p \rightarrow p} \leq C n^{-1}$.

Cette condition sera aussi notée (A_p) . Notre terminologie est justifiée par l'analogie de (A_p) avec l'estimation $\|AT_t\|_{p \rightarrow p} \leq C t^{-1}$, $\forall t > 0$, qui caractérise les semi-groupes analytiques bornés sur L^p .

PROPOSITION 2 : Si T est à puissances bornées sur $L^p(X, \xi)$ et vérifie (A_p) , alors on a aussi : pour tout $\alpha > 0$, il existe C tel que

$$\|(I-T)^\alpha T^n\|_{p \rightarrow p} \leq C n^{-\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve : Il est facile de voir, en itérant l'hypothèse $\|(I-T)T^n\|_{p \rightarrow p} \leq C n^{-1}$, que la conclusion est vraie pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, et qu'il suffit de la démontrer pour $0 < \alpha < 1$. On écrit alors

$$(I-T)^\alpha T^n = (I-T)^{1-\alpha} (I-T) T^n,$$

et donc

$$\begin{aligned} \|(I-T)^\alpha T^n\|_{p \rightarrow p} &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (1-\alpha) \|(I-T)T^{n+k}\|_{p \rightarrow p} \\ &\leq C \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\alpha} (n+k)^{-1} \\ &\leq C n^{-\alpha}. \end{aligned}$$

THÉOREME 2 : Soit T un o.p.b.r. S'il existe $\alpha > 0$, $1 < p < q < +\infty$ et C tels que

$$(*) \quad \|Tf\|_q \leq C\|(I - T)^{\alpha/2}f\|_p, \quad \forall f \in L^p(X, \xi),$$

et si T est analytique sur $L^p(X, \xi)$, alors T vérifie (R_d) , pour d tel que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$.

Il suffit d'écrire :

$$T^{n+1} = T(I - T)^{-\alpha/2}(I - T)^{\alpha/2}T^n,$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad \|T^{n+1}\|_{p \rightarrow q} &\leq \|T(I - T)^{-\alpha/2}\|_{p \rightarrow q} \|(I - T)^{\alpha/2}T^n\|_{p \rightarrow q} \\ &\leq Cn^{-\alpha/2}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (*) et la proposition 2.

La proposition 1 du (§I) permet alors de conclure.

La conclusion du théorème 2, combinée à nouveau avec l'analyticité de T , donne l'estimation $\|T^n - T^{n+1}\|_{1 \rightarrow \infty} \leq Cn^{-1-d/2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et plus généralement $\|(I - T)^k T^n\|_{1 \rightarrow \infty} \leq C_k n^{-k-d/2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour $k > 0$.

Une contraction auto-adjointe de $L^2(X, \xi)$, même sous-markovienne symétrique, peut ne pas être analytique : c'est le cas de la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$, associée à la mesure $\mu = \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2}$! En effet, la $n^{\text{ième}}$ puissance de convolution de μ est portée par les entiers pairs pour n pair, par les entiers impairs pour n impair, et l'opérateur T_μ de convolution par μ vérifie $\|T_\mu^n - T_\mu^{n+1}\|_{2 \rightarrow 2} = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ce cas extrême est d'ailleurs la seule alternative à l'analyticité :

PROPOSITION 3 : Soit T une contraction auto-adjointe de $L^2(X, \xi)$.

Alors, ou bien $\|I - T\|_{2 \rightarrow 2} = 2$, et $\|T^n - T^{n+1}\|_{2 \rightarrow 2} = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou bien T est analytique sur $L^2(X, \xi)$.

Preuve : Soit -1 appartient au spectre de T , et $2(-1)^n$ appartient à celui de $T^n - T^{n+1}$, donc $\|T^n - T^{n+1}\|_{2 \rightarrow 2} = 2$, soit $T = \int_a^1 \lambda dE_\lambda$,

avec $a > -1$. Dans ce cas, $T^n - T^{n+1} = \int_a^1 (\lambda^n - \lambda^{n+1}) dE_\lambda$, et comme

$\sup_{\lambda \in [0, 1]} |\lambda^n - \lambda^{n+1}| \leq \frac{1}{n}$, et que $\sup_{\lambda \in [a, 0]} |\lambda^n - \lambda^{n+1}| \leq 2|a|^n$, il est facile d'en déduire que $\|T^n - T^{n+1}\|_{2 \rightarrow 2} \leq \frac{c}{n}$.

Il résulte de la proposition 3 qu'une contraction auto-adjointe de $L^2(X, \xi)$, positive au sens hilbertien, est analytique : c'est donc le cas du carré d'une contraction auto-adjointe.

Le théorème 1, le théorème 2, et la proposition 3 donnent donc le :

THÉORÈME 3 : *Soit T un o.p.b.r. contractant et auto-adjoint sur $L^2(X, \xi)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes, pour $0 < d < +\infty$:*

- (i) T vérifie (R_d) ,
- (ii) $\exists \alpha, 0 < \alpha < d/2$, tel que $\|Tf\|_{2d/(d-2\alpha)} \leq C\|(I - T^2)^{\alpha/2}f\|_2$, $\forall f \in L^2(X, \xi)$.

L'intervention de T^2 dans l'inégalité de Dirichlet (ii) complique l'utilisation du théorème 3. Nous verrons cependant au (§V) que cette difficulté peut être évitée dans le cas des opérateurs sous-markoviens symétriques.

Signalons que si T est sous-markovien et analytique sur $L^2(X, \xi)$, il est aussi analytique sur $L^p(X, \xi)$ pour $1 < p < +\infty$; on peut le voir à l'aide de deux théorèmes de Stein ([12]) : comme $I - T$ est le générateur d'un semi-groupe sous-markovien symétrique, $(I - T)^i$ est borné sur $L^p(X, \xi)$, et on peut appliquer l'interpolation complexe à une famille analytique d'opérateurs. Mais cette voie est très détournée, et nous n'avons pas de preuve élémentaire; de toute façon, les inégalités de Dirichlet qui interviennent dans les applications comportent, à droite, une norme L^2 , et ne font donc intervenir que l'analyticité sur $L^2(X, \xi)$.

Notons toutefois qu'en considérant des espaces de Sobolev, de Lipschitz et de Besov associés aux normes $L_\alpha^p(f) = \|(I - T)^{\alpha/2}f\|_p$,

$$\Lambda_\alpha(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} n^{1-\frac{\alpha}{2}} \|(T^n - T^{n+1})f\|_\infty,$$

et

$$\Lambda_\alpha^{p,q}(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(n^{1-\frac{\alpha}{2}} \|(T^n - T^{n+1})f\|_p \right)^q \frac{1}{n} \right]^{\frac{1}{q}}, \text{ et en utilisant l'estima-}$$

tion de la proposition 1, on peut donner l'analogue, pour les puissances d'un opérateur analytique sur les espaces $L^p(X, \xi)$, $1 < p < +\infty$, des théorèmes 2 et 3 de [4] : il y a équivalence entre (R_d) et les plongements $L_\alpha^p \hookrightarrow \Lambda_{\alpha-\frac{d}{p}}$, pour $\alpha p \geq d$, et $\Lambda_\alpha^{p,q} \hookrightarrow \Lambda_{\alpha',q}^{p',q}$, avec $\alpha - \frac{d}{p} = \alpha' - \frac{d}{p'}$.

IV. INÉGALITÉS DE NASH

Si un opérateur A sur $\mathcal{D}(A) \subset L^2(X, \xi)$ vérifie :

$$\|f\|_{2d/(d-2)} \leq c\|Af\|_2, \quad \forall f \in \mathcal{D}(A),$$

une simple utilisation de l'inégalité de Hölder fournit :

$$\|f\|_2^{1+2/d} \leq c\|Af\|_2\|f\|_1^{2/d}, \quad \forall f \in L^1(X, \xi) \cap \mathcal{D}(A).$$

Cette inégalité a été utilisée par J. Nash dans [9], avec A la racine carrée du laplacien usuel sur $\mathbb{R}^n$. Dans [1] une caractérisation des opérateurs markovien symétriques vérifiant (R_d) est donnée via des inégalités de ce type. L'énoncé qui suit, et sa preuve, ne sont qu'une variation sur le théorème (4.1) de [1].

THÉOREME 5 : *Soit T un o.p.b.r., contractant et auto-adjoint sur $L^2(X, \xi)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes pour $0 < d < \infty$.*

- (i) T vérifie (R_d) .
- (ii) Pour tout opérateur régularisant S ,

$$\|Sf\|_2^{1+2/d} \leq c_s \|(I - T^2)^{1/2} Sf\|_2 \|f\|_1^{2/d}, \quad \forall f \in L^1(X, \xi) \cap L^2(X, \xi).$$

$$(iii) \|Tf\|_2^{1+2/d} \leq c \|(I - T^2)^{1/2} f\|_2 \|f\|_1^{2/d}, \quad \forall f \in L^1(X, \xi) \cap L^2(X, \xi).$$

Preuve : On a

$$(*) \quad \|(I - T^2)^{1/2} f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|Tf\|_2^2.$$

Supposons que T vérifie (R_d) , alors d'après $(*)$:

$$\begin{aligned} \|Sf\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \|(I - T^2)^{1/2} T^k Sf\|_2^2 + \|T^n Sf\|_2^2 \\ &\leq n \|(I - T^2)^{1/2} Sf\|_2^2 + cn^{-d/2} \|f\|_1^2 \end{aligned}$$

et comme $\|(I - T^2)^{1/2} Sf\|_2^2 \leq \|Sf\|_2^2 \leq c \|f\|_1^2$, on peut optimiser sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour obtenir (ii). (ii) $\Rightarrow$ (iii) est trivial. Supposons maintenant que (iii) soit vérifiée, notons $c_1 = \|T\|_{1 \rightarrow 2}^2$ et pour une fonction $f \in L^1 \cap L^2$ telle que $\|f\|_1 = 1$, posons $u_n = \|T^n f\|_2^2$. D'après $(*)$ et l'hypothèse, nous avons :

$$(**) \quad u_{n+1}^{1+2/d} \leq c(u_n - u_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Soit N tel que $[(n+1)/n]^{d/2} \leq 1 + c^{-1} c_1^{2/d} N/(n+1)$, pour tout $n \geq N$. Si $n \leq N$, on a : $u_n \leq c_1 \leq c_1 N^{d/2} n^{-d/2}$. Supposons que $u_n \leq c_2 n^{-d/2}$ et que $u_{n+1} > c_2 (n+1)^{-d/2}$ où $c_2 = c_1 N^{d/2}$ et $n \geq N$; $(**)$ donne alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n - c^{-1} u_{n+1}^{1+2/d} \\ &\leq c_2 (n+1)^{-d/2} [(n+1)/n]^{d/2} - c^{-1} c_1^{2/d} N/(n+1) \\ &\leq c_2 (n+1)^{-d/2}. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq c_2 n^{-d/2}$ ou encore $\|T^n\|_{1 \rightarrow 2} \leq c_2 n^{-d/2}$, ce qui donne par dualité que T vérifie (R_d) .

Remarque : Evidemment, si $d > 2$, (i), (ii) et (iii) sont encore équivalentes à $\|Tf\|_{2d/(d-2)} \leq c\|(I - T^2)^{1/2}f\|_2, \forall f \in L^2$.

V. CHÂÎNES DE MARKOV

Soit T un opérateur sous-markovien symétrique sur $L^2(X, \xi)$. Considérons $\tilde{T} = \frac{I+T}{2}$; d'après la proposition 3 du (§III), $\tilde{T}$ est analytique sur $L^2(X, \xi)$, puisqu'il est auto-adjoint et que $\|I - \tilde{T}\|_{2 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}\|I - T\|_{2 \rightarrow 2} \leq 1$.

Comme $(I - \tilde{T})^{\alpha/2} = c_\alpha(I - T)^{\alpha/2}$, si T est régularisant et vérifie

$$\|Tf\|_{2d/(d-2\alpha)} \leq C\|(I - T)^{\alpha/2}f\|_2, \quad \forall f \in L^2(X, \xi),$$

on a aussi

$$\|Tf\|_{2d/(d-2\alpha)} \leq C\|(I - \tilde{T})^{\alpha/2}f\|_2, \quad \forall f \in L^2(X, \xi),$$

On ne peut en conclure que $\tilde{T}$ vérifie (R_d) : il n'est pas même régularisant.

Mais la preuve du théorème 2, convenablement adaptée, permet de déduire de cette inégalité, grâce à l'analyticité de $\tilde{T}$, que

$$\|\tilde{T}^n T f\|_{2d/(d-2\alpha)} \leq C n^{-\alpha/2} \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(X, \xi), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et donc que

$$\|(\tilde{T}T)^n f\|_{2d/(d-2\alpha)} \leq C n^{-\alpha/2} \|f\|_2.$$

D'après la proposition 1 du (§I), $\tilde{T}T$, qui est un o.p.b.r., vérifie (R_d) . On utilise alors le :

LEMME : Si $\tilde{T}T$ vérifie (R_d) , alors T vérifie (R_d) .

Preuve du lemme : Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^1(X, \xi) \cap L^2(X, \xi)$, $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|(\tilde{T}T)^n f\|_2^2 &= ((\tilde{T}T)^{2n} f, f) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i (T^{i+2n} f, f) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{j=0}^n C_{2n}^{2j} (T^{2j+2n} f, f). \end{aligned}$$

L'inégalité tient au fait que, comme $Tf \geq 0$, tous les termes de la somme considérée sont positifs.

Finalement

$$(T^{2j+2n}f, f) = \|T^{j+n}f\|_2^2 \geq \|T^{2n}f\|_2^2,$$

et

$$\|T^{2n}f\|_2^2 \leq C\|(\tilde{T}T)^n\|_2^2 \leq Cn^{-d/2}\|f\|_1^2,$$

ce qui suffit à conclure.

Des considérations précédentes on déduit la réciproque suivante au théorème 1 :

THÉORÈME 6 : *Soit T un opérateur sous-markovien symétrique et régularisant. S'il existe $\alpha \in]0, \frac{d}{2}[$ et C tels que*

$$\|Tf\|_{2d/(d-2\alpha)} \leq C\|(I - T)^{\frac{\alpha}{2}}f\|_2, \quad \forall f \in L^2(X, \xi),$$

alors T vérifie (R_d) .

On peut définir, pour un opérateur à puissances bornées, l'analogue du subordonné d'un semi-groupe d'opérateurs : pour $\alpha \in]0, 1[$, on pose $T_\alpha = I - (I - T)^\alpha = -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\alpha)T^n$. Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\alpha) = -1$, si T est sous-markovien symétrique et régularisant, T_α l'est aussi et on en déduit facilement du théorème 1 et du théorème 6 qu'alors T_α vérifie $(R_{d/\alpha})$ si et seulement si T vérifie (R_d) . On peut aussi montrer que, si T est analytique, T_α l'est aussi ; l'équivalence ci-dessus a encore lieu dans ce cas : on utilise cette fois le théorème 2. D'ailleurs, l'implication « T vérifie $(R_d) \Rightarrow T_\alpha$ vérifie $(R_{d/\alpha})$ » vaut en toute généralité.

Si T est régularisant, il possède un noyau (voir par exemple [6], p.503) : $\exists p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $Tf(x) = \int p(x, y)f(y)d\xi(y)$, $\forall f \in L^1(X, \xi)$. Le fait que T soit sous-markovien symétrique se traduit par $p(x, y) = p(y, x) \geq 0$, $\forall (x, y) \in X \times X$, et $\int p(x, y)d\xi(y) \leq 1$, $\forall x \in X$; enfin $\sup_{x, y} p(x, y) = \|T\|_{1 \rightarrow \infty} < +\infty$. On notera p_n le noyau de T^n .

Un calcul facile et classique montre que :

$$\begin{aligned} \|(I - T)^{\frac{1}{2}}f\|_2^2 &= \frac{1}{2} \int \int |f(x) - f(y)|^2 p(x, y) d\xi(x) d\xi(y) + \|f\|_2^2 \\ &\quad - \int \int |f(x)|^2 p(x, y) d\xi(x) d\xi(y), \quad \forall f \in L^2(X, \xi). \end{aligned}$$

Si T est markovien, autrement dit si $\int p(x, y)d\xi(y) = 1$, $\forall x \in X$, seul le premier terme subsiste.

Les résultats ci-dessus se traduisent alors, en termes de noyaux, par la :

PROPOSITION 4 : Si p est un noyau markovien symétrique tel que

$$\sup_{x,y} p_n(x,y) \leq Cn^{-d/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ avec } d > 0$$

et si q est un noyau sous-markovien symétrique tel que

$$\sup_{x,y} q(x,y) < +\infty \quad \text{et} \quad q(x,y) \geq \frac{1}{c} p(x,y), \quad \forall (x,y) \in X \times X,$$

alors

$$\sup_{x,y} q_n(x,y) \leq Cn^{-d/2}.$$

Preuve : Notons T et S les opérateurs respectivement associés à p et q . Supposons tout d'abord $d > 2$.

T vérifie (R_d) , et S est régularisant, donc d'après le théorème 1, $\|Sf\|_{2d/(d-2)} \leq C\|(I-T)^{\frac{1}{2}}f\|_2$, $\forall f \in L^2(X, \xi)$. Mais l'hypothèse de comparabilité des noyaux et l'expression ci-dessus des formes de Dirichlet en termes de noyaux donnent :

$$\|(I-T)^{\frac{1}{2}}\|_2 \leq C\|(I-S)^{\frac{1}{2}}f\|_2, \quad \forall f \in L^2(X, \xi).$$

En mettant bout à bout les deux inégalités et en utilisant le théorème 6, on obtient que S vérifie (R_d) .

Pour traiter le cas $d \leq 2$, il suffit de remarquer que, si $\|(I-T)^{\frac{1}{2}}f\|_2$ et $\|(I-S)^{\frac{1}{2}}f\|_2$ sont comparables, alors $\|(I-T)^{\alpha/2}f\|_2$ et $\|(I-S)^{\alpha/2}f\|_2$ le sont aussi, pour $0 < \alpha < 1$. Ceci résulte de [5], p.110.

Remarques : 1) Si (X, ξ) est un espace mesuré discret, le lemme du début de ce paragraphe se simplifie en : si $\tilde{T}$ vérifie (R_d) , alors T vérifie (R_d) . La réciproque est vraie, grâce à l'inégalité : $2^{-n} \sum_{k=1}^n C_n^k k^{-d/2} \leq Cn^{-d/2}$.

Autrement dit, on peut perturber une chaîne de Markov, en « l'obligeant à charger la diagonale », sans changer sa décroissance.

2) Toujours si (X, ξ) est discret, toute chaîne de Markov chargeant la diagonale est analytique sur $L^2(X, \xi)$. En effet, si p est un noyau sous-markovien symétrique et si $\inf_{x \in X} p(x, x) = \alpha > 0$, le noyau p défini par $\bar{p}(x, y) = \frac{1}{1-\alpha} [p(x, y) - \alpha \delta(x, y)]$ (où $\delta(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et 0 sinon), est encore un noyau sous-markovien symétrique ; l'opérateur T associé à p s'écrit donc $\alpha I + (I - \alpha)\bar{T}$, où $\bar{T}$ est une contraction auto-adjointe de

$L^2(X, \xi)$, et $\|T - I\|_{2 \rightarrow 2} \leq 1 - \alpha$. Le théorème du (§III) s'applique donc directement à une telle chaîne.

3) Si la chaîne de Markov de noyau p est analytique sur $L^2(X, \xi)$, et vérifie $\sup_{x,y} p_n(x, y) \leq Cn^{-d/2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi d'après la remarque qui suit le théorème 2 du (§III), l'estimation $\sup_{x,y} |p_n(x, y) - p_{n+1}(x, y)| \leq Cn^{-1-d/2}$, et ainsi de suite pour les différences d'ordre supérieur. Ces estimations sont fausses en général, comme le montre l'exemple de la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$, (qui ne charge pas la diagonale!), mais on a toujours $\sup_{x,y} |p_{2n}(x, y) - p_{2n+2}(x, y)| \leq Cn^{-1-d/2}$, puisque p_2 est analytique.

4) On peut reformuler les résultats de ce paragraphe dans le cadre des chaînes de Markov réversibles.

VI. CHAÎNES DE MARKOV SUR $\mathbb{Z}^d$

Le but de ce paragraphe est de donner une preuve rapide et simple du résultat suivant (cf. [15]) :

THÉORÈME 7 : *Soit p un noyau markovien symétrique sur $\mathbb{Z}^d$ muni de la mesure de dénombrement, tel que $\sup_{x,y} p(x, y) < +\infty$ et $\inf_{|x-y|=1} p(x, y) > 0$.*

Alors $\sup_{x,y} p_n(x, y) \leq Cn^{-d/2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^$.*

Preuve : Elle consiste à démontrer une inégalité de Sobolev pour $\mathbb{Z}^d$ en imitant la preuve de Gagliardo et Nirenberg, classique dans $\mathbb{R}^d$ (voir par exemple [11], p. 128). Notons π le noyau de la marche aléatoire standard dans $\mathbb{Z}^d$ ($\pi(x, y) = (2d)^{-1}$ si $|x - y| = 1$, $\pi(x, y) = 0$ sinon), et si e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de base, posons $\delta_i f(x) = |f(x + e_i) - f(x)|$. On a alors, pour $f \in C_0(\mathbb{Z}^d)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ et $i \in \{1, \dots, d\}$: $|f(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_i f(x + ke_i)$.

Notons que le second membre ne dépend que des coordonnées x_j de $x = (x_1, \dots, x_d)$ avec $i \neq j$ et écrivons :

$$|f(x)|^{d/(d-1)} \leq \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_i f(x + ke_i) \right)^{1/(d-1)}$$

Intégrons coordonnée par coordonnée cette inégalité, en utilisant à chaque

fois l'inégalité de Hölder

$$\int f_1 \dots f_{d-1} \leq \prod_{i=1}^{d-1} \left(\int f_i^{d-1} \right)^{1/(d-1)};$$

on obtient

$$\|f\|_{d/(d-1)} \leq \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{2} \|\delta_i f\|_1 \right)^{1/d}$$

puis

$$(S) \quad \|f\|_{d/(d-1)} \leq \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d \|\delta_i f\|_1 = \int \int |f(x) - f(y)| \pi(x, y) dx dy.$$

En utilisant l'inégalité élémentaire :

$$|f^\alpha(x) - f^\alpha(y)| \leq \alpha \left(|f^{\alpha-1}(x)| + |f^{\alpha-1}(y)| \right) |f(x) - f(y)|$$

et l'inégalité de Hölder, on voit que (S) implique, pour $d > 2$:

$$\|f\|_{2d/d-2} \leq c \int \int |f(x) - f(y)|^2 \pi(x, y) dx dy.$$

Pour $d = 1, 2$, on passe par :

$$\|f\|_2^{2+4/d} \leq c \int \int |f(x) - f(y)|^2 \pi(x, y) dx dy \|f\|_1^2 \quad (\text{voir [1]}).$$

Il est facile de voir que dans l'inégalité précédente on peut remplacer π par $\tilde{\pi}_2$, où $\tilde{\pi} = \frac{\delta + \pi}{2}$. On applique alors le théorème 5 (avec $S = Id$). L'opérateur associé à $\tilde{\pi}_2$, donc à $\tilde{\pi}$, donc à π (Remarque 1 (§V)) vérifie (R_d) , et, comme $\pi(x, y) \leq Cp(x, y)$, la proposition 4 du (§V) permet de conclure.

VII. CHAÎNES DE MARKOV SUR LES GROUPES UNIMODULAIRES À GÉNÉRATION COMPACTE

Soit G un groupe localement compact unimodulaire, et ξ sa mesure de Haar. Soit Ω un voisinage relativement compact de l'origine, symétrique ($\Omega = \Omega^{-1}$), et générateur, c'est-à-dire vérifiant $G = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \Omega^n$.

Posons $V(n) = \xi(\Omega^n)$ (à des constantes multiplicatives près, V ne dépend pas du choix de Ω). Nous dirons qu'un noyau sous-markovien symétrique p est admissible si $\sup_{x,y} p(x,y) < +\infty$ et s'il existe un voisinage U de l'origine, ouvert et générateur, tel que $\inf_{y^{-1}x \in U} p(x,y) > 0$.

On a la :

PROPOSITION 5 : Si p est admissible, pour tout compact $K \subset G$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\inf_{y^{-1}x \in K} p_{n_0}(x,y) > 0$.

Preuve : Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que $p(x,y) \geq \frac{1}{C} 1_U(y^{-1}x)$. Or, $\forall x \in G$, $\exists n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $1_U^{(n_x)}(x) > 0$ (où $f^{(n)}$ désigne la $n^{\text{ième}}$ puissance de convolution de f).

On voit en effet facilement que l'ensemble des points de G ayant cette propriété est un sous-groupe contenant U .

De plus, si $1_U^{(n)}(x) > 0$ et $m \geq n$, $1_U^{(m)}(x) > 0$.

Il est facile d'en déduire que, pour tout compact K de G , $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1_U^{(n_0)}(x) > 0$, $\forall x \in K$; et on termine en constatant que

$$p_{n_0}(x,y) \geq \frac{1}{C^{n_0}} 1_U^{(n_0)}(y^{-1}x).$$

THÉOREME 8 : Si $V(n) \geq C^{-1}n^D$, alors, pour tout noyau admissible p et tout $d < D$, on a :

$$\sup_{x,y} p_n(x,y) \leq Cn^{-d/2}.$$

Si de plus $V(n) \leq Cn^D$, alors, pour tout noyau admissible p , on a :

$$\sup_{x,y} p_n(x,y) \leq Cn^{-D/2}.$$

Le théorème 8 est essentiellement dû à N. Varopoulos. La preuve qui est esquissée ci-dessous utilise les idées de [18] et [10], mais les résultats précédents la simplifient notablement et permettent de traiter les chaînes de Markov quelconques au lieu de se limiter aux puissances de convolution des fonctions à support compact.

Preuve du théorème : Pour $h \in G$, notons $|h| = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, |h \in \Omega^n\}$ et $f_h(x) = f(xh)$.

Soit T_0 l'opérateur de convolution à droite par $\frac{1}{\xi(\Omega^3)} 1_{\Omega^3}$:

$$T_0 f(x) = \frac{1}{\xi(\Omega^3)} \int f(y) 1_{\Omega^3}(y^{-1}x) d\xi(y).$$

On a alors :

$$(1) \quad \|f_h - f\| \leq C|h|^2 \|(I - T_0)^{1/2} f\|_2^2, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(G).$$

La preuve de (1) est élémentaire, mais un peu technique, et le lecteur est renvoyé à [18] ou [10].

Considérons d'autre part, pour $\alpha > 0$, la fonction

$$F_\alpha = c_\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} n^{-1-\alpha} V(n)^{-1} 1_{\Omega^n},$$

où c_α est tel que $\|F_\alpha\|_1 = 1$.

Sous l'hypothèse que $V(n) \geq cn^D$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(2) \quad \|F_\alpha^{(n)}\|_\infty \leq cn^{-D/\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

où $F_\alpha^{(n)}$ désigne la $n^{\text{ième}}$ puissance de convolution de F_α .

Il s'agit là encore d'un calcul élémentaire. Le lecteur est renvoyé à [10].

La preuve de la première assertion du théorème à partir de (1) et (2) est maintenant très simple. Choisissons $\alpha = 2S/d$. En intégrant (1) contre F_α , on obtient :

$$\int |f(xh) - f(x)|^2 F_\alpha(h) d\xi(x) d\xi(h) \leq c \left(\int |h|^2 F_\alpha(h) d\xi(h) \right) \|(I - T_0)^{\frac{1}{2}} f\|_2^2.$$

Or (2) signifie que l'opérateur de convolution par F_α vérifie (R_d) et d'autre part, comme $\alpha = 2D/d > 2$, il est facile de vérifier que

$$\int |h|^2 F_\alpha(h) d\xi(h) < +\infty.$$

Le théorème 6 du (§V) montre alors que T_0 vérifie (R_d) . Pour terminer, il suffit d'utiliser la proposition du (§V) puisque l'hypothèse que p est admissible implique, d'après la proposition 5, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (x, y) \in G \times G$, $1_{\Omega^3}(y^{-1}x) \leq Cp_{n_0}(x, y)$.

En ce qui concerne la deuxième assertion, un peu plus de travail est nécessaire. Sous l'hypothèse que $V(n) \simeq n^D$, on peut cependant montrer à partir de (1) que, si $0 < \alpha < 1$:

$$(3) \quad \int |f(xh) - f(x)|^2 F_\alpha(h) d\xi(x) d\xi(h) \leq c_\alpha \|(I - T_0)^{\alpha/2} f\|_2^2.$$

La preuve de (3) n'est pas très difficile, mais passe par l'expression de $\|(I - T_0)^{\alpha/2} f\|_2^2$ en termes d'une norme de Besov associée au semi-groupe $C_t = e^{-(I - T_0)t}$. Elle est donnée en détail dans [10]; (3) étant acquis,

on utilise (2) et le théorème 6 pour conclure que T_0 vérifie (R_D) et l'on termine comme précédemment.

Pour conclure, rappelons qu'après les travaux de Milnor, Wolff, Guivarc'h, Gromov, on sait que : si G est un groupe discret finiment engendré, ou bien un groupe connexe, ou bien un groupe résoluble, soit $\exists D$ tel que $V(n) \simeq n^D$, soit $\forall D \in \mathbb{N}$, $\exists C_D$ tel que $V(n) \geq C_D n^D$; pour les groupes connexes ou résolubles, la croissance du volume est en fait exponentielle dans le deuxième cas ; pour tout ceci, voir [7], [8]. La conjecture de Kesten mentionnée en introduction découle de ces résultats algébriques et du théorème ci-dessus.

Le premier auteur remercie Yves Raynaud de l'avoir aidé à mettre au point l'argument d'extrapolation de [3], (§II), qui est à nouveau utile ici.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. CARLEN, S. KUSUOKA, D. STROOCK, Upper bounds for symmetric Markov transition functions, *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistiques*, suppl. au n°2, 1987, pp. 245-287.
- [2] T. COULHON, Suites d'opérateurs à puissances bornées dans les espaces ayant la propriété de Dunford-Pettis, *Séminaire d'analyse fonctionnelle 84/85*, Publications mathématiques de l'Université Paris VII, t. **26**, 1986.
- [3] T. COULHON, Dimension à l'infini d'un semi-groupe analytique, à paraître au *Bull. Sci. Math.*, 1990.
- [4] T. COULHON, L. SALOFF-COSTE, Théorie de Hardy-Littlewood-Sobolev pour les semi-groupes d'opérateurs et application aux groupes de Lie unimodulaires, *Séminaire d'Analyse de l'Université Clermont-Ferrand II, 87/88*, exposé n°21, 1989.
- [5] E.B. DAVIES, *One parameter semi-groups*, Academic press, 1980.
- [6] N. DUNFORD, J. SCHWARTZ, *Linear operators, Part. I, General theory*, Interscience, 1957.
- [7] M. GROMOV, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n°53, 1981, pp. 53-78.
- [8] Y. GUIVARC'H, Croissance polynômiale et périodes des fonctions harmoniques, *Bull. Soc. Math. France*, **101**, 1973, pp. 333-379.
- [9] J. NASH, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Am. J. Math.*, vol. **80**, 1958, pp. 931-954.
- [10] L. SALOFF-COSTE, Sur la décroissance des puissances de convolution sur les groupes, *Bull. Sci. Math.*, 2^e série, **113**, 1989, pp. 3-21.
- [11] E. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.
- [12] E. STEIN, *Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley theory*, Princeton University Press, 1970.

- [13] N. VAROPOULOS, Chaînes de Markov et inégalités isopérimétriques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **298**, série I, n°10, 1984, pp. 233-236.
- [14] N. VAROPOULOS, Chaînes de Markov et inégalités isopérimétriques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **298**, série I, n°18, 1984, pp. 465-468.
- [15] N. VAROPOULOS, Isoperimetric inequalities and Markov Chains, *J. Funct. Anal.*, vol. **63**, n°2, 1985, pp. 215-239.
- [16] N. VAROPOULOS, Hardy-Littlewood theory for semi-groups, *J. Funct. Anal.*, vol. **63**, n°2, 1985, pp. 240-260.
- [17] N. VAROPOULOS, Théorie du potentiel sur des groupes et des variétés, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **302**, série I, n°6, 1986, pp. 203-205.
- [18] N. VAROPOULOS, Convolution powers on locally compact groups, *Bull. Sci. Math.*, 2^e série, **III**, 1987, pp. 333-342.

(Manuscrit reçu le 8 septembre 1989.)