

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ÉMILE LE PAGE

Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, n° 2 (1989), p. 109-142

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_2_109_0

© Gauthier-Villars, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications

par

Émile LE PAGE

I.R.M.A.R., Institut de Recherche Mathématiques,
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

RÉSUMÉ. — On établit des propriétés de régularité (Hölder, C^∞) du plus grand exposant caractéristique d'un produit de matrices aléatoires indépendantes. On en déduit des propriétés analogues pour la répartition d'état dans le modèle d'Anderson de dimension 1.

Mots clés : Matrices aléatoires, exposants caractéristiques, densité d'état.

ABSTRACT. — We prove regularity properties (Hölder, C^∞) for the first characteristic exponent of a product of independent random matrices. We deduce the same properties for the integrated density in the one dimensional Anderson model.

Key words : Random matrices, characteristic exponents, density of states.

On considère un espace produit $\Omega = X^{\mathbb{N}}$ muni d'une probabilité produit $\mathbb{P}$ et $(\lambda, \omega) \rightarrow g^\lambda(\omega)$ une fonction de $\mathbb{R} \times \Omega$ dans le groupe $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices $d \times d$ inversibles (resp. dans $SL(d, \mathbb{R})$ sous-groupe de $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1) dépendant uniquement de la première coordonnée de ω .

Classification A.M.S. : 60 B 99, 60 F 99, 60 J 15, 60 K 99.

Notons de plus μ_λ la loi de la variable aléatoire g^λ et supposons que les probabilités μ_λ admettent des moments exponentiels. Soit $(g_k^\lambda(\cdot))_{k \geq 1}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes et de même loi μ_λ et $\gamma(\lambda)$ le plus grand exposant caractéristique associé à la suite précédente, c'est-à-dire : [5]

$$\gamma(\lambda) = \lim_n \frac{1}{n} \text{Log} \|g_n^\lambda g_{n-1}^\lambda \dots g_1^\lambda\|, \quad \mathbb{P} \text{ p. s.}$$

On s'intéresse ici aux propriétés de régularité de la fonction $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$.

On envisage tout d'abord l'étude des propriétés de Hölder de $\gamma(\lambda)$ sans hypothèse de densité pour la loi μ_λ : si I est un intervalle fermé tel que pour $\lambda, \mu \in I$, on a

$$\mathbb{P} \text{ p. s.}, \quad \|g^\lambda(\omega) - g^\mu(\omega)\| \leq C(\omega) |\lambda - \mu|^\varepsilon(I)$$

et

$$\int C^{\varepsilon(I)}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < +\infty \quad \text{pour un } \varepsilon(I) > 0,$$

alors $\gamma(\cdot)$ est höldérienne sur I .

Ce résultat ne peut être amélioré comme le montre l'exemple suivant, dû à Halperin, et qui apparaît dans le contexte des opérateurs de Schrödinger à potentiel aléatoire [17]. On prend

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\{q_n, n \geq 0\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi prenant les valeurs a ou b avec probabilité $1/2$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe a, b tels que $\gamma(\lambda)$ n'est pas höldérienne d'exposant ε sur $I = \{a, b\} + [-2, 2]$. En particulier $\gamma(\lambda)$ n'est pas C^1 .

On envisage ensuite les propriétés de dérivabilité de $\gamma(\lambda)$: en supposant que les lois μ_λ ont des densités et que l'application $\lambda \rightarrow g^\lambda$ est analytique de $\mathbb{R}$ dans tous les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ $p \geq 1$ où $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles $d \times d$, on prouve que $\gamma(\lambda)$ est C^∞ . L'exemple de Halperin montre également que $\gamma(\lambda)$ n'est pas analytique sur $\mathbb{R}$.

Les résultats précédents sont à comparer à ceux de Ruelle [16] qui obtient des propriétés d'analyticité dans le cadre de produits de matrices positives stationnaires.

Pour d'autres résultats concernant les exposants caractéristiques, on peut également consulter [6] et [9].

Les théorèmes précédents trouvent leur application dans l'étude de la régularité de la répartition d'état d'un opérateur de Schrödinger aléatoire unidimensionnel : problème posé ici par Wegner [18], F. Wegner, « Bounds on the density of States in Disordered Systems » 2, Phys B 44,9 (1581) et qui est ici traité dans le théorème 3.

Plus précisément soit $(q_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi η . On considère l'opérateur aux différences aléatoires sur $l^2(\mathbb{Z})$ analogue discret de Schrödinger défini par

$$(H(\omega)u)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + q_n(\omega)u_n. \quad (1)$$

Notons pour tout $L > 0$ l'opérateur ${}^L H(\omega)$ défini sur $l^2(\mathbb{Z})$ par la restriction de la matrice de $H(\omega)$ à $[-L, L]$, c'est-à-dire par la matrice de Jacobi $(2L+1) \times (2L+1)$

$$({}^L H(\omega))_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ q_n(\omega) & \text{si } i=j=n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$

Soit $N_L(\omega, \lambda)$ la fonction de répartition de la distribution empirique des valeurs propres $(\lambda_i^L(\omega))_{-L \leq i \leq L}$ de la matrice ${}^L H(\omega)$.

$$N_L(\omega, \lambda) = \frac{1}{2L+1} \sum_{i=-L}^L 1_{[\lambda_i^L(\omega) \leq \lambda]}. \quad (3)$$

P.p.s. en ω la suite $N_L(\omega, \lambda)$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ vers la répartition d'état $N(\lambda)$ de H [14].

La formule de Thouless [4] établit une relation entre le plus grand exposant caractéristique $\gamma(\lambda)$ de la suite de matrices aléatoires indépendantes

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad n \geq 0 \quad (4)$$

et la probabilité $dN(\lambda)$:

$$\gamma(\lambda) = \int \text{Log} |\lambda - t| dN(t). \quad (5)$$

Cette relation permet à partir des propriétés de régularité de la fonction $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ d'en déduire pour la fonction $\lambda \rightarrow N(\lambda)$ au moyen de la transformation de Hilbert.

On montre que si η a un moment d'ordre $\alpha > 0$

$$\int |q|^\alpha d\eta(q) < +\infty$$

la répartition d'état $N(\lambda)$ est localement höldérienne sur $\mathbb{R}$. Une preuve de ce résultat avait été donnée par l'auteur dans un article antérieur [11] consacré à l'étude de ces opérateurs aux différences en supposant η à support compact et l'argument avait été repris par Carmona-Klein-Martinelli [3] pour traiter le cas présent. Si η admet une densité dans $L^1(\mathbb{R})$ et si de plus η a des moments de tous ordres on établit que $N(\lambda)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ce résultat étend celui de Simon et Taylor [16] obtenu sous

l'hypothèse où η est à support compact et a une densité dans un espace de Sobolev, $L^1_\alpha(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}); \text{ il existe } g \in L^1(\mathbb{R}) \text{ tel que } \hat{g}(t) = (1+t^2)^{\alpha/2} \hat{f}(t)\}$ avec $\alpha > 0$. Un résultat du même type a été obtenu par Campanino et Klein [2] en supposant que η a des moments de tous ordres et que sa transformée de Fourier $\hat{\eta}(t)$ est telle que $(1+t^2)^\alpha \hat{\eta}(t)$ est bornée pour un $\alpha > 0$. March et Sznitman obtiennent un résultat identique [12]. Les résultats présentés ici montrent (à l'inverse des articles [16], [2], [12]) que les régularités de $\gamma(\lambda)$ et $N(\lambda)$ découlent plutôt de l'aléatoire que la régularité initiale de la loi η et plus généralement des lois μ_λ . La régularité höldérienne de $N(\lambda)$ est utilisée par Carmona-Klein-Martinelli [3] pour la preuve de la localisation de l'opérateur aux différences (1) sur $l^2(\mathbb{Z})$.

Notons également le fait que Craig et Simon [4] ont montré que N est localement Log-höldérienne dans le cas plus général où la suite $\{q_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est supposé ergodique stationnaire.

Les résultats de régularité de l'exposant caractéristique sont obtenus par l'étude des opérateurs

$$P(\lambda) f(\bar{x}) = \int f(g \cdot \bar{x}) \mu_\lambda(dg)$$

où $f \in C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ espace des fonctions continues sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

La preuve du théorème 1 est basée sur le fait que ces opérateurs sont quasi-compacts sur des espaces de fonctions höldériennes convenables, et que l'application $\lambda \rightarrow P(\lambda)$ est localement höldérienne en considérant $P(\lambda)$ comme un opérateur linéaire entre deux tels espaces.

La preuve du théorème 2 est de même basée sur le fait que ces opérateurs sont compacts sur les espaces $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ $k \geq 0$ des fonctions k fois continûment différentiables sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et que l'application $\lambda \rightarrow P(\lambda)$ est différentiable si on considère $P(\lambda)$ comme un opérateur de $C^{k+2}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ dans $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$.

Le présent article est organisé comme suit :

- au paragraphe I on énonce les résultats;
- le paragraphe II est consacré à la preuve du théorème 1;
- au paragraphe III on étudie la classe d'opérateurs suivants :

$$P(f)(\bar{x}) = \int f(g \cdot \bar{x}) d\mu(g)$$

où μ est une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$ (resp. $SL(d, \mathbb{R})$) ayant des moments exponentiels et admettant une densité. On prouve que P est un opérateur compact sur $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ $k \geq 0$. Il en résulte en particulier que l'unique probabilité ν μ -invariante portée par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ admet une densité C^∞ par rapport à la probabilité invariante par rotation portée par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. L'étude

précédente trouve son application dans la preuve du théorème 2 donnée au paragraphe IV.

Enfin la preuve du théorème 3 est donnée au paragraphe V, ainsi que la justification des remarques concernant les propriétés du plus grand exposant caractéristique de la suite

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad n \geq 1.$$

I. NOTATIONS ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

I.1. Avant l'énoncé des résultats commençons par préciser quelques définitions :

Posons pour $g \in GL(d, \mathbb{R})$

$$l(g) = \sup(\|g\|, \|g^{-1}\|)$$

où $\|g\|$ désigne la norme de la matrice g agissant sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$.

DÉFINITION 1. — Une probabilité μ sur $GL(d, \mathbb{R})$ admet des moments exponentiels si pour tout $\tau > 0$

$$\int l^\tau(g) d\mu(g) < +\infty.$$

Pour toute probabilité μ sur $GL(d, \mathbb{R})$ on désigne par T_μ le semi-groupe fermé engendré par le support de μ .

DÉFINITION 2. — T_μ est fortement irréductible s'il n'existe pas de famille finie de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$, invariante par chaque élément de T_μ .

Deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^d$ sont dits équivalents s'ils sont proportionnels. L'espace des classes d'équivalence est l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$, qui est une variété compacte connexe de dimension $d-1$.

Pour $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, $\bar{x}$ désigne sa direction, et pour $M \in GL(d, \mathbb{R})$ on pose $M \cdot \bar{x} = \overline{Mx}$.

Considérons maintenant une suite $(M_n)_{n \geq 1} \in GL(d, \mathbb{R})$ et soient $a_1(M_n) \geq a_2(M_n) \dots \geq a_d(M_n)$ les racines carrées des valeurs propres de la matrice $M_n^t M_n$.

DÉFINITION 3. — La suite $(M_n)_{n \geq 1}$ a une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ si

$$\limsup_n \frac{a_1(M_n)}{a_2(M_n)} = +\infty.$$

Remarquons que si la suite $\{M_n, n \geq 1\}$ satisfait à la propriété précédente, et si m est une probabilité sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ qui n'est pas portée par une sous-variété projective de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ il existe une sous-suite de la suite $\{M_n, m, n \geq 1\}$ qui converge vaguement vers une mesure de Dirac.

DÉFINITION 4. — T_μ a une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ si T_μ contient une suite ayant une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple. — Cette propriété est satisfaite si μ admet une densité [8].

Dans la suite nous envisageons la situation suivante :

soit $(\Omega = X^{\mathbb{N}}, A = \otimes B, \mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ un espace probabilisé produit, U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $(\lambda, \omega) \rightarrow g(\lambda, \omega)$ une application mesurable de $U \times \Omega$ dans $GL(d, \mathbb{R})$ ne dépendant que la première coordonnée de $\omega = (\omega_i)_{i \geq 0}$ c'est-à-dire que

$$g(\lambda, \omega) = g(\lambda, \omega_0).$$

Désignons par μ_λ la loi de la variable aléatoire $\omega \rightarrow g(\lambda, \omega)$ à valeurs dans $GL(d, \mathbb{R})$. La suite de variables aléatoires $\{g_k^\lambda(\omega) = g(\lambda, \omega_k), k \geq 1\}$ est alors une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ_λ .

Supposons que $\int \log l(g) d\mu_\lambda(g) < +\infty$, alors d'après Furstenberg [5], la suite de variables aléatoires

$$\left\{ \frac{1}{n} \log \|g_n(\lambda, \omega) g_{n-1}(\lambda, \omega) \dots g_1(\lambda, \omega)\|, n \geq 1 \right\}$$

converge presque sûrement vers une constante $\gamma(\lambda)$ qui est le premier exposant caractéristique de la suite $(g_k(\lambda, \omega), k \geq 1)$.

Donnons encore une définition avant d'énoncer les deux théorèmes suivants que nous nous proposons d'établir dans cet article.

DÉFINITION 5. — Une fonction f définie dans un ouvert U de $\mathbb{R}$ est localement höldérienne si pour tout compact $T \subset U$ il existe un nombre $\alpha = \alpha(T)$ strictement positif et une constante $c(T)$ tels que :

$$|f(t) - f(s)| \leq c(T) |t - s|^\alpha, \quad t, s \in T.$$

THÉOREME 1. — Si

1) Pour tout $\lambda \in U$ T_{μ_λ} est fortement irréductible et a une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

2) Si de plus pour tout intervalle compact $T \subset U$ les propriétés suivantes sont satisfaites :

2.1) Il existe un réel $\varepsilon(T) > 0$ tel que :

$$\sup_{\lambda \in T} \int l^{\varepsilon(T)}(g^\lambda(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) < +\infty.$$

2.2) Il existe un réel $\varepsilon_1(T) > 0$ et une variable aléatoire $C(\omega)$ à valeurs dans $[1 + \infty[$ telles que :

pour $\lambda, \mu \in T$

$$\|g^\lambda(\omega) - g^\mu(\omega)\| \leq C(\omega) |\lambda - \mu|^{\varepsilon_1(T)}, \quad \mathbb{P} \text{ p. s.}$$

et

$$\int C^{\varepsilon(T)}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < +\infty.$$

Alors l'application $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ est localement höldérienne dans U .

THÉORÈME 2. — On suppose que :

1) Pour tout $\lambda \in U$ μ_λ a des moments exponentiels.

2) Pour tout $\lambda \in U$ μ_λ possède une densité f_λ par rapport à la mesure de Haar dg sur $GL(d, \mathbb{R})$ et que pour tout $p \geq 0$ l'application $\lambda \rightarrow f_\lambda$ de U dans $L^1(GL(d, \mathbb{R}), l^p(g) dg)$ est continue.

3) Pour tout $p \geq 1$ l'application $\lambda \rightarrow g^\lambda$ est analytique de U dans $L^p(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$.

Alors l'application $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ est C^∞ sur U .

Remarques. — 1) Les énoncés précédents restent vrais lorsque l'on remplace le groupe $GL(d, \mathbb{R})$ par le groupe $SL(d, \mathbb{R})$.

2) Dans l'énoncé du théorème 2 il est suffisant qu'une puissance de convolution $\mu_\lambda^{\eta_0}$ de μ_λ satisfasse à l'hypothèse 2.

I.2. Propriétés de régularité de la répartition d'état dans le modèle d'Anderson de dimension 1

On considère l'opérateur aux différences aléatoires sur $l^2(\mathbb{Z})$ défini par :

$$(H(\omega)u)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + q_n(\omega)u_n \quad (1)$$

où $(q_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi η .

Soit $N(\lambda)$ la répartition d'état de H (voir l'introduction pour sa définition). Grâce à la formule de Thouless (5) et à l'aide des théorèmes 1 et 2 précédents on peut obtenir le

THÉORÈME 3. — 1) On suppose que la probabilité η charge au moins 2 points et admet un moment d'ordre $\beta_0 > 0$, c'est-à-dire que $\int |q|^{\beta_0} \eta(dq) < +\infty$ alors la répartition d'état $N(\lambda)$ est localement höldérienne.

2) Si η admet des moments de tous ordres et si de plus la probabilité η admet une densité f dans $L^1(\mathbb{R})$ la répartition d'état est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Commençons par préciser quelques notations.

On munit tout d'abord $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ de la distance δ définie par :

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = [1 - \langle x, y \rangle^2]^{1/2} = \|x \wedge y\| \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \quad (6)$$

où x et y sont des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^d$ de direction $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Introduisons de plus un espace de fonction höldérienne qui nous sera utile par la suite.

DÉFINITION 6. — *Étant donné $\alpha > 0$ on pose pour toute fonction f continue sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$*

$$|f| = \sup_{\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} |f(\bar{x})|$$

et

$$m_\alpha(f) = \sup_{\bar{x} \neq \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \left[\frac{|f(\bar{x}) - f(\bar{y})|}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \right].$$

$\mathcal{L}_\alpha$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|f\|_\alpha = |f| + m_\alpha(f) < +\infty.$$

$\mathcal{L}_\alpha$ est une algèbre de Banach, muni de la norme $\|f\|_\alpha$.

Dans la suite T sera un intervalle compact fixé de U ; de plus μ_λ^n est la n -ième puissance de convolution de la probabilité μ_λ dans $GL(d, \mathbb{R})$.

On a la proposition :

PROPOSITION 1. — *Sous les hypothèses du théorème 1, il existe un $\alpha_0 = \alpha_0(T)$ tel que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0]$ on ait :*

$$\lim_n \sup_{\lambda \in T} \left[\sup_{\bar{x} \neq \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg) \right]^{1/n} = \rho(T, \alpha) < 1.$$

Preuve de la proposition 1. — Soit $M = \{(\bar{x}, \bar{y}); \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \bar{x} \neq \bar{y}\}$. Nous compactifions M en lui adjoignant l'espace $M_{1,2}$ des drapeaux de dimension 2 de $\mathbb{R}^d$ c'est-à-dire l'espace des couples $(V_1; V_2)$ de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ tel que $V_1 \subset V_2$ avec $\dim V_i = i$ $i=1, 2$, et en munissant $\bar{M} = M \cup M_{1,2}$ de la topologie suivante : M est un ouvert de $\bar{M}$ et une suite $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ $n \geq 1$ de M converge vers (V_1, V_2) si $\lim_n \delta(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = 0$ et si $\lim_n (V_1^{(n)}, V_2^{(n)}) = (V_1, V_2)$ où $V_1^{(n)}$ est le sous espace de $\mathbb{R}^d$ de dimension 1 défini par $\bar{x}_n$ et $V_2^{(n)}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ de dimension 2 défini par $\bar{x}_n$ et $\bar{y}_n$.

L'application définie par

$$\sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) = \frac{\delta(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} \quad (7)$$

de $GL(d, \mathbb{R}) \times M$ dans $\mathbb{R}_+$ est un cocycle multiplicatif, c'est-à-dire que

$$\sigma_1(g, h, (\bar{x}, \bar{y})) = \sigma_1(g, h, (\bar{x}, \bar{y})) \sigma_1(h, (\bar{x}, \bar{y})). \quad (8)$$

Il se prolonge par continuité en un cocycle multiplicatif de $GL(d, \mathbb{R}) \times \bar{M}$ dans $\mathbb{R}_+$: pour $g \in GL(d, \mathbb{R})$ (V_1, V_2) $\in M_{1,2}$ on a :

$$\sigma_1[g, (v_1, v_2)] = \frac{\|gv_2\|}{\|gv_1\|^2} \quad (9)$$

où v_1 est un vecteur quelconque de norme 1, définissant V_1 et v_2 est un bivecteur quelconque de norme 1, définissant V_2 .

De plus on a :

$$r_1(g) = \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{M}} \sigma_1[g, (\bar{x}, \bar{y})] \leq l^4(g). \quad (10)$$

Considérons la suite

$$u_n(\alpha) = \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{M} \\ \lambda \in T}} \int \sigma_1^\alpha(g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^n(dg). \quad (11)$$

Cette suite est sous multiplicative et la suite $(u_n(\alpha))^{1/n}$ $n \geq 1$ converge donc vers sa borne inférieure. De l'inégalité

$$e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{|x|} \quad (12)$$

on déduit que pour tout entier $n \geq 1$ et $\alpha > 0$ on a :

$$u_n(\alpha) \leq 1 + \alpha \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{M} \\ \lambda \in T}} \int \text{Log } \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^n(dg) + \frac{\alpha^2}{2} \times \sup_{\lambda \in T} \int \text{Log}^2(l^4(g)) l^{4\alpha}(g) \mu_\lambda^n(dg). \quad (13)$$

Or il existe un entier n_0 tel que

$$\sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{M} \\ \lambda \in T}} \int \text{Log } \sigma_1^\alpha(g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^{n_0}(dg) < 0. \quad (14)$$

Remarquons en effet que la suite

$$\frac{1}{n} \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{M} \\ \lambda \in T}} \int \text{Log } \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^n(dg) \quad (15)$$

a une limite supérieure de la forme

$$\int \text{Log } \sigma_1(g, \xi) \mu_{\lambda_0}(dg) v_{\lambda_0}(d\xi) \quad (16)$$

où $\lambda_0 \in T$ et v_{λ_0} est une probabilité μ_{λ_0} -invariante sur $\bar{M}$. Il résulte de [8] que (16) est strictement négative. La proposition 1 se déduit alors immédiatement de l'inégalité (13).

Il nous reste à justifier la remarque précédente : pour tout $n \geq 1$ la fonction $(\xi, \lambda) \rightarrow \int \text{Log } \sigma_1 [g, \xi] \mu_\lambda^n (dg)$ est continue sur le compact $\bar{M} \times T$, il existe donc un élément $(\xi_n, \lambda_n) \in \bar{M} \times T$ tel que

$$\frac{1}{n} \sup_{\substack{(x, y) \in M \\ \lambda \in T}} \int \text{Log } \sigma_1 (g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^n (dg) = \frac{1}{n} \int \text{Log } \sigma (g, \xi_n) \mu_{\lambda_n}^n (dg). \quad (17)$$

De plus

$$\frac{1}{n} \int \text{Log } \sigma_1 (g, \xi_n) \mu_{\lambda_0}^n (dg) = \int \text{Log } \sigma_1 (g, \xi) \mu_{\lambda_0} (dg) v_n (d\xi) \quad (18)$$

où v_n est la probabilité sur $\bar{M}$ définie par

$$v_n (f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int f (g \cdot \xi_n) \mu_{\lambda_n}^k (dg). \quad (19)$$

La suite de probabilités $\mu_{\lambda_n} \otimes v_n$, $n \geq 1$ sur $GL(d, \mathbb{R}) \times \bar{M}$ est équitendue. Toute valeur d'adhérence de cette suite pour la topologie étroite est de la forme $\mu_t \otimes v_t$, $t \in T$ où v_t est une probabilité sur $\bar{M}$ invariante par μ_t . En particulier on a :

$$\begin{aligned} \limsup_n \frac{1}{n} \int \text{Log } \sigma_1 (g \cdot \xi_n) \mu_{\lambda_n}^n (dg) \\ = \int_{G \times M} \text{Log } \sigma_1 (g \cdot \xi) \mu_{\lambda_0} (dg) v_{\lambda_0} (d\xi). \end{aligned} \quad (20)$$

Reprenant les notations de la proposition 1, nous pouvons maintenant énoncer la

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses du théorème 1 :*

1) *Pour tout $\lambda \in T$ il existe une unique probabilité v_λ μ_λ -invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.*

2) *Pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0(T)$ les opérateurs définis sur $\mathcal{L}_\alpha$ par*

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) f(\bar{x}) &= \int f(\bar{x}) v_\lambda(d\bar{x}) \\ P(\lambda) f(\bar{x}) &= \int f(g \cdot \bar{x}) \mu_\lambda(dg) \end{aligned}$$

sont bornés sur $\mathcal{L}_\alpha$ et l'on a pour tout $n \geq 1$

$$P^n(\lambda) = \pi(\lambda) + Q^n(\lambda)$$

où $Q(\lambda)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}_\alpha$ pour lequel il existe une constante $C(T, \alpha)$ telle que pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{\lambda \in T} \|Q^n(\lambda)\|_\alpha \leq C(T, \alpha) \rho^n(T, \alpha).$$

Preuve de la proposition 2. — Le fait que $P(\lambda)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}_\alpha$ résulte des inégalités :

$$|P(\lambda) f| \leq |f| \quad (21)$$

$$\frac{|P(\lambda) f(\bar{x}) - P(\lambda) f(\bar{y})|}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \leq m_\alpha(f) \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda(dg) \\ \leq m_\alpha(f) \int l^{4\alpha}(g) \mu_\lambda(dg). \quad (22)$$

Par ailleurs on a $\forall m, n \geq 1, f \in \mathcal{L}_\alpha$, puisque $\delta \leq 1$

$$|P^{n+m}(\lambda) f(\bar{x}) - P^n(\lambda) f(\bar{y})| \leq m_\alpha(f) \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in M} \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg). \quad (23)$$

Il en résulte que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_\alpha$ la suite $P^n(\lambda) f, n \geq 1$ converge uniformément vers une limite $v_\lambda(f)$. En raison de la densité de $\mathcal{L}_\alpha$ dans l'espace de Banach $C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ des fonctions continues sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de la convergence uniforme on en déduit qu'il en est de même pour la suite $P^n(\lambda) f, n \geq 1, f \in C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$. On en déduit immédiatement le 1) de la proposition 2 et également que pour $f \in \mathcal{L}_\alpha, n \geq 1, \lambda \in T$

$$|P^n(\lambda) f - \pi(\lambda)(f)| \leq m_\alpha(f) \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg). \quad (24)$$

De plus on a

$$\sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in M} \frac{|(P^n(\lambda) - \pi(\lambda)) f(\bar{x}) - (P^n(\lambda) - \pi(\lambda)) f(\bar{y})|}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \\ \leq m_\alpha(f) \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg). \quad (25)$$

Notant que $P^n(\lambda) - \pi(\lambda) = (P(\lambda) - \pi(\lambda))^n$ puisque

$$P(\lambda) \pi(\lambda) = \pi(\lambda) P(\lambda) = \pi(\lambda) \quad \text{et que} \quad \pi^2(\lambda) = \pi(\lambda)$$

le 2) de la proposition 2 résulte alors de la proposition 1 et des inégalités précédentes.

De la proposition 2 on déduit le corollaire.

COROLLAIRE 1. — *Sous les hypothèses du théorème 1, soit $\alpha \in]0, \alpha_0(T)]$ et $\rho_1[T, \alpha] = 1/2 \{1 + \sup \{\rho(T, \alpha), \rho(T, \alpha/2)\} < 1$.*

1) *Le spectre de l'opérateur $P(\lambda)$ $\lambda \in T$ opérant sur $\mathcal{L}_\alpha$ (resp. $\mathcal{L}_{\alpha/2}$) est contenu dans le compact*

$$E_{\alpha, T} = \{1\} \cup \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho_1(T, \alpha)\}.$$

2) *Pour tout compact K de $\mathbb{C} - E_{\alpha, T}$ on a*

$$\sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in K}} \|(zI - P(\lambda))^{-1}\|_\alpha < +\infty$$

et

$$\sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in K}} \|(zI - P(\lambda))^{-1}\|_{\alpha/2} < +\infty.$$

Preuve du corollaire 1. — Le 1) est immédiat.

D'autre part on a pour $z \in \mathbb{C} - E_{\alpha, T}$

$$(zI - P(\lambda))^{-1} = \frac{\pi(\lambda)}{z-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{Q^n(\lambda)}{z^{n+1}} \quad (26)$$

et

$$\sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in K}} \|(zI - P(\lambda))^{-1}\|_\alpha \leq \sup_{z \in K} \frac{1}{|z-1|} + c(T, \alpha) \sum_{k \geq 0} \frac{\rho^n(T, \alpha)}{\rho^{n+1}(K)} < +\infty \quad (27)$$

où

$$\rho(K) = \sup_{z \in K} \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{\rho_1(T, \alpha)} < \frac{1}{\rho(T, \alpha)}. \quad (28)$$

De même on a l'inégalité

$$\sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in K}} \|[zI - P(\lambda)]^{-1}\|_{\alpha/2} < +\infty. \quad (29)$$

LEMME 1. — *Sous les hypothèses du théorème 1, pour $\alpha \in]0, \alpha_0(T)]$ il existe des constantes $c_1(T, \alpha)$ et $\varepsilon_3(T) > 0$ telles que pour $\lambda, \mu \in T$ $f \in \mathcal{L}_\alpha$ on ait*

$$\|P(\lambda)f - P(\mu)f\|_{\alpha/2} \leq c_1(\alpha, T) \|f\|_\alpha |\mu - \lambda|^{\varepsilon_3(T)}.$$

Preuve du lemme 1. — Pour $f \in \mathcal{L}_\alpha$ $\lambda, \mu \in T$ on a

$$|P(\lambda)f - P(\mu)f| \leq \|f\|_\alpha \sup_{\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \int \delta^\alpha(g^\lambda(\omega) \cdot \bar{x}, g^\mu(\omega) \cdot \bar{x}) d\mathbb{P}(\omega). \quad (30)$$

De plus pour $g, h \in GL(d, \mathbb{R})$, $\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$d(g \cdot \bar{x}, h \cdot \bar{x}) \leq \|g - h\| \inf(\|g\|, \|h\|) \|g^{-1}\| \|h^{-1}\|. \quad (31)$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} & |P(\lambda)f - P(\mu)f| \\ & \leq \|f\|_{\alpha} \int \|g^{\lambda}(\omega) - g^{\mu}(\omega)\|^{\alpha} l^{3\alpha/2}(g^{\lambda}(\omega)) l^{3\alpha/2}(g^{\mu}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \\ & \leq \|f\|_{\alpha} |\mu - \lambda|^{\alpha_{\varepsilon_2}(T)} \int C^{\alpha}(\omega) l^{3\alpha/2}(g^{\lambda}(\omega)) l^{3\alpha/2}(g^{\mu}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega). \end{aligned} \quad (32)$$

D'où l'on déduit par l'inégalité de Hölder que

$$|P(\lambda)f - P(\mu)f| \leq \|f\|_{\alpha} |\mu - \lambda|^{\alpha_{\varepsilon_2}(T)} \times c_1 \quad (33)$$

où

$$c_1 = \left(\int C^{3\alpha}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \right)^{1/3} \left[\sup_{\lambda \in T} \int l^{9\alpha/2}(g^{\lambda}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \right]^{2/3}. \quad (34)$$

Par ailleurs de l'inégalité

$$\frac{\delta(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} \leq l^4(g), \quad g \in GL(d, \mathbb{R}), \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \quad (35)$$

il résulte que pour $\lambda \in T$ on a

$$|P(\lambda)f(\bar{x}) - P(\lambda)f(\bar{y})| \leq m_{\alpha}(f) \delta^{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) c_2 \quad (36)$$

où

$$c_2 = \int l^{4\alpha}(g^{\lambda}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega).$$

On obtient à l'aide de (33) et de (36) que

$$|(P(\lambda) - P(\mu))f(\bar{x}) - (P(\lambda) - P(\mu))f(\bar{y})| \leq \|f\|_{\alpha} \times \max(c_1, c_2) \times \inf\{|\mu - \lambda|^{\alpha_{\varepsilon_2}(T)}, \delta^{\alpha}(\bar{x}, \bar{y})\} \quad (37)$$

d'où

$$m_{\alpha/2}[(P(\lambda) - P(\mu))f] \leq \|f\|_{\alpha} \max(c_1, c_2) |\mu - \lambda|^{\alpha_{\varepsilon_2}(T)/2}. \quad (38)$$

On peut supposer le choix de $\alpha_0(T)$ suffisamment petit pour assurer que les constantes c_1 et c_2 sont finies.

LEMME 2. — Pour $\alpha \in]0, \alpha_0(T)]$ il existe une constante $c_2(\alpha, T)$ telle que pour $f \in \mathcal{L}_{\alpha}$, $\lambda, \mu \in T$ on ait

$$|v_{\lambda}[f] - v_{\mu}[f]| \leq c_2[\alpha, T] |\lambda - \mu|^{\varepsilon_3(T)/2} \|f\|_{\alpha}.$$

Preuve du lemme 2. — Pour $z \in \mathbb{C} - E_{\alpha, T}$ soit

$$R_{\lambda}(z) = (zI - P(\lambda))^{-1} \quad (39)$$

la résolvante de $P(\lambda)$. On a la relation

$$R_{\lambda}(z) - R_{\mu}(z) = R_{\mu}[P(\lambda) - P(\mu)]R_{\lambda}(z). \quad (40)$$

D'autre part il existe un cercle, Γ de centre 1, contenu dans $\mathbb{C} - E_{\alpha, T}$ et l'on a

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R_{\lambda}(z) dz. \quad (41)$$

On en déduit donc d'après le lemme 1 et le corollaire 1 que

$$|v_{\lambda}(f) - v_{\mu}(f)| \leq \rho(\Gamma) c_1(\alpha, T) \times \sup_{\substack{\mu \in T \\ z \in \Gamma}} \|R_{\mu}(z)\|_{\varepsilon_3(T)/2} |\lambda - \mu|^{\varepsilon_3(T)/2} \sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in \Gamma}} \|R_{\lambda}(z)\|_{\alpha} \|f\|_{\alpha} \quad (42)$$

où $\rho(\Gamma)$ désigne le rayon du cercle Γ ce qui établit le lemme 2.

Soit σ le cocycle multiplicatif sur $GL(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$\sigma(g, \bar{x}) = \|g\bar{x}\|, \quad g \in GL(d, \mathbb{R}), \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \quad (43)$$

où x est un vecteur de norme 1, d'image $\bar{x}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Posons

$$\Phi_{\lambda}(\bar{x}) = \int \text{Log } \sigma[g^{\lambda}(\omega), \bar{x}] d\mathbb{P}(\omega). \quad (44)$$

D'après la formule de Fürstenberg on sait que :

$$\gamma(\lambda) = \int_{\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \Phi_{\lambda}(\bar{x}) v_{\lambda}(d\bar{x}) = v_{\lambda}(\Phi_{\lambda}). \quad (45)$$

Grâce à cette formule, au lemme 2 et au lemme 3 qui suit nous pourrons achever la démonstration du théorème 1.

LEMME 3.

- 1) $\sup_{\lambda \in T} \|\Phi_{\lambda}\|_{\alpha} < +\infty$
- 2) Il existe des constantes $c_3(T)$ et $\varepsilon_4(T) > 0$ telles que pour $\lambda, \mu \in T$ on ait

$$\sup_{\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} |\Phi_{\lambda}(\bar{x}) - \Phi_{\mu}(\bar{x})| \leq c_3(T) |\lambda - \mu|^{\varepsilon_4(T)}$$

Preuve du lemme 3.

1° On a tout d'abord

$$\sup_{\lambda \in T} |\Phi_{\lambda}| \leq \sup_{\lambda \in T} \int \text{Log } l(g^{\lambda}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) < +\infty. \quad (46)$$

D'autre part en raison de l'inégalité

$$\left| \text{Log } \frac{x}{y} \right| \leq c(\alpha) \text{Inf}[u(x, y), u^{2/4}(x, y)] \quad (47)$$

où

$$x, y > 0, \quad u(x, y) = \frac{|x - y|}{\text{Inf}(x, y)}$$

on a

$$|\Phi_\lambda(\bar{x}) - \Phi_\lambda(\bar{y})| \leq c(\alpha) \int \text{Inf} \{l^2(g^\lambda(\omega)) \|x - y\|, l^{\alpha/2}(g^\lambda(\omega)) \|x - y\|^{\alpha/4}\} d\mathbb{P}(\omega). \quad (48)$$

où x, y sont deux vecteurs de norme 1, d'image $\bar{x}, \bar{y}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et tels que l'angle de x et y soit inférieur à $\pi/2$.

En raison des inégalités

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \|x - y\| \quad (49)$$

et

$$\text{Inf}(u, v) \leq u^\alpha v^{1-\alpha} \quad (50)$$

il vient alors

$$\sup_{\lambda \in T} m_\alpha(\Phi_\lambda) \leq c(\alpha) (\sqrt{2})^{\alpha/4(5-\alpha)} \sup_{\lambda \in T} \int l^{\alpha(3\alpha+1)/2}(g^\lambda(\omega)) d\mathbb{P}(\omega). \quad (51)$$

Un choix de $\alpha_0(T)$ suffisamment petit c'est-à-dire tel que $(\alpha/2)(3\alpha+1) < \varepsilon_1(T)$ assure que le second membre de (51) est fini et la démonstration du 1) du lemme 3 est ainsi obtenue à l'aide de (46) et de (51).

2) En utilisant à nouveau l'inégalité (47) il vient, pour $\lambda, \mu \in T$ $\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$

$$|\Phi_\lambda(\bar{x}) - \Phi_\mu(\bar{x})| \leq c(\alpha) \int \text{Inf}(A_{\lambda, \mu}(\omega), A_{\lambda, \mu}^{\alpha/4}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \quad (52)$$

où

$$A_{\lambda, \mu}(\omega) = \|g^\lambda(\omega) - g^\mu(\omega)\| \text{Inf}[l(g^\lambda(\omega)), l(g^\mu(\omega))]. \quad (53)$$

D'après (50) on a donc

$$|\Phi_\lambda(\bar{x}) - \Phi_\mu(\bar{x})| \leq c(\alpha) |\lambda - \mu|^{\alpha/4(5-\alpha)} \times c_3(T) \quad (54)$$

où

$$c_3(T) = \sup_{\lambda, \mu \in T} \int c^{\alpha/4(5-\alpha)}(\omega) \{\text{Inf}(l(g^\lambda(\omega)), l(g^\mu(\omega)))\}^{\alpha/4(5-\alpha)} d\mathbb{P}(\omega). \quad (55)$$

La constante $c_3(T)$ est finie pour un choix suffisamment petit de $\alpha_0(T)$ en raison des hypothèses du théorème 1.

La démonstration du lemme 3 est ainsi achevée.

La preuve du théorème se termine maintenant facilement en décomposant $\gamma(\lambda) - \gamma(\mu)$ sous la forme

$$\gamma(\lambda) - \gamma(\mu) = \int [\Phi_\lambda(\bar{x}) - \Phi_\mu(\bar{x})] v_\lambda(d\bar{x}) + \int \Phi_\mu(\bar{x}) [v_\lambda(d\bar{x}) - v_\mu(d\bar{x})] \quad (56)$$

et en utilisant les résultats des lemmes 2 et 3.

III. ÉTUDE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS

Désignons par :

$K = O(d)$ le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^d$;

$A =$ le sous-groupe de $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices diagonales à coefficients positifs;

$N =$ le sous-groupe de $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures ayant des coefficients diagonaux égaux à 1.

Rappelons que l'on a la décomposition d'Iwasawa : l'application qui au triplet $(k, a, n) \in K \times A \times N$ associe le produit kan est un isomorphisme de variétés analytiques de $K \times A \times N$ sur $GL(d, \mathbb{R})$.

Pour $g \in GL(d, \mathbb{R})$ nous écrivons $g = k(g)a(g)n(g)$, $k(g) \in K$, $a(g) \in A$, $n(g) \in N$.

La décomposition précédente induit une action du groupe $GL(d, \mathbb{R})$ sur K en posant :

$$g \cdot k_1 = k[gh_1], \quad g \in GL(d, \mathbb{R}), \quad k_1 \in K. \quad (57)$$

On a d'autre part le

LEMME 4. — *Tout cocycle multiplicatif ρ continu de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ K-invariant à gauche [i.e. tel que $\forall k, k' \in K, g \in GL(d, \mathbb{R})$ on ait $\rho(k'g, k) = \rho(g, k)$] s'écrit*

$$\rho[g, k] = \chi[a(gk)] \quad (58)$$

où χ est un caractère continu de A dans $\mathbb{C} - \{0\}$.

Preuve du lemme 4. — En raison de la relation

$$a(gg'k) = a(gg' \cdot k)a(g'k), \quad g, g' \in GL(d, \mathbb{R}), \quad k \in K \quad (59)$$

il est clair que (58) définit un cocycle multiplicatif de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$, K-invariant à gauche.

Réciproquement si ρ est un cocycle multiplicatif sur $G \times K$ et K-invariant à gauche on a

$$\rho(g, k) = \rho(gk, I) \quad (60)$$

et donc ce cocycle est défini par la fonction $\rho(s, I)$, $s \in S = AN$ qui est un caractère du groupe S car pour tout $s \in S$ on a $s \cdot I = I$. Un tel caractère envoie N sur 1 et donc est défini par un caractère de A , ce qui justifie la relation (58).

Remarque. — Il résulte du lemme qui précède que tout cocycle multiplicatif de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ continu K-invariant à gauche est analytique sur $G \times K$, car tout caractère continu de A dans $\mathbb{C} - \{0\}$ est analytique sur A .

Dans la suite μ désignera une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$ ayant des moments exponentiels, et ρ un cocycle continu multiplicatif de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$, K-invariant à gauche.

$C^p(K)$ est l'espace de Banach des fonctions p fois continûment dérivables de K dans $\mathbb{C}$.

Nous nous proposons d'étudier l'opérateur P_p défini sur $C^p(K)$ $p \geq 0$ par

$$P_p f(k) = \int \rho(g^{-1}, k) f(g^{-1} \cdot k) \mu(dg), \quad f \in C^p(K) \quad (61)$$

on a le

THÉORÈME 4. — Soit μ une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$, ayant des moments exponentiels, et absolument continue par rapport à la mesure de Haar de $GL(d, \mathbb{R})$, alors l'opérateur P_p est un opérateur compact sur $C^p(K)$, $p \geq 0$.

Preuve du théorème 4. — L'algèbre de Lie $\mathcal{X}$ des champs de vecteurs invariants à gauche sur K s'identifie à l'ensemble des matrices réelles antisymétriques $\mathcal{O}(d)$: si f est une fonction continûment dérivable au voisinage d'un point $k \in K$, et $X \in \mathcal{O}(d)$. On a

$$Xf(k) = \frac{d}{dt} \{f(k \exp tX)\}_{t=0} \quad (62)$$

où $\exp tX$ désigne l'exponentielle de la matrice tX . Soit $E_{i,j}$ la matrice $d \times d$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui se trouvant à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui est égal à 1. Les matrices $(X_{i,j})_{j > i} = E_{i,j} - E_{j,i}$ forment une base de dimension $d(d-1)/2$ de $\mathcal{O}(d)$. Soient $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l$ des indices multiples où $\alpha_m \in \{(i,j)/d \geq j > i \geq 1\}$. On pose $X_\alpha = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_l}$ et $|\alpha| = l$.

On munit $C^p(K)$ d'une structure d'espace de Banach à l'aide de la norme

$$\|f\|_p = \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{k \in K} |X_\alpha f(k)|. \quad (63)$$

La formule

$$\rho(g) f(k) = \sigma(g^{-1}, k) f(g^{-1} \cdot k), \quad g \in GL(d, \mathbb{R}), f \in C^p(K), k \in K \quad (64)$$

définit une représentation de $GL(d, \mathbb{R})$ dans $C^p(K)$ telle que l'application $(g, f) \rightarrow \rho(g) f$ est continue de $G \times C^p(K)$ dans $C^p(K)$. La fonction

$$\|\rho(g)\|_p = \sup_{\|f\|_p=1} \|\rho(g) f\|_p \quad (65)$$

est sous additive et localement bornée; on a donc [7]:

$\int \|\rho(g)\|_p d\mu(g) < +\infty$, et puisque

$$\|P_p f\|_p \leq \int \|\rho(g)\|_p d\mu(g) \times \|f\|_p \quad (66)$$

P_p opère sur $C^p(K)$.

Montrons maintenant que P_p est un opérateur compact sur $C^p(K)$. Pour cela considérons une partie bornée B de $C^p(K)$ et montrons que pour tout opérateur différentiel D invariant à gauche sur K et de degré inférieur ou égal à p l'ensemble $\{D(P_p f); f \in B\}$ est une partie équicontinue de $C(K)$. Le théorème d'Arzela-Ascoli permet alors de conclure que $P_p(B)$ est une partie compacte de $C^p(K)$. Désignons par R (resp. L) la représentation de K dans $C^p(K)$ définie par

$$R(k') f(k) = f(kk') \quad [\text{resp. } L(k') f(k) = f(k'^{-1}k)]. \quad (67)$$

Pour tout opérateur différentiel Δ de degré $j \leq p$ c'est-à-dire de la forme

$$\Delta = \sum_{|a| \leq j} a_\alpha X_\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}$$

invariant à gauche sur K , $R(\Delta)$ est un opérateur borné de $C^j(K)$ dans $C(K)$ de norme $\|R(\Delta)\|_{j,0}$ et l'on a

$$\|R(\Delta) \rho(g) f\|_0 \leq \|R(\Delta)\|_{j,0} \|\rho(g)\|_j \|f\|_j. \quad (68)$$

De plus l'application $(g, k) \rightarrow R(\Delta) \rho(g) f(k)$ est continue sur $G \times K$. On en conclut en raisonnant par récurrence sur le degré de Δ que

$$\Delta(P_p f)(k) = \int R(\Delta) [\rho(g) f](k) d\mu(g) \quad (69)$$

car pour tout $l \geq 0$ $\int \|\rho(g)\|_l d\mu(g) < +\infty$.

De plus on a pour tout $k \in K$

$$L(k^{-1}) R(\Delta) = R(\Delta) L(k^{-1}) \quad (70)$$

et

$$L(k^{-1}) \rho(g) = \rho(k^{-1}g) \quad (71)$$

et donc en supposant que

$$d\mu(g) = \Phi(g) dg \quad (72)$$

où dg est la mesure de Haar sur $GL(d, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Delta(P_p f)(k) &= \int R(\Delta) [\rho(k^{-1}g)](f)(e) \Phi(g) dg \\ &= \int R(\Delta) \rho(g)(f)(e) \Phi(kg) dg. \end{aligned} \quad (73)$$

Pour tous $k, k' \in K$ on a

$$\begin{aligned} &|\Delta[P_p f](k'k) - \Delta[P_p f](k)| \\ &\leq \int |R(\Delta) \rho[k^{-1}g] f(e)| |\Phi(k'g) - \Phi(g)| dg. \end{aligned} \quad (74)$$

Comme

$$|\mathbf{R}(\Delta) \rho[k^{-1}g] f(e)| \leq \|\mathbf{R}(\Delta)\|_{j,0} \sup_{k \in K} \|\rho(k^{-1})\|_j \|\rho(g)\|_j \|f\|_j \quad (75)$$

on a donc

$$\begin{aligned} \sup_{k \in K} |\Delta[\mathbf{P}_\rho f](k'k) - \Delta[\mathbf{P}_\rho f](k)| &\leq \|\mathbf{R}(\Delta)\|_{i,0} \sup_{k \in K} \|\rho(k^{-1})\|_i \\ &\times \int_G \|\rho(g)\|_i |\Phi(k'g) - \Phi(g)| dg \times \|f\|_i. \end{aligned} \quad (76)$$

L'intégrale du second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro quand k' tend vers l'identité : ceci est évident lorsque Φ est continue et à support compact, et s'obtient dans le cas général en approchant Φ dans $L^1(\|\rho(g)\|_j dg)$ par des fonctions du type précédent. La conclusion souhaitée résulte alors immédiatement de l'inégalité (76).

COROLLAIRE 1. — Soit μ une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$ admettant des moments exponentiels et absolument continue par rapport à la mesure de Haar de $GL(d, \mathbb{R})$. Il existe alors une unique probabilité μ -invariante portée par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Cette probabilité est absolument continue par rapport à la probabilité m K -invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et admet une densité C^∞ par rapport à m .

Preuve du corollaire 1. — La première assertion de ce corollaire se justifie comme le 1) de la proposition 2 car T_μ a une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Considérons le cocycle multiplicatif de $GL(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}_+$ défini par

$$\sigma_2(g, \bar{x}) = \frac{1}{\|gx\|^d} \quad (77)$$

où $x \in \mathbb{R}^d$ est tel que $\|x\| = 1$ et a pour image $\bar{x}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\sigma_2(g, \bar{x}) = \frac{dg^{-1}m}{dm}(\bar{x}). \quad (78)$$

Remarquons de plus que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d) = \{k \cdot \bar{e}_1, k \in O(d)\}$ et que la formule

$$\tilde{\sigma}_2(g, k) = \sigma_2(g, k \cdot \bar{e}_1) \quad (79)$$

définit un cocycle multiplicatif continu, K -invariant à gauche de $GL(d, \mathbb{R}) \times K$ dans $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème précédent l'opérateur $P_{\tilde{\sigma}_2}$ est compact sur $C^p(K)$ $p \geq 0$; il en est donc de même de l'opérateur $P(\sigma_2)$ sur $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ où

$$\begin{aligned} P(\sigma_2) f(\bar{x}) &= \int \sigma_2(g^{-1}, \bar{x}) f(g^{-1} \cdot \bar{x}) d\mu(g), \\ f &\in C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)), \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (80)$$

Fixons-nous un entier $p_0 \geq 1$. Le rayon spectral de $P(\sigma_2)$ sur l'espace $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ est égal à 1. En effet tout d'abord l'application de $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ dans $\mathbb{C}f \rightarrow m(f)$ est une forme linéaire continue sur $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ et de plus

$$m(P(\sigma_2) f) = m(f), \quad f \in C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)). \quad (81)$$

Par ailleurs $P(\sigma_2)$ n'admet pas de valeur propre sur $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ de module strictement supérieur à 1. En effet s'il existait une telle valeur propre λ et une fonction propre φ non nulle on aurait :

$$m(|\varphi|) \geq m(P(\sigma_2) |\varphi|) \geq |\lambda| m(|\varphi|) \quad (82)$$

ce qui est impossible.

Les deux remarques précédentes permettent de conclure, en raison de la compacité de l'opérateur $P(\sigma_2)$.

La suite $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(\sigma_2)(1) n \geq 1$ converge alors dans $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ vers une fonction φ , et l'on a de plus $m(\varphi) = 1$. Le raisonnement précédent étant valide pour tout $p_0 \geq 1$ on en conclut que φ est infiniment dérivable sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

La fonction φ satisfait de plus à l'égalité :

$$P(\sigma_2) \varphi = \varphi. \quad (83)$$

Pour toutes fonctions $f, h \in C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ on a

$$\int P f(\bar{x}) h(\bar{x}) dm(\bar{x}) = \int f(\bar{y}) P(\sigma_2) h(\bar{y}) dm(\bar{y}) \quad (84)$$

d'où en particulier

$$\int P f(\bar{x}) \varphi(\bar{x}) dm(\bar{x}) = \int f(\bar{y}) \varphi(\bar{y}) dm(\bar{y}) \quad (85)$$

ce qui établit que $\varphi \cdot m$ est une probabilité μ -invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Cette probabilité est unique et elle admet donc une densité C^∞ par rapport à m .

IV. PREUVE DU THÉORÈME

L'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ s'identifie à l'espace homogène K/K_1 de K , K_1 désignant le sous-groupe fermé de K formé des matrices réelles $d \times d$ orthogonales et telles que la première colonne a tous ses coefficients nuls sauf le premier qui est égal à ± 1 . L'espace $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ des fonctions p fois continûment différentiables sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ s'identifie alors au sous-espace de Banach de $C^p(K)$ formé des fonctions p fois continûment différentiables

sur K et K_1 -invariante à droite. Compte tenu du théorème 4 $P(\lambda)$ est un opérateur compact sur $C^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \geq 0$. De la proposition 2 il résulte que le spectre de l'opérateur $P(\lambda)$ $\lambda \in T$ sur $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ est contenu dans

$$E_{\alpha(T), T} = \{1\} \cup \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho_1(T, \alpha_0(T)) < 1\}.$$

Pour $\lambda \in T$, $z \in \mathbb{C} - E_{\alpha(T), T}$ et $f \in C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ on note

$$R_\lambda(z) f = (zI - P(\lambda))^{-1}(f) \in C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)), \quad p \geq 0.$$

Soit Γ un cercle de centre 1 contenu dans $\mathbb{C} - E_{\alpha(T), T}$. On a alors comme dans la preuve du théorème 1.

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R_\lambda(z) [\Phi_\lambda](\bar{x}) dz \quad (86)$$

pour $\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in T$.

Commençons par établir la

PROPOSITION 3. — Soit ρ un cocycle multiplicatif continu de $GL(d, \mathbb{R}) \times K$ dans $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ et K -invariant à gauche.

Alors ρ est analytique dans $GL(d, \mathbb{R}) \times K$, de plus sous les hypothèses du théorème 2 la fonction

$$\phi_\lambda(k) = \int \text{Log } \rho[g^\lambda(\omega), k] d\mathbb{P}(\omega) \quad (87)$$

est C^∞ sur $U \times K$.

COROLLAIRE 2. — Sous les hypothèses du théorème 2

$$(\lambda, \bar{x}) \rightarrow \Phi_\lambda(\bar{x}) = \int \text{Log } \sigma[g^\lambda(\omega), \bar{x}] d\mathbb{P}(\omega) \quad (88)$$

est C^∞ sur $U \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration de la proposition 3. — L'analyticité de ρ résulte du lemme 4 et de la remarque qui suit.

D'autre part désignons par $\mathbb{G}$ l'algèbre de Lie de $GL(d, \mathbb{R})$ c'est-à-dire l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche sur $GL(d, \mathbb{R})$. $\mathbb{G}$ s'identifie à $\mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ de la façon suivante : pour $X \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ et f dérivable sur G on définit

$$Xf(g) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g \exp tX) - f(g)}{t} \quad (89)$$

$\exp$ désignant ici l'exponentielle de la matrice tX .

Le lemme suivant sera utile à la preuve de la proposition 3.

LEMME 5. — Pour toute fonction $\Phi \in C^{p+k}(\mathbb{K})$, $k \geq 0$, $p \geq 0$ il existe une fonction

$$\varphi_{p,k}(\cdot) \in \bigcap_{k \geq 1} L^k(\Omega, \mathbb{P})$$

telle que

$$\sup_{\lambda \in T} \left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} [\rho(g^\lambda(\omega), \cdot) \Phi(g^\lambda(\omega) \cdot)] \right\|_p \leq \varphi_{p,k}(\omega) \|\Phi\|_{k+p}, \quad \mathbb{P} \text{ p. s.}$$

Preuve du lemme 5. — $GL(d, \mathbb{R})$ peut être considéré comme un ouvert de $\mathbb{R}^{d^2}$; soit $(g_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ un système de coordonnées sur $GL(d, \mathbb{R})$ et $(\partial/\partial g_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ les champs de vecteurs associés, c'est-à-dire que si f est différentiable sur $GL(d, \mathbb{R})$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial g_{i,j}} f(g) = \frac{d}{dt} f(g + t E_{i,j}) \Big|_{t=0} \quad (90)$$

où $E_{i,j}$ désigne la matrice $d \times d$ ayant tous ses termes nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ième colonne et qui est égal à 1.

Pour tout $X \in \mathbb{G}$ on a la relation

$$X g_{i,j}(g) = \langle g X e_i, e_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (91)$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ pour un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tels que $g_{i,j} = \langle g e_i, e_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq d$.

Il en résulte que l'on a :

$$E_{k,l} = \sum_{j=1}^d g_{k,j} \frac{\partial}{\partial g_{l,j}}, \quad 1 \leq k, l \leq d. \quad (92)$$

Soit $M(g)$ la matrice $d^2 \times d^2$ de passage de la base $(E_{k,l})_{1 \leq k, l \leq d}$ à la base $(\partial/\partial g_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ de l'espace tangent au point g de $GL(d, \mathbb{R})$. De (92) il résulte que $\|M(g)\| \leq \|g\|$ et également que $|\det[M(g)]| = |\det g|^d$ et par conséquent que

$$\|M^{-1}(g)\| \leq \|g\|^{d-1} \|g^{-1}\|^{d^2}. \quad (93)$$

Supposons que $T = [a-r, a+r]$. Il résulte des hypothèses d'analyticité du théorème 2 que l'on a pour $\lambda \in T$

$$g^\lambda(\omega) = \sum_{k \geq 0} (\lambda - a)^k A_k(\omega), \quad \mathbb{P} \text{ p. s., } (A_k(\omega))_k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \quad (94)$$

et de même

$$[g^\lambda(\omega)]^{-1} = \sum_{k \geq 0} (\lambda - a)^k B_k(\omega), \quad \mathbb{P} \text{ p. s., } (B_k(\omega))_k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \quad (95)$$

où pour tout $p \geq 1$ la série $\sum_{k \geq 0} r^k \{N_p(A_k) + N_p(B_k)\}$ est convergente, où l'on a noté

$$N_p(A) = \left\{ \int \|A(\omega)\|^p d\mathbb{P}(\omega) \right\}^{1/p} \quad (96)$$

pour toute matrice aléatoire A de Ω dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction φ différentiable sur $GL(d, \mathbb{R})$ on a

$$\frac{d}{d\lambda} \varphi(g^\lambda(\omega)) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{dg_{i,j}^\lambda(\omega)}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial g_{i,j}}(g^\lambda(\omega)), \quad \mathbb{P} \text{ p. s.} \quad (97)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \varphi(g^\lambda(\omega)) \\ &= \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \frac{dg_{i,j}^\lambda(\omega)}{d\lambda} m'_{i,j,k,l}(g^\lambda(\omega)) E_{k,l}(\varphi)(g^\lambda(\omega)), \quad \mathbb{P} \text{ p. s.} \end{aligned} \quad (98)$$

où

$$(m'_{i,j,k,l}(g)) = [M(g)]^{-1}. \quad (99)$$

Considérons d'autre part l'espace vectoriel V_p engendré par les fonctions de la forme

$$F(g, k) = \rho(g, k) f(g \cdot k) \quad \text{où } f \in C^p(K). \quad (100)$$

Soit X un élément de $\mathbb{G}$ alors $XF(g, k) = (d/dt) F(\exp t X g, k)_{t=0}$ est un élément de V_{p-1} on a en effet en utilisant la propriété de cocycle de ρ .

$$XF(g, k) = \rho(g, k) [\bar{X}(f)(g \cdot k) + X\rho(e, g \cdot k) f(g \cdot k)] \quad (101)$$

où

$$\bar{X}(f)(k) = \frac{d}{dt} f(\exp t X \cdot k) \big|_{t=0}. \quad (102)$$

Par ailleurs l'application $g \rightarrow \rho(g^{-1}, k) f(g^{-1} \cdot k)$ définit une représentation de $GL(d, \mathbb{R})$ dans $C^p(K)$ $p \geq 1$. Il en résulte [7] qu'il existe une constante $c(p)$ telle que $f \in C^p(K)$ on ait :

$$\|\rho(g^{-1}, \cdot) f(g^{-1} \cdot)\|_p \leq c(p) l^{(p)}(g) \|f\|_p. \quad (103)$$

On déduit de (98), de (99) et de (103) qu'il existe une constante $K(p) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in T} \left\| \frac{d}{d\lambda} \rho(g^\lambda(\omega), \cdot) \Phi(g^\lambda(\omega), \cdot) \right\| &\leq K(p) l^{(p)}(g^\lambda(\omega)) \\ &\times \sum_{k \geq 0} k r^{k-1} \|A_k(\omega)\| \\ &\times \left(\sum_{k \geq 0} r^k \|A_k(\omega)\| \right)^{d-1} \times \left(\sum_{k \geq 0} r^k \|B_k(\omega)\| \right)^{d^2} \\ &\times \sum_{1 \leq k, l \leq d} (\|\bar{E}_{k,l} \Phi\|_p + \|E_{k,l}[\rho(e, \cdot) \Phi(\cdot)]\|_p). \end{aligned} \quad (104)$$

En raison de la compacité de K il existe une constante a_p telle que pour toute fonction $\Phi \in C^{p+1}(K)$ on ait :

$$\sum_{1 \leq k, l \leq d} \|\bar{E}_{k,l} \Phi\|_p + \|E_{k,l}[\rho(e, \cdot) \Phi(\cdot)]\|_p \leq a_p \|\Phi\|_{p+1}. \quad (105)$$

Les inégalités (104), (105), l'inégalité de Hölder et l'hypothèse d'analyticité du théorème 2 permettent d'obtenir le résultat du lemme pour $k=1$.

Le cas où $k \geq 2$ s'obtient de manière analogue en dérivant à nouveau $\frac{d}{d\lambda} [\rho(g^\lambda(\omega), \cdot) \Phi(g^\lambda(\omega), \cdot)]$ par rapport à la variable λ , le seul élément

nouveau étant de contrôler les quantités $\sup_{\lambda \in T} \left| \frac{d^p}{d\lambda^p} g_{i,j}^\lambda(\omega) \right|$ pour $2 \leq p \leq k$ et

$$\sup_{\lambda \in T} \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} [M(g^\lambda(\omega))]^{-1} \right\|, \quad 2 \leq p \leq k.$$

On a

$$\sup_{\lambda \in T} \left| \frac{d^p}{d\lambda^p} g_{i,j}^\lambda(\omega) \right| \leq \sum_{k \geq p} k^p r^{k-p} \|A_k(\omega)\|, \quad \mathbb{P} \text{ p. s.} \quad (106)$$

D'autre part la matrice $[M(g^\lambda(\omega))]^{-1}$ et ses dérivées par rapport à λ sont des matrices dont les coefficients sont des expressions rationnelles en les coefficients de la matrice $M(g^\lambda(\omega))$ et de ses dérivées, et dont le dénominateur est une puissance de $\det M(g^\lambda(\omega))$. Il en résulte que pour tout $k \geq 1$

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} [M(g^\lambda(\omega))]^{-1} \right\|$$

est majorée $\mathbb{P}$ p. s. par une combinaison finie de produits de termes de la forme

$$\sum_{k \geq q} k^q r^{k-q} \|A_k(\omega)\|, \quad 0 \leq q \leq p \quad (107)$$

$$\sum_{k \geq 0} r^k \|B_k(\omega)\| \quad (108)$$

ce qui permet de conclure.

La proposition se justifie aisément à partir du lemme précédent et du fait que pour tout cocycle multiplicatif continu η sur $GL(d, \mathbb{R}) \times K$ la variable aléatoire $\sup_{\lambda \in T} \sup_{k \in K} \eta(g^\lambda(\omega), k)$ appartient à $\bigcap_{k \geq 0} L^k(\Omega, \mathbb{P})$ en utilisant un théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Preuve du corollaire 2. — Le corollaire découle de la proposition 3 en considérant le cocycle $\rho(g, k) = \sigma(g, k, \bar{e}_1)$.

Définissons d'autre part les opérateurs $P^{(k)}(\lambda)$ $k \geq 1$ par :

$$P^{(k)}(\lambda)(f)(\bar{x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k} \{P(\lambda)(f)(\bar{x})\} = \int \frac{d^k}{d\lambda^k} (f(g^\lambda(\omega), \bar{x})) d\mathbb{P}(\omega) \\ f \in C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)), \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d). \quad (109)$$

La formule précédente se justifie à l'aide du lemme 5.

On désigne par T un intervalle de U et pour k et p entiers ≥ 0 par $\mathcal{L}(k, p)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ dans $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$. Énonçons et démontrons des lemmes utiles à la preuve du théorème 2.

LEMME 6

- 1) $P^{(k)}(\lambda)$ appartient à $\mathcal{L}(k+p, p)$ $k \geq 0, p \geq 0$.
- 2) L'application $\lambda \rightarrow P(\lambda)$ est continue de U dans $\mathcal{L}(k, k)$ $k \geq 0$
- 3) Pour tous $k \geq 0, p \geq 0$ il existe une constante $c_{p,k}(T)$ telle que pour toute fonction f de $C^{p+k+2}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ on ait

$$\sup_{\lambda, \lambda_0 \in T} \|P^{(k)}(\lambda)(f) - P^{(k)}(\lambda_0)(f) - (\lambda - \lambda_0)P^{(k+1)}(\lambda_0)(f)\|_p \\ \leq c_{p,k}(T)(\lambda - \lambda_0)^2 \|f\|_{p+k+2}. \quad (110)$$

Démonstration du lemme 6. — L'assertion 1) est une conséquence immédiate du lemme 5.

Considérons par ailleurs la représentation r continue de $GL(d, \mathbb{R})$ dans $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ définie par la formule :

$$r(g)f(\bar{x}) = f(g^{-1} \cdot \bar{x}). \quad (111)$$

Il résulte de [7] qu'il existe une constante $c_k > 0$ telle que

$$\|r(g)f\|_k \leq c_k l^k(g) \|f\|_k. \quad (112)$$

Or on a :

$$P(\lambda)(f) - P(\lambda_0)(f) = \int r(g^{-1})(f) [f_\lambda(g) - f_{\lambda_0}(g)] dg \quad (113)$$

et par conséquent

$$\|P(\lambda)(f) - P(\lambda_0)(f)\|_k \leq c_k \int l^k(g) |f_\lambda(g) - f_{\lambda_0}(g)| dg. \quad (114)$$

L'hypothèse 2) du théorème 2 permet alors d'obtenir le 2) du lemme.

Établissons maintenant le 3) de ce lemme. Par application de la formule de Taylor il vient :

$$P^{(k)}(\lambda)(f) - P^{(k)}(\lambda_0)(f) - (\lambda - \lambda_0)P^{(k+1)}(\lambda_0)(f) \\ = (\lambda - \lambda_0)^2 \int d\mathbb{P}(\omega) \int_0^1 (1-t) \frac{d^{k+2}}{d\lambda^{k+2}} [f(g^{\lambda_0+t(\lambda-\lambda_0)}(\omega))] dt. \quad (115)$$

L'énoncé du lemme 5 permet d'obtenir facilement le résultat souhaité.

LEMME 7. — Soient $(E_i \mid |_i) i=1, 2$ deux espaces de Banach et $T(\lambda)$ $\lambda \in 0$ où 0 est un ouvert de $\mathbb{R}$ une famille d'opérateurs bornés de E_i dans E_i $i=1, 2$.

On suppose que :

- 1) $E_1 \subset E_2$ et que l'injection de E_1 dans E_2 est continue.
- 2) L'application $\lambda \rightarrow T(\lambda)$ est continue de 0 dans $\mathcal{L}(E_i, E_i) i=1, 2$ espace de Banach des applications linéaires continues de E_i dans E_i .
- 3) L'application $\lambda \rightarrow T(\lambda)$ de 0 dans $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ espace de Banach des applications linéaires continues de E_1 dans E_2 est dérivable en $\lambda_0 \in 0$, de dérivée $T'(\lambda_0)$.

Soit d'autre part z_0 un élément de l'ensemble résolvant de $T(\lambda_0)$ considéré comme opérateur sur E_1 et E_2 . On note $R(T(\lambda), z_0) = \{z_0 I - T(\lambda)\}^{-1}$ la résolvante de $T(\lambda)$ sur E_1 et E_2 qui d'après 2) existe sur un voisinage V_{λ_0} . L'application $\lambda \rightarrow R(T(\lambda), z_0)$ de V_{λ_0} dans $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est alors dérivable en λ_0 et de dérivée égale à $R(T(\lambda_0), z_0) T'(\lambda_0) R(T(\lambda_0), z_0)$.

Démonstration du lemme 7. — Il résulte de l'hypothèse 3) que pour $f \in E_1$ on a

$$\left| T(\lambda) f - T(\lambda_0) f - (\lambda - \lambda_0) T'(\lambda_0) f \right|_2 = |\lambda - \lambda_0| \varepsilon_1(\lambda - \lambda_0) |f|_1 \quad (116)$$

où

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon_1(\lambda) = 0.$$

Soit $f \in E_1$, notons

$$\Delta(\lambda, \lambda_0, f) = \frac{R(T(\lambda), z_0) f - R(T(\lambda_0), z_0) f}{\lambda - \lambda_0} - R(T(\lambda_0), z_0) T'(\lambda_0) R(T(\lambda_0), z_0) f. \quad (117)$$

D'après l'équation résolvante

$$R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0) = R(T(\lambda), z_0) [T(\lambda) - T(\lambda_0)] R(T(\lambda_0), z_0) \quad (118)$$

on a

$$\Delta(\lambda, \lambda_0, f) = \Delta_1(\lambda, \lambda_0, f) + \Delta_2(\lambda, \lambda_0, f) \quad (119)$$

où

$$\Delta_1(\lambda, \lambda_0, f) = \{R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0)\} \circ \left[\frac{T(\lambda) - T(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right] R(T(\lambda_0), z_0) f \quad (120)$$

où

$$\Delta_2(\lambda, \lambda_0, f) = \left\{ R(T(\lambda_0), z_0) \left[\frac{T(\lambda) - T(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - T'(\lambda_0) \right] R(T(\lambda_0), z_0) \right\} f. \quad (121)$$

De (116) il résulte que

$$|\Delta_2(\lambda, \lambda_0, f)|_2 \leq \varepsilon_1 (\lambda - \lambda_0) |R(T(\lambda_0), z_0)|_2 |R(T(\lambda_0), z_0)|_1 |f|_1 \quad (122)$$

et également que

$$|\Delta_2(\lambda, \lambda_0, f)|_2 \leq |R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0)|_2 \times (|T'(\lambda_0)|_{1,2} + \varepsilon_1 (\lambda - \lambda_0)) |f|_1 \quad (123)$$

où l'on a adopté les notations

$$|A|_i = \sup_{|f|_i} |A f|_i \quad (124)$$

pour tout opérateur A linéaire de E_i dans E_i $1 \leq i \leq 2$

$$|A|_{1,2} = \sup_{|f|_1=1} |A f|_2 \quad (125)$$

pour tout opérateur A linéaire de E_1 dans E_2 .

De l'hypothèse 2) du lemme il résulte que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} |R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0)|_2 = 0 \quad (126)$$

et la conclusion résulte alors de (119), (122) et (123).

LEMME 8. — Soient $(i_l)_{1 \leq l \leq k}$ une suite de k entiers ≥ 0 et $j \geq 0$ et

$$H(\lambda, z, \cdot) = R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots$$

$$\dots R(\lambda, z) P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right].$$

Pour tout $p \geq 0$ et $z \in \Gamma$ l'application $\lambda \rightarrow H(\lambda, z, \cdot)$ de T dans $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ est dérivable et $(\lambda, z) \rightarrow (\partial/\partial \lambda) H(\lambda, z, \cdot)$ est continue de $T \times \Gamma$ dans $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration du lemme 8. — Il résulte facilement du fait que $(\lambda, \bar{x}) \rightarrow \Phi_\lambda(\bar{x})$ est C^∞ sur $U \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ des lemmes 6 et 7 que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} H(\lambda, z, \cdot) = R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots$$

$$\dots R(\lambda, z) P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^{j+1} \Phi_\lambda}{\partial \lambda^{j+1}} \right] + \sum_{l=1}^k R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots$$

$$\dots P^{(i_{l-1})}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_l+1)}(\lambda) R(\lambda, z) \dots P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right] + \sum_{l=1}^k R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots$$

$$\dots R(\lambda, z) P^{(i_l)}(\lambda) R(\lambda, z) \dots$$

$$\begin{aligned} \dots P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right] + R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots \\ \dots R(\lambda, z) P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) P'(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right]. \quad (127) \end{aligned}$$

La continuité de $(\lambda, z) \rightarrow (\partial/\partial\lambda) H(\lambda, z, \cdot)$ de $T \times \Gamma$ dans $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ $p \geq 0$ est une conséquence de la formule précédente, de la continuité de $(\lambda, z) \rightarrow R(\lambda, z)$ de $T \times \Gamma$ dans $\mathcal{L}(k, k)$ pour tout $k \geq 0$ et du 3) du lemme 6.

Terminons maintenant la preuve du théorème 2. Le lemme 8 permet de justifier la dérivation par rapport à λ sous le signe intégrale dans la formule

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(\lambda, z) [\Phi_\lambda](\bar{x}) dz, \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda \in T \quad (128)$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma'(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(\lambda, z) \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\Phi_\lambda) \right](\bar{x}) \\ + R(\lambda, z) P'(\lambda) R(\lambda, z) [\Phi_\lambda](\bar{x}) dz. \quad (129) \end{aligned}$$

Les dérivations successives se justifiant par le même lemme on voit et que $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ est infiniment dérivable sur T et

$$\begin{aligned} \gamma^{(p)}(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \\ \times \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^p \sum_{\{(j, i_1, i_2, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^{k+1}; j+i_1+i_2+\dots+i_k=p\}} \frac{1}{i_1! i_2! \dots i_k! j!} \\ \times R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots \\ \dots R(\lambda, z) P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right](\bar{x}) dz. \quad (130) \end{aligned}$$

V.1. PREUVE DU THÉORÈME 3

Soit $A > 0$ et

$$\Psi_A(\lambda) = N(\lambda) 1[-A, A](\lambda) \quad (131)$$

Ψ_A est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Soit $\tilde{\Psi}_A$ sa transformée de Hilbert.

$$\tilde{\Psi}_A(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| > \varepsilon} \frac{\Psi_A(t)}{x-t} dt. \quad (132)$$

Par intégration par parties à partir de la formule de Thouless (5) on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_A(x) = & -\frac{1}{\pi}\Psi_A(A)\operatorname{Log}|A-x| + \frac{1}{\pi}\Psi_A(-A)\operatorname{Log}|A+x| \\ & + \frac{1}{\pi}\gamma(x) - \frac{1}{\pi}\int_{|t|>A}\operatorname{Log}|x-t|dN(t).\end{aligned}\quad (133)$$

Supposons tout d'abord les hypothèses du 1) du théorème 3 vérifiées.

La suite de matrices indépendantes $\begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n \geq 0$ satisfait alors aux hypothèses du théorème 1. La vérification de 2.1 et de 2.2 est en effet immédiate. De plus comme η charge au moins 2 points le sous-groupe fermé engendré par μ_λ est non compact et ne contient pas de sous-groupe d'indice fini ayant une action irréductible sur $\mathbb{R}^2$ [14]. On en déduit [1] que μ_λ satisfait l'hypothèse 1) du théorème 1.

Il résulte alors de (133) que $\tilde{\Psi}_A$ est höldérienne dans $[-(A/2), A/2]$, d'où l'on déduit que sa transformée de Hilbert θ_A est höldérienne sur $[-(A/4), A/4]$.

En raison de la continuité [15] de la fonction $N(\lambda)$ sur $\mathbb{R}$ et de la théorie de l'inversion de la transformée de Hilbert dans $L^2(\mathbb{R})$ [13] on a

$$-\theta_A(\lambda) = N(\lambda) \quad \text{pour } \lambda \in [-(A/4), A/4] \quad (134)$$

ce qui assure que N est höldérienne sur l'intervalle $[-(A/4), A/4]$. ceci justifie la première assertion du théorème 3 en raison de l'arbitraire de A .

Supposons maintenant les hypothèses du 2) du théorème 3 satisfaites et vérifions que la suite de matrices aléatoires indépendantes

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad n \geq 0$$

satisfait alors aux hypothèses du théorème 2. (Compte tenu de la remarque qui suit.)

Il est immédiat que les hypothèses 1) et 2) de ce théorème 2 sont satisfaites par la suite précédente. Par ailleurs (en adoptant les notations du théorème 2) μ_λ^3 admet une densité f_λ par rapport à la mesure de Haar de $SL(2, \mathbb{R})$. En désignant par $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément quelconque de $SL(2, \mathbb{R})$ l'expression de cette densité est [17]

$$f_\lambda(g) = \frac{1}{|d|} f\left(\frac{b-1}{d} - \lambda\right) f(-d - \lambda) f\left(\frac{1-b-ad}{bd} - \lambda\right) \quad (135)$$

la mesure de Haar étant

$$dg = \frac{1}{|b|} da db dd. \quad (136)$$

Soit k un entier, considérons

$$\delta_k(\lambda, \lambda_0) = \int l^k(g) |f_\lambda(g) - f_{\lambda_0}(g)| dg. \quad (137)$$

L'égalité

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xyz - x - z & -xy + 1 \\ yz - 1 & -y \end{pmatrix} = g(x, y, z)$$

les relations (135) et (137) permettent d'obtenir par le changement de variable

$$x = \frac{b-1}{d}, \quad y = d, \quad z = \frac{1-b-ad}{bd}$$

l'égalité

$$\delta_k(\lambda, \lambda_0) = \int l^k[g(x, y, z)] |f(x-\lambda) f(y-\lambda) f(z-\lambda) - f(x-\lambda_0) f(y-\lambda_0) f(z-\lambda_0)| dx dy dz. \quad (138)$$

Comme d'autre part

$$l(g(x, y, z)) \leq (1 + |x|)(1 + |y|)(1 + |z|) \leq (1 + \|(x, y, z)\|)^3$$

en notant dL la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$

$$H(x, y, z) = f(x) f(y) f(z) \quad \text{et} \quad \Lambda = (\lambda, \lambda, \lambda) \quad (139)$$

on a

$$\delta_k(\lambda, \lambda_0) \leq 2^{3k-1} \int (1 + \|x\|^{3k}) |H(x-\Lambda) - H(x-\Lambda_0)| dL(x). \quad (140)$$

Notons que le second membre de l'inégalité précédente est bien défini car H est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^3$ qui comme f a des moments de tous ordres.

Soit B une boule ouverte bornée de $\mathbb{R}^3$ et $M = \sup_{\Lambda \in B} \|\Lambda\|$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction φ_ε continue à support compact dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\int [1 + 2^{3k-1} (\|y\|^{3k} + M^{3k})] |\varphi_\varepsilon(y) - H(y)| dy < \varepsilon. \quad (141)$$

Il en résulte que

$$\sup_{\Lambda \in B} \int (1 + (\|y\|^{3k}) |\varphi_\varepsilon(y - \Lambda) - H(y - \Lambda)| dy < \varepsilon \quad (142)$$

et donc que si $\Lambda = (\lambda, \lambda, \lambda)$, $\Lambda_0 = (\lambda_0, \lambda_0, \lambda_0)$ sont dans B

$$\delta_k(\lambda, \lambda_0) \leq 2^{3k} \varepsilon + 2^{3k-1} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \|x\|^{3k}) |\varphi_\varepsilon(x - \Lambda) - \varphi_\varepsilon(x - \Lambda_0)| dx. \quad (143)$$

De (143) on déduit que $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \sup \delta_k(\lambda, \lambda_0) \leq \varepsilon$ ce qui en raison de l'arbitraire de ε prouve que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \delta_k(\lambda, \lambda_0) = 0. \quad (144)$$

L'hypothèse 2) du théorème 2 est donc satisfaite par la famille de probabilités μ_λ^3 $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc $\gamma(\lambda)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\tilde{\Psi}_A$ est C^∞ sur $[-A/2, A/2]$, d'où θ_A est C^∞ sur $] -A/4, A/4[$ et donc également $N(\lambda)$ en raison de (134). La preuve du théorème 3 est ainsi achevée.

V.2.

Dans [17] Simon et Taylor établissent en utilisant un argument de Halperin, que si $\eta = (1/2)(\delta_a + \delta_b)$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un choix de a et b tels que N ne peut être höldérienne d'ordre supérieur à ε sur le support $\{a, b\} + [-2, 2]$ de la probabilité dN [15] (il suffit que $|a - b| \rightarrow +\infty$). Le raisonnement utilisé plus haut montre alors facilement qu'il en est de même pour $\gamma(\lambda)$.

Notons enfin que si le support de η est compact et si η admet une densité dans $L^1(\mathbb{R})$ la fonction N ne peut être analytique sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle prend la valeur 1 (resp. 0) sur un intervalle ouvert I_1 (resp. I_0) du complémentaire de $[-2, 2] + \text{supp } \eta$ [15]. de même d'après la proposition A (appendice) γ n'est pas analytique sur $\mathbb{R}$.

APPENDICE

On a la proposition

PROPOSITION A. — Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que f soit analytique dans l'intervalle $]a, b[$ sa transformée de Hilbert

$$H(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| > \varepsilon} \frac{f(t) dt}{x-t}$$

est alors analytique dans $]a, b[$.

Preuve de la proposition A. — Soit x_0 un point de $]a, b[$, en raison de l'analyticité de f il existe un intervalle $I_{x_0} = [x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \subset]a, b[$, $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\frac{1}{R_{x_0}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \left(\sup_{x \in I_{x_0}} \frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \right)^{1/k} < +\infty. \quad (1')$$

Pour $x \in \left[x_0 - \frac{\varepsilon_0}{4}, x_0 + \frac{\varepsilon_0}{4} \right] = J_{x_0}$ on a :

$$\pi H(f)(x) = \int_0^{\varepsilon_0/4} \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} du + \int_{x+\varepsilon_0/4}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{x-t} + \int_{-\infty}^{x-\varepsilon_0/4} \frac{f(t) dt}{x-t}. \quad (2')$$

On en déduit que pour $x \in J_{x_0}$ $k \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \pi [H(f)]^{(k)}(x) &= \int_0^{\varepsilon_0/4} \frac{f^{(k)}(x+u) - f^{(k)}(x-u)}{u} du \\ &+ \sum_{j=0}^k (j-1)! \left(\frac{\varepsilon_0}{4} \right)^{-j} \left\{ f^{(k-j)} \left(x + \frac{\varepsilon_0}{4} \right) + f^{(k-j)} \left(x - \frac{\varepsilon_0}{4} \right) \right\} \\ &+ (-1)^k k! \int_{x+\varepsilon_0/4}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{k+1}} + (-1)^k k! \int_{-\infty}^{x-\varepsilon_0/4} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (3')$$

Il en résulte et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\begin{aligned} \pi \sup_{x \in J_{x_0}} \frac{[H(f)]^{(k)}(x)}{k!} &\leq \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \right) \sup_{z \in I_{x_0}} \frac{|f^{(k+1)}(z)|}{k!} \\ &+ 2 \sum_{j=0}^k \frac{1}{C_k^j} \left(\frac{\varepsilon_0}{4} \right)^{-j} \sup_{z \in I_{x_0}} \frac{|f^{(k-j)}(z)|}{k-j!} \\ &+ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \times \frac{2}{\sqrt{2k+1}} \left(\frac{\varepsilon_0}{4} \right)^{-k-1/2}. \end{aligned} \quad (4')$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \left[\sup_{x \in J_{x_0}} \frac{[H(f)]^{(k)}(x)}{k!} \right]^{1/k} &\leq \frac{1}{R_{x_0}} + \frac{1}{R_{x_0}} \times \sup \left(1, \left[\frac{\varepsilon_0}{4 R_{x_0}} \right]^{-1} \right) \\ &+ \left(\frac{\varepsilon_0}{4} \right)^{-1} = \frac{1}{\rho_{x_0}} < +\infty. \end{aligned} \quad (5')$$

Soit u tel que $|u| < \frac{\varepsilon_0}{4}$ d'après la formule de Taylor pour tout $n \geq 1$

on a

$$|H(f)(x_0 + u) - \sum_{k=1}^n \frac{u^k}{k!} [H(f)]^{(k)}(x_0)| \leq \frac{|u|^n}{n!} \sup_{z \in J_{x_0}} |[H(f)]^{(n+1)}(z)|. \quad (6')$$

L'inégalité précédente et l'inégalité (5') montrent que pour

$$0 \leq |u| < \inf(\varepsilon_0/4, \rho_{x_0})$$

on a

$$H(f)(x_0 + u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} [H(f)]^{(k)}(x_0) \quad (7')$$

ce qui achève la preuve de la proposition A.

RÉFÉRENCES

- [1] P. BOUGEROL et J. LACROIX, Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger operators, Birkhäuser Progress in *Probability and Statistics*, vol. **8**, 1985.
- [2] M. CAMPANINO et A. KLEIN, A Supersymmetric Matrix and Differentiability of the Density of States in the one Dimensional Anderson Model, *Commun. Math. Physics*, n° **104**, 1986, p. 227-241.
- [3] R. CARMONA, A. KLEIN et F. MARTINELLI, Anderson Localisation for Bernoulli and Other Singular Potentials, *Comm. Math. Physics*, n° **108**, 1987, p. 66.
- [4] W. CRAIG et B. SIMON, Log Hölder Continuity of the Integrated Density of States for Stochastic Jacobi Matrices, *Comm. Math. Physics*, n° **90**, 1983, p. 207-218.
- [5] H. FURSTENBERG, Non Commuting Random Products, *T.A.M.S.*, n° **108**, 1963, p. 377-428.
- [6] H. FURSTENBERG et Y. KIEFER, Random Matrix Products and Measures on Projective Spaces, *Israel Journal of Math.*, vol. **46**, n° 1, 2, 1983, p. 12-32.
- [7] L. GARDING, Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie, *Bulletin S.M.F.*, tome **88**, 1960, p. 73-93.
- [8] Y. GUIVARCH et A. RAUGI, Frontière de Fürstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, *Z. Wahr.*, n° **69**, 1985, p. 187-242.
- [9] H. HENNION, Loi des grands nombres et perturbations pour les produits réductibles de matrices aléatoires indépendantes, *Z. Wahr.*, n° **67**, 1984, p. 265-278.
- [10] E. LE PAGE, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° **928**, 1982, p. 258-303.
- [11] E. LE PAGE, Répartition d'état d'un opérateur de Schrödinger aléatoire. Distribution empirique des valeurs propres d'une matrice de Jacobi, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° **1064**, 1983.
- [12] P. MARCH et A. S. SZNITMAN, Some Connections between Excursion Theory and the Discrete Schrödinger Equation with Random Potentials. *Probability theory and related fields*, vol. **75**, n° 1, 1987.

- [13] U. NERI, Singular Integrals, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 200, 1971.
- [14] O. CONNOR, Disordered Harmonic Chain, *Comm. Math. Physics*, n° 45, 1975, p. 63-77.
- [15] L. PASTUR, Spectral Properties of Disordered Systems in the One Body Approximation, *Comm. Math. Physics*, n° 75, 1980, p. 179-196.
- [16] D. RUELLE, Analyticity Properties of the Characteristic Exponents of Random Matrix Products, *Advances in Math.*, n° 32, 1980, p. 68-80.
- [17] B. SIMON et M. TAYLOR, Harmonic Analysis on $SL(2, \mathbb{R})$ and Smoothness of the Density of States in the One Dimensional Anderson Model, *Comm. Math. Physics*, n° 101, 1985, p. 1-19.

(Manuscrit reçu le 11 avril 1988.)