

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

XAVIER GUYON

JOSÉ LEON

Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien stationnaire sur \mathbf{R}

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, n° 3 (1989), p. 265-282

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_3_265_0

© Gauthier-Villars, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien stationnaire sur \mathbb{R}

par

Xavier GUYON

Université Paris-I, 12, place du Panthéon,
75005 Paris, France

et

José LEON

Universidad Central de Venezuela,
Escuela de Física y Matemáticas,
A.P. 21201, Caracas 1020 A, Venezuela

RÉSUMÉ. — Soient H une fonctionnelle réelle d'indice d'Hermite k et $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ un processus gaussien stationnaire sur \mathbb{R} de covariance $R(t)$ vérifiant : $1 - R(t) = t^\beta L(t)$, où L est à variation lente en 0 et $0 < \beta < 2$. Si π_n est la partition régulière de pas $1/n$ de l'intervalle fixe $[0, 1]$ et $V_{H,n}$ la H-variation de X le long de π_n , nous étudions la convergence faible de $V_{H,n}$ convenablement renormalisée, lorsque $n \rightarrow \infty$: si $k(2-\beta) > 1$, la limite est gaussienne; si $k(2-\beta) < 1$, la limite existe appartenant au k -ième chaos de Wiener.

Mots clés : Processus gaussien stationnaire, H-variation, convergence faible, chaos de Wiener.

ABSTRACT. — Let H be a real functional of Hermite index k , $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ a stationary gaussian process with covariance R verifying:

Classification A.M.S. : Primaires : 60 F 05 et 60 G 15. Secondaire : 62 M 99.

$1 - R(t) = t^\beta L(t)$ with L slowly varying at $t=0$ and $0 < \beta < 2$. If π_n is the regular partition of mesh $1/n$ of the fix interval $[0, 1]$, we study weak convergence of the H-variation of X along π_n , well reduced, as $n \rightarrow \infty$: if $k(2-\beta) > 1$ the limit is gaussian; if $k(2-\beta) < 1$ the limit is in the k -th Wiener chaos.

Key words : Gaussian stationary process, H-variation, weak convergence, Wiener chaos.

I. INTRODUCTION

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ un processus gaussien à temps réel, centré stationnaire, de covariance R . Soit π_n la partition régulière de $[0, 1]$:

$$\pi_n = \{0 < x_1^n < x_2^n < \dots < x_n^n = 1\}, \quad x_j^n = \frac{j}{n}, \quad j = 1, n$$

et $\Delta^n X$ le processus à temps discret :

$$\Delta^n X = \left\{ \Delta_j^n X = X\left(\frac{j}{n}\right) - X\left(\frac{j-1}{n}\right), j \in \mathbb{Z} \right\} \quad (1-1)$$

de covariance $r_n (\sigma_n^2 = r_n(0))$, de corrélation s_n . Soit H une fonction mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Décomposant H sur la base des polynômes d'Hermite $\{H_l\}$, on définit l'indice d'Hermite k de H comme le premier indice l tel que la coordonnée de H sur H_l est non nulle.

La H-variation de X le long de π_n est définie par :

$$V_{H,n} = \sum_{j=1,n} H\left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}\right). \quad (1-2)$$

Nous étudions ici la convergence en loi, lorsque $n \rightarrow \infty$, de la variation $V_{H,n}$ convenablement renormalisée. Suivant les cas, la loi limite sera non gaussienne (dans le k -ième chaos de Wiener) ou gaussienne : le résultat dépend d'une condition jointe sur X et H , X étant caractérisé par le comportement local en 0 de sa covariance. Plus précisément, décrivons les

hypothèses sur X qui nous seront utiles :

(H-1) $1 - R(t) = t^\beta L(t)$, $0 < \beta < 2$, L à variation lente [1] en 0 est continue sur $]0, \infty[$

(H-2) $R''(t)$ existe si $t \neq 0$, $R''(t) = t^{\beta-2} L_1(t)$ où L_1 est à variation lente en 0, continue sur $]0, \infty[$; $|R''(t)|$, $t > 0$, est décroissante au voisinage de 0

(\mathcal{H}) (H-3) $L_1(t) = \beta(1 - \beta)L(t)(1 + o(1))$ au voisinage de 0

(H-4) Il existe b , $0 < b < 1$, tel que :

$$C = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sup \left(\sup_{\substack{y \\ x \leq y \leq x^b}} \left| \frac{L(y)}{L(x)} \right| \right) < \infty.$$

On notera (\mathcal{H}) la conjonction des trois hypothèses H-1-2-3. Les résultats sont les suivants :

(i) si $k(2 - \beta) < 1$, X vérifiant (\mathcal{H}), la H-variation converge en loi vers un élément du k -ième chaos de Wiener. De plus, la H-variation est réductible à la $a_k H_k$ -variation où $a_k H_k$ est le premier terme du développement de H sur les polynômes d'Hermite (théorèmes 1 et 2).

(ii) si $k(2 - \beta) > 1$ et si de plus X satisfait à la condition (H-4), il y a convergence gaussienne (théorème 3).

Nous traduisons ces résultats dans le cas particulier de la p -variation ($H(x) = |x|^p$). Dans le cas de la variation quadratique ($p=2$), nous donnons, dans le cas de la convergence non gaussienne (ici, $k=2$, $3/2 < \beta < 2$) une caractérisation de la loi limite via ses cumulants (remarque II-3-1).

Cette étude repose sur les travaux de M. Rosenblatt ([3], [6]), M. Taqq ([5], [8]), R. L. Dobrushin et P. Major [7], P. Major [10], P. Breuer et P. Major [11] : ceux-ci portent sur l'étude de la convergence en loi de fonctionnelles (non linéaires) d'un processus gaussien à *temps discret*, fixé; la situation que nous étudions passe par l'examen d'une suite $\{\Delta^n X\}$ de processus à temps discret « approchant » le processus dérivé \dot{X} [2] (de covariance $-R'$) de X sur le compact $[0, 1]$; les hypothèses que nous faisons sur le comportement de la covariance R de X en $t=0$ sont, en un certain sens, duales de celles faites, dans les travaux ci-dessus cités, sur le comportement, à l'infini, de la covariance r du processus à temps discret étudié.

La convergence en moyenne quadratique de certaines H-variations est étudiée dans [12], traitant également le cas où X est un champ sur R^2 . J. Ortega [13] généralise ces résultats en levant l'hypothèse de régularité de la partition π_n , donnant un critère de convergence presque sûre, et examinant de nouvelles variations spatiales.

II. NOTATIONS ET RÉSULTATS

II.1. H-variations

Soit Y une variable gaussienne, réduite, H une fonction mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$$E(H(Y))=0, \quad EH(Y)^2 = \|H\|_2^2 < \infty,$$

et sa décomposition sur la base des polynômes d'Hermite :

$$H(x) = \sum_{l \geq k} a_l H_l(x), \quad \|H\|_2^2 = \sum_{l \geq k} a_l^2 l! < \infty, \quad a_k \neq 0 \quad (2-1)$$

k (ici $k \geq 2$) est l'indice d'Hermite de H .

1^{er} cas : $k(2-\beta) < 1$: Réduction de la H -variation à la $a^k H_k$ -variation et convergence dans le k -ième chaos de Wiener

Notons :

$$\begin{aligned} V_{k,n} &= V_{H_k, n}; & s_{k,n}^2 &= E(V_{k,n}^2) \\ V_{H,n} &= \sum_{j=1,n} H\left(\frac{\Delta_j X}{\sigma_n}\right) = a_k V_{k,n} + R_{n,k} \end{aligned} \quad (2-2)$$

THÉORÈME 1 (Réduction). — Soit X un processus gaussien sur \mathbb{R} , stationnaire, vérifiant (\mathcal{H}) , H une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} satisfaisant (2-1), d'indice d'Hermite k vérifiant :

$$k(2-\beta) < 1. \quad (2-3)$$

Alors :

$$(a) \quad s_{n,k}^2 = (-1)^k k! n^{2(1-k)} \sigma_n^{-2k} \int_{-1}^1 (1-|x|) R''(x)^k dx. (1+o(1))$$

$$(b) \quad E(V_{H,n} - a_k V_{k,n})^2 = o(1) s_{k,n}^2.$$

Soit P une mesure de probabilité, gaussienne, stationnaire, sur \mathbb{R} , de mesure spectrale réelle G , de mesure aléatoire Z_G . Soit $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable vérifiant :

$$\begin{aligned} h(x) &= \overline{h(-x)} \\ \int_{\mathbb{R}^k} |h|^2 G(dx_1) \dots G(dx_k) &< \infty. \end{aligned}$$

Sous ces conditions, l'intégrale de Ito-Wiener de h

$$I = \int_{\mathbb{R}^k} h(x_1, \dots, x_k) Z_G(dx_1) \dots Z_G(dx_k) \quad (2-4)$$

peut être définie (cf. [10]). Remarquons que $I \in \mathbb{R}$.

Le théorème 1 nous conduit à étudier la limite en loi de la H-variation renormalisée

$$S_n = n^{k-1} \sigma_n^k V_{H, n}, \quad \sigma_n^2 = 2 \left(1 - R \left(\frac{1}{n} \right) \right) = 2 n^{-\beta} L \left(\frac{1}{n} \right) (1 + o(1)). \quad (2-5)$$

Si R'' est intégrable sur \mathbb{R} , on notera G_0 la mesure spectrale admettant la densité

$$g_0(x) = - \int_{\mathbb{R}} e^{ix} R''(t) dt. \quad (2-6)$$

Notons d'autre part K_0 la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} :

$$K_0(x) = \begin{cases} \frac{\exp(ix) - 1}{ix} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2-7)$$

THÉORÈME 2 (Convergence dans le k -ième chaos de Wiener). — *Supposons que X, H vérifient les hypothèses du théorème 1, R'' étant intégrable sur \mathbb{R} , G_0, K_0 définies par (2-6), (2-7).*

Alors :

- (a) $I_k = \int_{\mathbb{R}^k} K_0(x_1 + \dots + x_k) Z_{G_0}(dx_1) \dots Z_{G_0}(dx_k)$ existe
- (b) S_n converge en loi vers $a_k I_k$.

2^e cas : $k(2-\beta) > 1$. Convergence gaussienne

Pour $j \geq 1$, définissons la suite $\{\rho(j)\}$ par :

$$\rho(j) = \frac{1}{2} ((j-1)^\beta - 2j^\beta + (j+1)^\beta) \quad (2-8)$$

$\{\rho(j), j \geq 0\}$ est la covariance du processus des accroissements $\{B(k) - B(k-1), k \in \mathbb{Z}\}$ du mouvement brownien fonctionnaire B d'indice β (cf. [9]).

Alors dès que l'indice d'Hermite k , de H , vérifie :

$$k(2-\beta) > 1 \quad (2-9)$$

la série $\sum_{j \geq 1} \rho(j)^l$ converge dès que $l \geq k$.

Notons alors :

$$\sigma_l^2 = 1 + 2 \sum_{j \geq 1} \rho(j)^l, \quad l \geq k. \quad (2-10)$$

Étant donnée la forme de $\{\rho(j)\}$ et (2-1), on a :

$$\sigma^2 = \sum_{l \geq k} l! a_l^2 \sigma_l^2 < \infty. \quad (2-11)$$

On a alors le résultat :

THÉORÈME 3 (convergence gaussienne). — *Supposons que X vérifie (H) et (H4), H vérifiant (2-1) d'indice d'Hermite k vérifiant :*

$$k(2 - \beta) > 1$$

Alors :

$$n^{-1/2} V_{H,n} \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où σ^2 est donné par (2-11).

Par exemple, la condition (H4) est satisfaite pour $L(t) = a(-\text{Log } t)^\alpha (1 + o(1))$ avec $C \leq 1$ si $\alpha > 0$ et $C \leq b^\alpha$ si $\alpha < 0$.

II.2. p-Variations

Spécifions la forme de H :

$$H(x) = |x|^p - b_p, \quad p \neq 0, \quad p > -\frac{1}{2} \tag{2-12}$$

$$b_p = E(|Y|^p), \quad Y \text{ normale réduite.}$$

Il est facile de voir que le rang d'Hermite de H est toujours $k=2$, avec pour premier coefficient a_2 sur H_2 :

$$a_2 = \frac{p}{2} b_p.$$

On a :

$$V_{H,n} = \sum_{j=1, n} \left(\left| \frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n} \right|^p - b_p \right).$$

Notons la p-variation pondérée de module de X par :

$$VP_{p,n} = \frac{1}{n \sigma_n^p} \sum_{j=1, n} |\Delta_j^n X|^p \tag{2-13}$$

$$E VP_{p,n} = b_p, \quad V_{H,n} = n(VP_{p,n} - b_p)$$

On a comme conséquence immédiate des théorèmes 1, 2, 3 :

COROLLAIRE. — *Si H, b_p sont définies par (2-12), si $VP_{p,n}$ représente la p-variation pondérée (2-13) de X, si X vérifie (H), on a :*

$$(a) \quad 0 < \beta < \frac{3}{2} : \sqrt{n} (VP_{p,n} - b_p) \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où σ^2 est défini par (2-11).

$$(b) \frac{3}{2} < \beta < 1 : n^{2-\beta} L\left(\frac{1}{n}\right) (VP_{p,n} - b) \xrightarrow{\text{Loi } p} \frac{p}{4} b_p I_2$$

où I_2 , dans le 2^e chaos de Wiener, est défini par le théorème 2.

II-3. Quelques remarques

II-3.1. *Description de la variation quadratique limite par ses cumulants*

Comme observé en II-2, la p -variation est réductible à la variation quadratique dans le cas de convergence non gaussienne. Notons :

$$VQ_n = \sum_{j=1, n} (\Delta_j^n X)^2 \tag{2-14}$$

et W_n la variable VQ_n réduite, J la limite en loi de W_n pour $\frac{3}{2} < \beta < 2$ et, pour $k \geq 2$:

$$c_k = \int_{[0, 1]^k} R''(|x_1 - x_2|) R''(|x_2 - x_3|) \dots R''(|x_k - x_1|) dx_1 \dots dx_k. \tag{2-15}$$

Alors J est caractérisée par ses cumulants K_k , $k \geq 2$:

$$K_k = (-1)^k (k-1)! \frac{c_k}{(c_2)^{k/2}}. \tag{2-16}$$

Un calcul de ces cumulants directement à partir de la forme de J dans le 2^e chaos de Wiener n'est pas aisé. Nous indiquons plus loin le schéma d'obtention de cette caractérisation s'apparentant à la méthode développée en [3] et [6] par Rosenblatt pour le temps discret.

II-3.2. La condition (H3) peut être affaiblie : par exemple, examinant la variation quadratique sous la condition $\frac{3}{2} < \beta < 2$, il suffit de supposer R concave (ou convexe) sur $[0, 1]$. En effet, si $t^\alpha |L_1(t)|^\gamma$ n'est pas intégrable en 0, on a :

$$\int_\epsilon^1 t^\alpha |L_1(t)|^\gamma dt = -(\alpha + 1)^{-1} \epsilon^{\alpha+1} L_1(\epsilon) (1 + o(1)).$$

On obtient cet ordre en remarquant que, pour la fonction à variation régulière à l'infini

$$V(x) = \left| L_1\left(\frac{1}{x}\right) \right|^\gamma x^{-\alpha}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x)}{\int_{x_0}^x V(u) du} = 1 - \alpha$$

(cf. théorème 1.2.1 de [14]).

II-3.3. L'examen du cas frontière : $k(2-\beta) = 1$ peut conduire aux deux types de convergence suivant l'intégrabilité ou non de $(R'')^k$ en 0. Par exemple, sous les conditions (\mathcal{H}) et (H-4) et dans le cas de la variation quadratique, on a :

$(R'')^2$ intégrable en 0, $\beta = \frac{3}{2}$: convergence non gaussienne décrite dans le théorème 4 (vitesse inchangée par rapport à $\beta > \frac{3}{2}$).

$(R'')^2$ non intégrable en 0, $\beta = \frac{3}{2}$: convergence gaussienne mais la vitesse est en $n^{1/2} L^{-1/2} \left(\frac{1}{n}\right)$.

III. DÉMONSTRATIONS DES RÉSULTATS

On se place donc sous les conditions (\mathcal{H}) pour X et (2-1) pour H.

III-1. Démonstration du théorème 1 : (réduction si $k(2-\beta) < 1$)

Ce résultat est l'analogue, à temps continu, de celui établi par M. Taquu ([5], [7]) pour un processus X à temps discret. Si (Y, Z) est un couple gaussien, à marginales réduites, et corrélé à ρ , rappelons que l'on a [4] :

$$E(H_l(Y) H_j(Z)) = \delta_{l,j} l! \rho^l. \quad (3-1)$$

Notant :

$$c_{n,l} = \sum_{|j| \leq n-1} (n-|j|) r_n(j)^l \quad (3-2)$$

on obtient, sur la base de (3-1) :

$$\begin{aligned} E(V_{k,n}^2) &= k! \sigma_n^{-2k} c_{n,k} \\ E(R_{k,n}^2) &= \sum_{l \geq k+1} l! a_l^2 \sigma_n^{-2l} c_{n,l} \\ E(V_{k,n} \cdot R_{k,n}) &= 0. \end{aligned}$$

Quand il n'y aura pas ambiguïté, on notera :

$$x_j = \frac{j}{n}, \quad h = n^{-1}.$$

On a, d'après (\mathcal{H}) :

$$\begin{aligned} r_n(0) &= \sigma_n^2 = 2 h^\beta L(h) \\ r_n(j) &= -R(x_{j-1}) + 2R(x_j) - R(x_{j+1}), \quad j \geq 1 \\ &= -h^2 R''(x_j + \theta_j^* h), \quad \text{avec } |\theta_j^*| < 1. \end{aligned} \tag{3-4}$$

Puisque $k > 1$, (2-3) implique $\beta > 1$ et donc la positivité de $(-R'')$ au voisinage de $t=0$. Soit $0 < \delta < 1$ t. q. sur $]0, \delta[$, R'' soit positive décroissante.

$$R''(x_{j+1}) \leq R''(x_j + \theta_j^* h) \leq R''(x_{j-1}), \quad j=2, [n\delta].$$

Soit $k_0 + 1$ le premier entier s t. q. : $s(2-\beta) \geq 1$.

Examinons la situation : $k \leq l \leq k_0$

$(-R'')^l$ est alors intégrable et on a l'encadrement :

$$\begin{aligned} \int_{4h}^{\delta} (1-x)(-R''(x))^l dx &\leq - \sum_{j=2}^{[n\delta]} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n} (-R''(x_j + \theta_j^* h))^l \\ &\leq \int_h^{\delta} (1-x)(-R''(x))^l dx \end{aligned} \tag{3-5}$$

Sur $\left[\frac{\delta}{2}, 1\right]$, la continuité de R'' et les conditions uniformes : $|\theta_j^*| \leq 1$, permettent d'approcher l'intégrale de $(1-x)(-R''(x))^l$ sur $[\delta, 1]$ par la somme de Riemann (de $[n\delta] + 1$ à n) définie comme en (3-5). On en déduit :

(i) en k_0 :

$$c_{n,k} = (-1)^k h^{2k-2} \left(\int_{-1}^1 (1-|x|) R''(x)^k dx + o(1) \right). \tag{3-6}$$

Cette égalité jointe au fait que $\sigma_n^2 = r_n(0) = 2 h^\beta L(h)$ permet de conclure la partie (a) du théorème 1.

(ii) $k_0 + 1 \leq l \leq k$, $c_{n,l} = O(h^{2l-2})$; et donc

$$\sigma_n^{-2l} c_{n,l} = O(h^{l(2-\beta)-2} L(h)^{-l}) = o(n^{2(1-k)} \sigma_n^{-2k}). \tag{3-7}$$

Si $l \geq k_0 + 1$, $(-R'')^l$ n'est plus intégrable et la partie dominante de la somme $\sum_{j=2, n} \frac{1}{n} (-R''(x_j + \theta_j^* h))^l$ est donnée par la somme en $j=2, [n\delta]$.

Utilisant alors la partie majoration de l'encadrement (3-5), on obtient, pour n assez grand :

$$|c_{n,l}| \leq 10n \left(r_n(0)^l + h^{2l-1} \int_h^1 |R''(x)|^l dx \right) \leq ch^{\beta l-1} |L(h)|^l$$

et donc :

$$\sigma_n^{-2l} c_{n,l} = O(h^{-1}) = o(n^{2(1-k)} \sigma_n^{-2k}) \tag{3-8}$$

(3-1), (3-7), (3-8) conduisent alors à b). ■

III-2. Démonstration du théorème 2 : (convergence non gaussienne de la H-variation vers un élément du k-ième chaos de Wiener)

Le résultat du théorème 2 est, en partie, l'analogue, à temps continu, de celui donné par R. L. Dobrushin et P. Major [7] pour un processus fixe à temps discret. La situation diffère ici du fait que $\Delta^n X$ est un processus à temps discret dont la structure évolue avec n . Dans la démarche proposée en [7] les lemmes 2 et 3 restent inchangés, par contre le lemme 1 et la proposition 1 doivent être repris. La mesure spectrale G_0 par rapport à laquelle sera définie l'intégrale de Ito-Wiener [10] ne possède pas, ici, de propriété d'Auto-similarité. G_0 sera décrite en terme de R'' .

Puisque la condition : $k(2-\beta) < 1$ est réalisée, le théorème 1 permet de réduire la H-variation à la $a_k H_k$ variation. Notons alors :

$$Y_n = n^{k-1} \sigma_n^k \sum_{j=1, n} H_k \left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n} \right)$$

$G^{(n)}$ la mesure spectrale (sur $] -\pi, \pi]$) de $\Delta^n X$
 $G_n^{(n)}$ la mesure spectrale sur \mathbb{R} , portée par $] -n\pi, n\pi]$, (3-9)
 définie par : $G_n^{(n)}(A) = n^2 G^{(n)} \left(\frac{A}{n} \cap] -\pi, \pi] \right)$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Utilisant la formule de Ito (cf. [10], p. 30) pour $H_k \left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n} \right)$, un calcul direct conduit à :

$$Y_n = \int_{\mathbb{R}^k} K_n(x_1, \dots, x_k) Z_{G_n^{(n)}}(dx_1) \dots Z_{G_n^{(n)}}(dx_k)$$

(3-10)

avec

$$K_n(x_1, \dots, x_k) = \frac{1 - \exp i(x_1 + \dots + x_k)}{n(1 - \exp(i/n)(x_1 + \dots + x_k))}$$

Soit φ_n la modification de la transformée de Fourier de la mesure :

$$\varphi_n(t_1, \dots, t_k) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\exp \frac{i}{n} (j_1 x_1 + \dots + j_k x_k) \right) |K_n|^2 G_n^{(n)}(dx_1) \dots G_n^{(n)}(dx_k) \tag{3-11}$$

où : $j_l = [nt_l], l = 1, k$.

Un calcul direct montre que :

$$\varphi_n(t_1, \dots, t_k) = n^{2(k-1)} \sum_{|p| \leq n=1} (n-|p|) \prod_{i=1}^k r_n(p+j_i).$$

LEMME 1. — Soit $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(t_1, \dots, t_k) = (-1)^k \int_{-1}^1 (1-|x|) R''(x+t_1) \dots R''(x+t_k) dx.$$

Alors si : $k(2-\beta) < 1$, g est bien définie, continue partout et :

$$\lim_n \varphi_n = g$$

uniformément sur tout compact.

PROPOSITION 1. — Si R'' est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $G_n^{(n)}$ tend localement faiblement vers la mesure G_0 , localement finie, définie par la densité spectrale :

$$g_0(x) = - \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) \cdot R''(t) dt$$

(si μ_n, μ_0 sont localement finies, on dit que μ_n tend localement faiblement vers μ_0 si pour tout fonction f continue à support compact, $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu_0$).

Le théorème 2 résulte alors, dans les mêmes termes que ceux de [7], de la représentation (3.10) de Y_n , des trois lemmes et de la proposition 1.

Démonstration du lemme 1. — Soit $f: [-1, 1]^k \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t_1, \dots, t_k; x) = \begin{cases} (-1)^k (1-|x|) \prod_{i=1, k} R''(x+t_i) & \text{si } x \neq t_l, \quad l=1, k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3-12}$$

Notons :

$$\|R''\|_{k, M}^k = \int_{-(M+1)}^{(M+1)} |R''(x)|^k dx < \infty, \quad \text{pour } M > 0 \text{ fixé.}$$

A t_1, \dots, t_k fixés, l'inégalité de Holder en x donne :

$$\int_{-1}^1 |f| dx \leq \|R''\|_{k, 2}^k < \infty$$

g est donc bien définie. D'autre part, pour $0 < \varepsilon < 1$, l fixé, on a :

$$\int_{\substack{|x+t_l| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |f(t_1, \dots, t_k; x)| dx \leq \left[\prod_{s=1, k} \int_{\substack{|x+t_s| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |R''(x+t_s)|^k dx \right]^{1/k} \\ \leq \|R''\|_{k, M}^{k-1} \cdot \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |R''(x)|^k dx \right]^{1/k} \quad (3-13)$$

dès que : $|t_1|, \dots, |t_k| \leq M$. g est donc continue partout.

Soit la fonction $f_n : [-1, 1]^k \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie

$$f_n(t_1, \dots, t_k; x) = \left(1 - \frac{[nx]}{n}\right) \prod_{l=1, k} n^2 r_n([nx] + j_l) \quad (3-14) \\ j_l = [nt_l], \quad l = 1, k.$$

Un calcul direct donne :

$$\int_{-1}^1 f_n(t_1, \dots, t_k; x) dx = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Choisissons : $0 < \varepsilon < 1/2$, $0 < M < \infty$ et définissons :

$$E(\varepsilon, M) = \{x \in [-1, 1] \text{ t. q. pour } l = 1, k, |x + t_l| \geq \varepsilon, |t_l| \leq M\}.$$

L'égalité (3-4) montre alors que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $E(\varepsilon, M)$. D'autre part, f étant intégrable en x , on a, pour tout $l = 1, k$:

$$\int_{\substack{|x+t_l| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |f(t_1, \dots, t_k; x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3-15)$$

On va obtenir un même contrôle relatif à f_n , uniformément en t_1, t_2, \dots, t_l . Sur $[-M, M]$, on a la première estimation :

$$\int_{|x+t_l| \leq \varepsilon} |f_n| dx \leq \frac{1}{n} \sum_{|p+j_l| \leq 2[\varepsilon n]} \prod_{s=1, k} n^2 |r_n(p+j_s)| \\ \leq C(n, M, k) \delta_n^k \text{ (Holder),}$$

où

$$C(n, M, k) = \left[\frac{1}{n} \sum_{|p| \leq [n(M+1)]} n^{2k} |r_n(p)|^k \right]^{(k-1)/k} \\ \delta_n^k = \frac{1}{n} \sum_{|p| \leq 2[\varepsilon n]} n^{2k} |r_n(p)|^k.$$

Majorant $|r_n(p)|$ par $r_n(0)$ si $p \leq 2$, par $2h^2 \left| R'' \left(\frac{p-1}{n} \right) \right|$ si $3 \leq |p| \leq [n(M+1)]$ et n assez grand, on obtient :

$$C(n, M, k) \leq \|R''\|_{k, M}^{k-1}$$

$$\delta_n^k = O \left(h^{k(2-\beta)+1} L(h)^k + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |R''(x)|^k dx \right) = O(\varepsilon^{k(\beta-2)+1} |L(\varepsilon)|^k)$$

et donc, uniformément en t_1, t_2, \dots, t_k sur $[-M, M]^k$,

$$\int_{\substack{|x+t_l| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |f_n(t_1, \dots, t_k; x)| dx < C(\varepsilon) \tag{3-16}$$

où $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

La deuxième partie du lemme 1 est alors une conséquence de (3-15), (3-16), de la convergence uniforme de f_n vers f sur $E(\varepsilon, M)$ et de la majoration uniforme sur $[-M, M]^k$:

$$|\varphi_n - g|(t_1, \dots, t_k) \leq \int_{E(\varepsilon, M)} |f_n - f| dx + \sum_{l=1, k} \int_{\substack{|x+t_l| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} (|f_n| + |f|) dx. \blacksquare$$

Démonstration de la proposition 1. — L'intégrabilité de R'' sur \mathbb{R} implique : $\sum_{j \geq 0} n |r_n(j)| < \infty$. La mesure spectrale $G^{(n)}$ de $\Delta^n X$ admet donc une densité $g^{(n)}$. Soit alors f une fonction réelle continue à support compact et

$$I_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(y) G_n^{(n)}(dy).$$

Faisant le changement de variable $y = nz$, on obtient :

$$I_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(nz) n^2 g^{(n)}(z) dz$$

où :

$$g^{(n)}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r_n(j) \exp(ijz) \text{ (dans } l^1(\mathbb{Z}))$$

notant :

$$g_n^{(n)}(y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} n r_n(j) \exp\left(i \frac{j}{n} y\right),$$

le remplacement de $g^{(n)}$ par son développement dans $I_n(f)$ donne :

$$I_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g_n^{(n)}(y) dy.$$

Soit alors :

$$g_0(y) = - \int_{\mathbb{R}} \exp(ity) R''(t) dt$$

$(-R'')$, qui est intégrable, est la covariance du processus généralisé \dot{X}_n , dérivée de X ([2], p. 263), et donc g_0 est la densité spectrale d'un processus généralisé. Cette propriété peut s'obtenir également de façon directe : soit $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, t_1, t_2, \dots, t_m m -points distincts de \mathbb{R} , alors :

$$\begin{aligned} B &= - \sum_{i, j=1, m} a_i a_j R''(t_i - t_j) \\ &= \lim_n \sum_{i, j=1, m} a_i a_j h^2 r_n([n(t_i - t_j)]) \geq 0. \end{aligned}$$

Il reste à voir que :

$$I_n(f) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(y) g_0(y) dy.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Cette convergence résulte directement des trois propriétés suivantes, qui s'obtiennent en utilisant (3-4) :

$$(i) \quad \sum_{|j| \geq [n\varepsilon]} nr_n(j) \exp\left(i \frac{j}{n} y\right) \rightarrow - \int_{\varepsilon}^{\infty} \exp(ity) R''(t) dt$$

uniformément en y sur tout compact ($\varepsilon > 0$ fixé).

$$(ii) \quad \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp(ity) R''(t) dt \right| \rightarrow 0 \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$(iii) \quad \sum_{j \leq [n\varepsilon]} nr_n(j) \exp i \frac{j}{n} y \rightarrow 0 \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0$$

uniformément en y , sur tout compact. ■

III.3. Démonstration du théorème 3 (convergence gaussienne)

Par rapport aux théorèmes 1 et 2, on supposera que X vérifie l'hypothèse supplémentaire (H-4) et :

$$k(2 - \beta) > 1. \quad (3-17)$$

Pour un processus à temps discret, la convergence gaussienne d'une fonctionnelle (non linéaire) d'un processus gaussien est démontrée par

P. Breuer et P. Major [11]. La normalité limite de $V_{H,n}$ s'obtient en identifiant les moments de $V_{H,n}$. Le processus $\{X_j, j=1, n\}$ considéré dans [11] doit être remplacé, au pas n , par $\left\{ \tilde{X}_j^{(n)} = \frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}, j=1, n \right\}$. La démonstration de [11] reste inchangée quant à sa partie combinatoire (formule du diagramme). L'existence de la limite de la suite $(n^{-1} \text{Var}(V_{H,n}))$ et la non contribution, dans la formule du diagramme, des graphes irréguliers résulteront des lemmes 2 et 3 ci-dessous; la démonstration du théorème 3 découlera alors de ces deux propriétés.

Soit $\rho_n(j), j \geq 1$, la corrélation du processus $\Delta^n X$. D'après (3-4) et \mathcal{H} , on a :

$$\begin{aligned} \rho_n(1) &= -1 + 2^{\beta-1} \frac{L_1(2h)}{L(h)} \\ \rho_n(j) &= -\frac{1}{2} (j + \theta_j^n h)^{\beta-2} \frac{L_1(jh + \theta_j^n h)}{L(h)}, \quad j \geq 2 \end{aligned} \tag{3-18}$$

LEMME 2. — Supposons que X vérifie \mathcal{H} , (H-4) et $k(2-\beta) > 1$. Soit $\varepsilon > 0$ t. q. : $k\varepsilon < k(2-\beta) - 1$, et soit :

$$r(j) = (j-1)^{\beta+\varepsilon-2}, \quad j \geq 2, \quad r(0) = r(1) = 1.$$

Il existe alors $K(\varepsilon), N_0(\varepsilon)$ finis t. q. :
Si $n \geq N_0(\varepsilon), j=1, 2, \dots, n$, on a :

$$|\rho_n(j)| \leq K(\varepsilon) r(j).$$

LEMME 3. — (a) Sous la condition (\mathcal{H}) pour $X, \rho_n(j) \rightarrow \rho(j), j \geq 1$ où $\rho(j), j \geq 1$ sont définis par (2-8).

(b) Si de plus, X vérifie (H-4) et si $k(2-\beta) > 1$ et $l \geq k$, alors :

$$\lim_n \sum_{|j| \leq n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \rho_n(j)^l = \sigma_l^2 < \infty$$

où σ_l^2 est définie par (2-10).

Démonstration du Lemme 2. — Soit b donnée par (H-4) et $a = 1 - b, 0 < a < 1$

$2 \leq j \leq [n^a]$: on a, d'après (H-4), pour n assez grand

$$|\rho_n(j)| \leq C(j-1)^{\beta-2}$$

$[n^\alpha] \leq j \leq n$: soit $\varepsilon > 0$ choisi comme indiqué dans le lemme 2. On a :

$$\begin{aligned} |\rho_n(j+1)| &\leq \frac{1}{2} j^{\beta+\varepsilon-2} j^{-\varepsilon} \frac{|L_1((j+1)h + \theta_{j+1}^n h)|}{|L(h)|} \\ &\leq j^{\beta+\varepsilon-2} h^{a\varepsilon} \frac{|L_1((j+1)h + \theta_{j+1}^n h)|}{|L(h)|} \end{aligned} \quad (3-19)$$

puisque : $j^{-\varepsilon} \leq 2h^{a\varepsilon}$.

Soit $\delta : 0 < \delta < a\varepsilon$ et $K = K(\delta)$ t. q. sur $]0, 1[$:

$$|\rho_n(j+1)| \leq K(\delta) j^{\beta+\varepsilon-2-\delta} h^{a\varepsilon-\delta} |L(h)|^{-1} \leq K(\delta) j^{\beta+\varepsilon-2}$$

pour n assez grand. ■

Démonstration du lemme 3. — (a) D'après (3-4) et (H1), j étant fixé, on a :

$$\begin{aligned} \rho_n(j) &= \frac{-R((j-1)h) + 2R(jh) - R((j+1)h)}{2h^\beta L(h)}, \quad \left(h = \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{(j-1)^\beta L((j-1)h) - 2j^\beta L(jh) + (j+1)^\beta L((j+1)h)}{2L(h)} \end{aligned}$$

L étant à variation lente, on a :

$$\rho_n(j) = \frac{1}{2} [(j-1)^\beta - 2j^\beta + (j+1)^\beta] + o(1)$$

$$= \rho(j) + o(1), \text{ d'où (a).}$$

(b) Il suffit de vérifier que :

$$\sum_{j=1}^n \rho_n(j)^l \rightarrow L(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(j)^l.$$

L'existence de $L(l)$ étant assurée par (3-17).

Or on a, d'après le lemme 2 :

$$|\rho_n(j)^l| \leq K r(j)^l$$

avec $(r(j)^l)$ sommable. La convergence recherchée résulte du théorème de la convergence dominée et de (a).

III.4. Sur la remarque II.3.1 : calcul des cumulants de la loi limite de la variation quadratique réduite

Soit $C_n = \text{Cov}\{\Delta_j^n X, j=1, n\}$ de valeurs propres $\{\lambda_{i,n}, i=1, n\}$; $V_{2,n} = VQ_n - EVQ_n$ est de variance $s_n^2 = \sum_{i=1, n} \lambda_{i,n}^2$ et de loi

$\sum_{i=1, n} \lambda_{i, n} (\chi_{i, 1}^2 - 1)$ (cf. [3], [6]) où les χ^2 sont indépendants. Un calcul direct de la fonction cumulant de $V_{2, n}$ réduite donne :

$$\psi_n(t) = \sum_{k \geq 2} 2^{k-1} \frac{(it)^k}{k} I_{n, k}$$

avec

$$I_{n, k} = s_n^{-k} \text{Trace} (C_n)^k = s_n^{-k} \sum_{j=1}^n \lambda_{j, n}^k$$

L'identification de la loi limite s'obtiendra à partir de l'étude de :

$$\begin{aligned} J_{n, k} &= h^{-k} \text{Trace} (C_n)^k \\ &= h^{-k} \sum_{j_1, \dots, j_k=1, n} r_n(|j_1 - j_2|) \cdot \dots \cdot r_n(|j_k - j_1|) \end{aligned}$$

Pour ce faire, il faut d'une part démontrer l'existence des c_k , d'autre part vérifier que $\lim_n J_{n, k} = (-1)^k c_k$. Le premier point est une conséquence de l'intégrabilité en 0 de $(R'')^2$. Quant au deuxième il s'obtient en remarquant que l'on peut représenter :

$$J_{n, k} = \int_{[0, 1]^k} f_n dx_1 \dots dx_k$$

avec

$$\begin{aligned} f_n &= \prod_{l=1, k} g_n(x_l - x_{l+1}) \quad (\text{posant } x_{k+1} = x_1) \\ g_n(x - y) &= r_n(|j - s|) h^{-2} \\ \text{si } x &\in](j-1)h, jh], \quad y \in](s-1)h, sh] \end{aligned}$$

où f_n converge uniformément, en dehors de l'origine, vers la fonction f , définissant c_k , f et f_n étant convenablement contrôlés autour de l'origine.

RÉFÉRENCES

- [1] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Application*, Tome II, J. Wiley, 1966.
- [2] M. GUELFAND et N. Ya. VILENKIN, *Generalized Functions*, vol. 4 : *Applications of Harmonic Analysis*, Acad. Press, 1964.
- [3] M. ROSENBLATT, Independence and Dependence, *Proc. 4th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Proba.*, 1961, p. 431-443.
- [4] B. SIMON, *The P(Φ)₂ Euclidian Quantum Field Theory*, Princeton Univ. Press, 1974.
- [5] M. TAQUU, Weak Convergence to Fractional Brownian Motion and to the Rosenblatt Process, *Z. W. verb. Geb.*, vol. 31, 1975, 287-303.
- [6] M. ROSENBLATT, Some Limit Theorems for Partial Sums of Quadratic Forms in Stationary Gaussian Variables, *Z. W. verb. Geb.*, vol. 49, 1979, p. 125-132.

- [7] R. L. DOBRUSHIN et P. MAJOR, Non Central Limit Theorems for Non-Linear Functional of Gaussian Fields, *Z.W. verb. Geb.*, vol. **50**, 1979, p. 27-52.
- [8] M. TAQQU, Convergence of Integrated Processes of Arbitrary Hermite Rank, *Z.W. verb. Geb.*, vol. **50**, 1979, p. 53-83.
- [9] M. TAQQU, Law of the Iterated Logarithm for Sums of Non-Linear Functions of Gaussian Variables that Exhibit a Long Range Dependence, *Z.W. verb. Geb.*, vol. **40**, 1977, p. 203-238.
- [10] P. MAJOR, Multiple Wiener-Ito Integrals, *L.N.M.*, n° 849, Springer-Verlag, 1981.
- [11] P. BREUER et P. MAJOR, Central Limit Theorems for Non-Linear Functionals of Gaussian Fields, *J. Multi. Anal.*, vol. **13**, 1981, p. 425-441.
- [12] X. GUYON, Variations des Champs Gaussiens stationnaires, Application à l'identification, *Proba. Th. Rel. Fields*, vol. **75**, 1987, p. 179-193.
- [13] J. ORTEGA, *On the Variation of Gaussian Processes and Fields*, Preprint U.C.V., Caracas, 1988.
- [14] L. DE HAAN, *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*, Mathematical Centre Tracts n° 032, Math. Centre, Amsterdam, 1970.

*(Manuscrit reçu le 29 avril 1988;
corrigé le 6 décembre 1988.)*