Annales de l'I. H. P., section B

R. Becker

Sur la séparabilité et la continuité des fonctions aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, nº 2 (1989), p. 167-174
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_2_167_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 25, n° 2, 1989, p. 167-174. *Probabilités et Statistiques*

Sur la séparabilité et la continuité des fonctions aléatoires

par

R. BECKER

Équipe d'Analyse, U.A. n° 754 au C.N.R.S.,
Université Paris-VI, Tour 46, 4[e] étage,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On étudie les f.a.r. qui admettent un ensemble séparant (au sens de Doob) donné, soit S. Leurs lois forment une « face de mesures ». On montre alors, moyennant une hypothèse de continuité presque sûre, que la loi de la f.a.r. est déterminée par sa projection sur S. Avec seulement une hypothèse de continuité en probabilité, la projection sur S de la loi de la f.a.r. jouit d'une propriété d'extrémalité.

Mots clés : Face de mesures, processus séparables, théorème de Doob, processus continu.

ABSTRACT. — We study the processes which has a given separating set, let S (in Doob's theory). The set of theirs laws is an extremal set of measures. We show, with the help of an almost sure continuity hypothesis, that the law of the process is determinated by its projection on S. With only an hypothesis of continuity in probability, the projection on S of the law of the process has a property of extremality.

Nous reprenons la terminologie de J. Neveu ([2], p. 81-93) pour ce qui concerne les f.a.r. (fonctions aléatoires réelles) : en particulier $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

Classification A.M.S. : 60 G 05, 60 G 07, 28 A 05, 28 A 35, 28 A 60, 46 A 55.

désigne un espace de probabilité et T un intervalle de $\mathbb{R}$. On utilisera aussi l'espace $M(\Omega, \mathscr{A})$ des mesures σ-additives finies sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Rappelons l'idée clef concernant la séparabilité des f.a.r.

1. RAPPELS ET DÉFINITIONS ([2] lemme p. 84 et exercice p. 88).

1) Soit $X = \{X_t, t \in T\}$ une f.a.r. définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, il existe alors une partie dénombrable S de T telle que :

(a) pour tout compact K de $\bar{\mathbb{R}}$ et tout intervalle ouvert $I \subset T$ on ait :

$$P\{\omega \mid X_t(\omega) \in K \text{ pour tout } t \in I \cap S\} = \wedge\, P\{\omega \mid X_t(\omega) \in K \text{ pour } t \text{ décrivant une partie finie de } I\}.$$

(b) pour tout $u \in T$, il existe $N_u \subset \Omega$, négligeable pour P, tel que :
si

$$\omega \notin N_u$$

alors

$$X_u(\omega) \in \bigcap_{I \ni u} \overline{X(I \cap S, \omega)}.$$

En fait (a) et (b) sont équivalentes pour une partie dénombrable S de T. Une telle partie sera appelée *séparante*. Notons cependant que la f.a.r. X_t n'est pas en général *séparable* au sens classique (J. Neveu [2], p. 82, définition), mais seulement une modification convenable (J. Neveu [2], p. 84, proposition). C'est le théorème de Doob.

Notons également que le fait pour S d'être une partie *séparante*, au sens ci-dessus, ne dépend que des classes de chaque X_t, pour l'égalité P-presque sûre. On sait que ce n'est pas le cas pour le fait d'être une f.a.r. séparable.

2) Dans tout ce qui suit une f.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A})$ désignera une famille $(X_t)_{t \in T}$ de fonctions $\mathscr{A}$ mesurables sur Ω, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Par commodité, on considérera des $P \in M^+(\Omega, \mathscr{A})$ et pas seulement des probabilités.

On rappelle que, si X est un cône convexe saillant contenu dans un espace vectoriel V, on dit qu'un sous-cône convexe $Y \subset X$ est une face de X lorsque :

$$(u, v \in X \text{ et } u+v \in Y) \quad \text{entraîne} \quad (u, v \in Y).$$

2. PROPOSITION. — *Soit* $T \subset \bar{\mathbb{R}}$ *et* X_t *une f.a.r., définie sur* $(\Omega, \mathscr{A})$; *pour toute partie dénombrable* $S \subset T$ *l'ensemble* $D_{T,S}$ *des éléments de* $M^+(\Omega, \mathscr{A})$ *tels que* X_t *admette* S *pour partie séparante forme une face fermée (en norme).*

Preuve. — Le fait pour S d'être une partie séparante équivaut, d'après la définition (a), à ce que certains ensembles soient P négligeables : $\forall K$ compact de $\bar{\mathbb{R}}$, $\forall I \subset T$ intervale ouvert et $\forall t \in T$ avec $t \in I$ on doit avoir :

$$P(A_{K,I,t}) = 0 \quad \text{avec} \quad A_{K,I,t} = \{\omega \mid X_s(\omega) \in K,\ s \in I \cap S\} \cap \{\omega \mid X_t(\omega) \notin K\}.$$

Il est alors clair que cette propriété se conserve par somme finie, mesure plus petite et passage à la limite en norme.

Rappelons que si F est une face fermée de $M^+(\Omega, \mathscr{A})$ alors l'espace vectoriel $(F-F)$ est un espace de Banach pour la norme et forme une bande.

Voici les deux principaux résultats; avec les notations de la proposition précédente on prend $\Omega=(\bar{R})^T$ et $\mathscr{A}$ la tribu produit et $X_t(\omega)=\omega_t$; on note p l'application canonique de $(\bar{R})^T$ sur $(\bar{R})^S$.

3. THÉORÈME. — *Soit* T *un intervalle de* $\bar{R}$ *et* S *une partie dénombrable dense de* T : *soit* $P \in D_{T,S}$; *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Pour tout* $t_0 \in T$, *on a* $\omega_s \to \omega_{t_0}$ *presque sûrement quand* $s \to t_0$ *avec* $s \in S$.

2) P *est univoquement déterminée dans* $D_{T,S}$ *par* $p(P)$.

4. PROPOSITION. — *Soit* T *un intervalle de* $\bar{R}$ *et* S *une partie dénombrable dense de* T. *Soit* $P \in M^+((\bar{R})^T)$ *telle que, pour tout* $t_0 \in T$, *on ait* $\omega_t \to \omega_{t_0}$ *en probabilité quand* $t \to t_0$.

Alors P *est extrémale dans l'ensemble* C(P) *des* $\Pi \in M^+((\bar{R})^T)$ *telles que* $p(\Pi)=p(P)$.

Avant de prouver les deux résultats précédents nous allons préciser les différentes notions de continuité concernant les f.a.r.

5. DÉFINITION. — La notation ω_s sous-entendra que $s \in S$.

Soit $P \in M^+((\bar{R})^T)$; on dira que $P \in D_{T,S}$ est continue presque sûrement en $t \in T$ si on a $\omega_s \to \omega_t$ presque sûrement quand $s \to t$.

On dira que $P \in D_{T,S}$ est presque sûrement à trajectoires continues si pour presque tout ω de $(\bar{R})^T$ la fonction $s \to \omega_s$ se prolonge en une fonction continue sur T.

6. PROPOSITION (dans le cadre de la définition précédente). — *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) P *est continue presque sûrement en* t_0.

(*b*) $(\omega_t)_{t \in T}$ *admet une version séparable qui est continue presque sûrement en* t_0.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(α) P *est presque sûrement à trajectoires continues.*

(β) $(\omega_t)_{t \in T}$ *admet une version séparable dont presque toutes les trajectoires sont continues.*

Lorsque (*a*) *et* (*b*) *sont vérifiées,* (*b*) *l'est aussi pour toute autre version séparable. De même pour* (α) *et* (β).

Preuve. — $(b) \Rightarrow (a)$ est triviale et $(a) \Rightarrow (b)$ résultera du théorème de Doob :

Soit $(\tilde{\omega}_t)_{t \in T}$ une version séparable de $(\omega_t)_{t \in T}$, associée à la partie séparante S; on vérifie que les conditions $|\omega_s - \omega_{t_0}| \leqq \varepsilon$ pour tout s avec

$|s-t_0| \leqq h$ et presque tout ω entraînent $|\tilde{\omega}_t-\omega_{t_0}| \leqq \varepsilon$ pour tout $t\in T$ avec $|t-t_0| \leqq h$ et presque tout ω, puisque $\tilde{\omega}_t \in$ (ensemble des limites de ω_s quand $s \to t$). Pour montrer le même résultat avec une autre partie séparante $\hat{S}$ on introduirait $S \cup \hat{S}$ et les modifications de $(\omega_t)_{t\in T}$ correspondantes.

Pour (α) et (β) même procédé.

Voici maintenant la preuve du théorème 3 :

Preuve. — 1) $\Rightarrow$ 2). On va procéder par étapes. On supposera que $P(1)=1$ et que l'on est sur $[0, 1]^T$, pour simplifier.

(*a*) Soit $\tilde{P}\in D_{T,S}$ telle que $f(\tilde{P})=f(P)$. Soit $t_0\in T$ et K un compact de $\bar{R}$; on note K_n le compact $K_n=(x : d(x, K)\leqq 1/n)$. Soit $\varepsilon_1>0$, il existe n tel que $(\omega_{t_0}\in K) \supset (\omega_{t_0}\in K_n)$ à un ensemble de $\tilde{P}$-mesure $\leqq \varepsilon_1$. On a aussi $(\omega_{t_0}\in K_n) \supset (\omega_{t_0}\in K_n$ et $\omega_s\in K_n,\ s\in I\cap S)$ où I est un intervalle ouvert quelconque de T, contenant t_0. Comme $\tilde{P}\in D_{T,S}$, ce dernier ensemble est égal $\tilde{P}$ presque sûrement à $(\omega_s\in K_n,\ s\in I\cap S)$, qui ne fait intervenir que les coordonnées relatives à S.

On a donc : $(\omega_{t_0}\in K) \supset (\omega_s\in K_n,\ s\in I\cap S)$ à un ensemble de $\tilde{P}$-mesure $\leqq \varepsilon_1$ près.

(*b*) Soit $\mathscr{C}_{t_0}=(\omega\,|\,\omega_s$ converge quand $s\to t_0$ avec $s\in S)$; cet ensemble est mesurable et ne dépend que des coordonnées de S.

Moyennant une petite adaptation du théorème qui énonce que la convergence presque sûre d'une suite de fonctions mesurables entraîne sa convergence presque uniforme on a : pour tout $\varepsilon_2>0$ il existe $E_{\varepsilon_2} \subset \mathscr{C}_{t_0}$, ne dépendant que des coordonnées de S, tel que sur $(E_{\varepsilon_2})^c$, ω_s converge uniformément quand $s\to t_0$ avec $s\in S$ avec $P(E_{\varepsilon_2})=\tilde{P}(E_{\varepsilon_2})\leqq\varepsilon_2$.

On a donc, pour tout $\varepsilon_2>0$ et tout $n>0$, un intervalle I assez petit, contenant t_0 tel que : $(\omega\,|\,\omega_s$ converge si $s\to t_0$, avec $s\in S$ et $\lim(\omega_s)\in K) \subset (\omega_s\in K_n,\ s\in I\cap S)$ à un ensemble ne dépendant que des coordonnées de S près, de mesure $\leqq \varepsilon_2$ pour P ou $\tilde{P}$.

(*c*) Jusqu'ici on n'a pas utilisé le fait que $\omega_s\to\omega_{t_0}$ P presque sûrement quand $s\to t_0$.

D'après (*a*) et (*b*), en utilisant les résultats énoncés à la fin de ces paragraphes, on a :

$$(\omega\,|\,\omega_{t_0}\in K) \supset \mathscr{C}_{t_0} \cap (\omega\,|\,\lim(\omega_s,\ s\to t_0)\in K)$$

$\tilde{P}$-presque sûrement.

En considérant K^c comme un K_σ on a :

$$(\omega\,|\,\omega_{t_0}\in K^c) \supset \mathscr{C}_{t_0} \cap (\omega\,|\,\lim(\omega_s,\ s\to t_0)\in K^c)$$

$\tilde{P}$-presque sûrement.

Utilisons maintenant le fait que $\omega_s\to\omega_{t_0}$ P presque sûrement quand $s\to t_0$: Dans les deux inclusions précédentes les ensembles de droite ne dépendent que des coordonnées de S, la P-probabilité de leur union est 1 (continuité P presque sûre), donc aussi la $\tilde{P}$-probabilité de leur union, puisque $p(\tilde{P})=p(P)$.

Il en résulte que les deux inclusions considérées sont en fait des égalités $\tilde{P}$ presque sûres, et aussi P presque sûres.

On a donc :

$$(\omega \mid \omega_{t_0} \in K) = \mathscr{C}_{t_0} \cap (\omega \mid \lim(\omega_s,\ s \to t_0) \in K)$$

presque sûrement pour $\tilde{P}$ et P (et de même pour K^c).

(*d*) Dans la formule précédente on peut remplacer K par un ensemble borélien B arbitraire. En effet, la classe des ensembles $B \subset \bar{R}$ tels que la formule de la fin de (*c*) soit valable est une tribu.

Pour les intersections ou unions dénombrables c'est évident, pour le passage au complémentaire on utilise le fait que $\mathscr{C}_{t_0}$ est de $\tilde{P}$ probabilité 1.

(*e*) Pour achever de prouver que $\tilde{P}=P$ nous allons prouver que $\tilde{P}=P$ sur tout pavé $(\omega \mid \omega_{t_1} \in B_1) \cap \ldots \cap (\omega \mid \omega_{t_n} \in B_n)$ où les B_i sont des boréliens.

D'après (*d*) on a :

$$(\omega \mid \omega_{t_i} \in B_i) = \mathscr{C}_{t_i} \cap (\omega \mid \lim(\omega_s,\ s \to t_i) \in B_i)$$

presque sûrement pour $\tilde{P}$ et P.

Comme l'ensemble de droite ne dépend que des coordonnées de S, le résultat est obtenu.

2) $\Rightarrow$ 1). On procède par l'absurde; soit $t_0 \in T$ tel que $L_{t_0}(\omega)=\lim^-(\omega_s,\ s \to t_0)$ et $\lambda_{t_0}(\omega)=\underline{\lim}(\omega_s,\ s \to t_0)$ vérifient $L_{t_0} \neq \lambda_{t_0}$ sur une partie non P négligeable. Soit P_{t_0} la projection de P sur $(\bar{R})^{(T\ \ t_0)}$; soit φ_{t_0} l'application de $(\bar{R})^{(T\ \ t_0)}$ dans $(\bar{R})^T$ définie par $(\omega_{t_0})_{t \in (T\ \ t_0)} \rightsquigarrow (\tilde{\omega}_u)_{u \in T}$ avec

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_u = \omega_u & \text{si} \quad u \neq t_0 \\ \tilde{\omega}_{t_0} = L_{t_0}(\omega). \end{cases}$$

Soit $P_L = \varphi_{t_0}(P_{t_0})$; on a $p(P_L)=p(P)$; montrons que $P_L \in D_{T,S}$: soit K un compact de $\bar{R}$; on a $(\omega \mid \omega_{t_0} \in K) = (\omega \mid L_{t_0}(\omega) \in K)$ presque sûrement pour P_L.

Il en résulte que si I est un intervalle ouvert de T, contenant t_0 on a pour tout ω : $(\omega : \omega_s \in K,\ s \in I \cap S)$ entraîne $(\omega_{t_0} \in K)$ presque sûrement pour P_L.

Donc S est bien séparant pour P_L. Comme on peut faire la même construction pour P_λ on voit que P n'est pas univoquement déterminée par $p(P)$ dans $D_{T,S}$.

7. Proposition. — *Soit* T *un intervalle de* $\bar{R}$ *et* S *une partie dénombrable dense de* T*; soit* θ *une probabilité sur* $(\bar{R})^S$*; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe une probabilité* P *sur* $(\bar{R})^T$, *dans* $D_{T,S}$, *continue presque sûrement pour tout* $t \in T$ *(au sens de* 5) *et telle que* $p(P)=\theta$.

2) *Pour tout* $t_0 \notin S$ *les fonctions* ω_s *ont une limite presque sûrement pour* θ, *quand* $s \to t_0$.

Preuve. — 1) $\Rightarrow$ 2) est évident.

2) $\Rightarrow$ 1). Voici la construction de P :

Pour tous $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T \setminus S$ soit $\varphi\, t_1, t_2, \ldots, t_n$ l'application de $(\bar{R})^S$ dans $(\bar{R})^S \cup (\cup t_i)$ définie par :

$$(\omega_s)_{s \in S} \to (\tilde{\omega}_\sigma) \qquad \text{où} \quad \tilde{\omega}_\sigma = \omega_\sigma \qquad \text{si} \quad \sigma \in S$$

et

$$\tilde{\omega}_\sigma = (\lim . \, \omega_s \text{ quand } s \to t_i) \qquad \text{si} \quad \sigma = t_i.$$

On vérifie que la limite projective des $\varphi\, t_1, t_2, \ldots, t_n(\theta)$ convient.

Voici maintenant la preuve de la proposition 4 :

Preuve. — Soit $\tilde{P} \leqq P$ où $\tilde{P} \in M^+((\bar{R})^T)$; on va voir d'abord que $\tilde{P}$ est déterminée univoquement par $p(\tilde{P})$: comme $\tilde{P} \leqq P$ on a $\omega_s \to \omega_{t_0}$ en $\tilde{P}$ probabilité pour tout t_0 quand $s \to t_0$. Pour tout n entier on a $\omega_{s,n} \to \omega_{t_0,n}$ dans $L^1(\tilde{P})$, où $\omega_{t,n}$ désigne ω_t tronquée par $\pm n$. Le treillis de $\mathscr{C}((\bar{R})^S)$ engendrée par les $\omega_{s,n}$ et les constantes est dense dans $\mathscr{C}((\bar{R})^S)$ d'après le théorème de Stone-Weierstrass. Ce treillis est donc dense dans $\mathscr{C}((\bar{R}^T))$ d'après ce qui précède pour la norme de $L^1(\tilde{P})$. Donc $\tilde{P}$ est bien déterminée par $p(\tilde{P})$.

Montrons que cela permet de conclure :

Si $P = (P_1 + P_2)/2$ avec $P_1, P_2 \in C(P)$ alors on a $P_1, P_2 \leqq 2P$ donc $P_1 = P_2 = P$ d'après ce qui précède puisque $p(P_1) = p(P_2) = p(P)$.

Voici un exemple ou les hypothèses étudiées précédemment ne sont pas réunies :

8. Proposition. — *Soit* N *la face de* $M^+((\bar{R})^S)$ *formée des* λ *telles que :* $\forall K$ *compact de* $\bar{R}$, *avec* $K \neq \bar{R}$ *et* $\forall I \subset T$ *intervalle ouvert on ait :*

$$\lambda(A_{K,I}) = 0 \qquad \text{où} \quad A_{K,I} = \{\omega \mid \omega_s \in K, \ \forall s \in I \cap S\}$$

Alors toute $\mu \in M^+((\bar{R})^T)$ *telle que* $p(\mu) \in N$ *est élément de* $D_{T,S}$, *avec* $\Omega = (\bar{R})^T$ *et* $X_t(\omega) = \omega_t$.

Preuve. — Il est clair que N est une face. Montrons que $\mu \in D_{T,S}$: lorsque $K = \bar{R}$, il n'y a rien à vérifier. Lorsque $K \neq \bar{R}$, on raisonne comme dans la preuve de la proposition 2 : on a bien $\mu(A_{K,I,t}) = 0$ pour tout $t \in T$, puisque $p(\mu)(A_{K,I}) = 0$ et que $A_{K,I,T} \subset A_{K,I}$.

9. *Remarques.* — (*a*) La propriété précédente montre que μ n'est pas univoquement déterminée dans $D_{T,S}$ par $p(\mu)$.

(*b*) N n'est pas réduite à (0); soit θ une probabilité sur $\bar{R}$, chargeant tout ouvert non vide; on voit que $\lambda = \bigotimes_{s \in S} \theta_s$, où $\theta_s = \theta$ est portée par le s-ième facteur de $(\bar{R})^S$, est élément de N.

(*c*) [Avec les notations de (*b*)] : soit T un intervalle de $\bar{R}$. Soit $\mu = \bigotimes_{t \in T} \theta_t$, où $\theta_t = \theta$ est portée par le t-ième facteur de $(\bar{R})^T$; alors pour toute partie dénombrable S de T, dense dans T, on a $\mu \in D_{T,S}$ et, d'après (*b*), μ n'est pas univoquement déterminée dans $D_{T,S}$ par $p(\mu)$.

(*d*) L'intérêt de considérer $M^+(\bar{R}^S)$ est que $\bar{R}^S$ est métrisable.

Pour terminer nous allons donner quelques propriétés des faces de mesures en nous plaçant dans un cadre très général et abstrait.

10. DÉFINITION. — Soient X et Y deux espaces compacts, f une application continue de X dans Y; on dit que λ, $\mu \in M(X)$ sont équivalentes, et on note $\lambda \sim \mu$ si $f(\lambda)=f(\mu)$. Si $\mu \in M^+(X)$, on pose $C(\mu)=\{\nu : \nu \geqq 0, \nu \sim \mu\}$.

Dans tout ce qui précède on avait $X=(\bar{R})^T$ et $Y=(\bar{R})^S$ et $f=p$.

11. PROPOSITION. — *Soit* F *une face de* $M^+(X)$; *alors l'ensemble* $f(F)$ *est une face de* $M^+(Y)$.

Preuve. — Soit $\lambda \in F$ et $\mu=f(\lambda)$; si $\nu \in M^+(Y)$ et $\nu \leqq \mu$ montrons que $\nu \in f(F)$.

D'après le théorème de Radon-Nikodym on a $\nu=u.\mu$ où $u \geqq 0$ est bornée et mesurable pour la tribu de Baire de Y. Montrons que $\nu'=u \circ f \lambda$ vérifie $f(\nu')=\nu$; si $\varphi \in \mathscr{C}(Y)$, on a :

$$f(\nu')(\varphi)=\int_X \varphi \circ f d\nu'=\int_X \varphi \circ f . u \circ f d\lambda=\int_X (\varphi \times u) \circ f d\lambda=\int_Y \varphi . u d\mu,$$

puisque u est mesurable pour la tribu de Baire de Y.

D'où le résultat puisque $\int_Y \varphi . u d\mu=\int_Y \varphi d\nu$.

Le lemme suivant a été utilisé et démontré implicitement lors de la preuve de la proposition 4.

12. LEMME. — *Soit* F *une face de* $M^+(X)$. *Si* $\mu \in F$ *est le seul élément* ν *de* F *vérifiant* $f(\nu)=f(\mu)$, *alors* μ *est un point extrémal de l'ensemble* $C(\mu)$.

Preuve. — Si on a $\mu=\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$ avec $\mu_1, \mu_2 \geqq 0$ et $f(\mu_1)=f(\mu_2)=f(\mu)$ alors $\mu_1, \mu_2 \in F$ et d'après l'hypothèse faite sur μ et F on a $\mu_1=\mu_2=\mu$. D'où le résultat.

Plus généralement nous pouvons énoncer la proposition suivante qui est une reformulation, adaptée à notre cadre, d'un résultat de R. G. Douglas [1].

13. PROPOSITION. — *Soit* $\mu \in M^+(X)$; *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) μ *est point extrémal de* $C(\mu)$.

(*b*) *L'espace* $E=\{\varphi \circ f : \varphi \in \mathscr{C}(y)\}$ *est dense dans* $L^1(\mu)$.

(*c*) *L'application* $\lambda \rightsquigarrow f(\lambda)$ *est injective, si on la restreint à la face* F_μ *de* $M^+(X)$, *engendrée par* μ.

Preuve. — $(b) \Rightarrow (a)$ par l'absurde.

On a $\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ avec $\mu_1, \mu_2 \in C(\mu)$ et $\mu_1 \neq \mu_2$ d'où $\mu_1 = g_1 \mu$ et $\mu_2 = g_2 \mu$ avec $g_1, g_2 \geqq 0$ et $g_1 + g_2 = 2$ et $g_1 \not\equiv 1$.

On a

$$\int_X \varphi \circ f d\mu = \int_X \varphi \circ f g_1 \, d\mu \qquad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathscr{C}(Y)$$

ou

$$\int_X \varphi \circ f (1 - g_1) \, d\mu = 0 \qquad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathscr{C}(Y),$$

donc, comme $(1 - g_1) \neq 0$, on voit que E n'est pas dense dans $\mathscr{C}(X)$ pour la norme de $L^1(\mu)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ par l'absurde, si $\bar{E} \neq L^1(\mu)$ il existe $g \in L^\infty(\mu)$ telle que :

$$\int_X \varphi \circ f . g \, d\mu = 0 \qquad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathscr{C}(Y), \qquad \text{et} \qquad g \not\equiv 0;$$

on a $-A \leqq g \leqq A$.

Posons $\mu_1 = \frac{(A-g)\mu}{A}$ et $\mu_2 = \frac{(A+g)\mu}{A}$; on a $\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ et $\mu_1, \mu_2 \in C(\mu)$. Comme $g \not\equiv 0$ on a $\mu_1 \neq \mu_2$. D'où le résultat.

Pour terminer, montrons que (b) et (c) sont équivalents : (non c) équivaut à l'existence de

$$g_1, g_2 \in L^\infty_+(\mu) \qquad \text{avec} \quad g_1 - g_2 \not\equiv 0$$

et

$$\int_X \varphi \circ f g_1 \, d\mu = \int_X \varphi \circ f g_2 \, d\mu \qquad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathscr{C}(Y),$$

cette égalité peut s'écrire aussi

$$\int_X \varphi \circ f (g_1 - g_2) \, d\mu = 0;$$

sous cette forme elle est équivalente à (non b).

RÉFÉRENCES

[1] R. G. DOUGLAS, On Extremal Measures and Subspace Density I, *Michigan Math. Journal*, vol. **11**, 1964, p. 243-246.

[2] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris, 1964.

(*Manuscrit reçu le* 11 *avril* 1988)
(*corrigé le* 6 *octobre* 1988.)