ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DOMINIQUE DELESALLE

Classes de Donsker et fonction d'entropie relatives aux mesures aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº 3 (1987), p. 531-559
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_3_531_0>

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 23, n° 3, 1987, p. 531-559. *Probabilités et Statistiques*

Classes de Donsker et fonction d'entropie relatives aux mesures aléatoires

par

Dominique DELESALLE

Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées,
Laboratoire de Statistique et Probabilités,
59655 Villeneuve d'Ascq-Cedex

RÉSUMÉ. — Pour un n-échantillon d'une mesure aléatoire $\mu^{\cdot}$ sur un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}$, on considère la mesure aléatoire empirique normalisée :

$$\eta_n^{\cdot} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i^{\cdot} - \mu),$$

μ étant la mesure moyenne associée à $\mu^{\cdot}$. En introduisant des classes de Donsker relativement à la tribu $\mathscr{B}$, et une fonction d'entropie appropriée, on met en évidence un ensemble de conditions permettant d'assurer la convergence en loi de la suite $(\eta_n^{\cdot})$.

Mots clés : Théorème central limite, mesure aléatoire, convergence faible, entropie.

ABSTRACT. — Let $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ be a random sample from a random measure $\mu^{\cdot}$ on a separable metric space endowed with its Borel σ-algebra $\mathscr{B}$. Let

$$\eta_n^{\cdot} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu^{\cdot}{}_i - \mu)$$

be the normalised empirical random measure, where μ denotes the expected value of $\mu^{\cdot}$. We study the convergence in law of the sequence $(\eta_n^{\cdot})$ by means of Donsker classes in $\mathscr{B}$ and appropriate entropy function.

Key words : Central limit theorem, random measure, entropy.

I. – INTRODUCTION

Le théorème de limite centrale a pour objet d'étudier la convergence en loi du processus empirique $\nu_n = \sqrt{n}(P_n - P)$, où P_n désigne la loi empirique associée à un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ d'une variable aléatoire X de loi P. Nous tentons une généralisation des méthodes utilisées par R. M. Dudley [3] au cas où la variable aléatoire en question prend ses valeurs dans un espace de mesures. La notion de mesure aléatoire utilisée ici est celle définie, par exemple, dans [7] : le point de vue diffère donc sensiblement de celui adopté par R. M. Dudley dans une publication plus récente [4]. Ce dernier, en effet, multiplie les références à l'analyse fonctionnelle, et exploite largement l'équivalence entre une classe de théorèmes limites pour les mesures empiriques et une théorie des éléments aléatoires à valeurs dans des espaces normés plus généraux. Même si les mesures aléatoires peuvent relever d'une structure intermédiaire, nous préférons garder un point de vue plus typiquement probabiliste.

Nous tenons à remercier bien vivement M. P. Jacob, dont l'aide nous a été précieuse.

II. – DÉFINITIONS ET NOTATIONS. THÉORÈME PRÉLIMINAIRE

Soit $\mathscr{X}$ un espace métrique séparable, et $\mathscr{B}_b$ l'anneau de ses boréliens bornés; nous désignons par $\mathscr{M}$ (respectivement $\mathscr{M}_+$) l'ensemble des mesures réelles (resp. positives) sur $\mathscr{X}$. Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \Pr)$, les mesures aléatoires réelles (resp. positives) sur $\mathscr{X}$ sont les applications de Ω dans $\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{M}_+$), mesurables relativement à la tribu

Classification A.M.S. : 60 F 05, 60 G 57, 60 B 05, 60 B 10, 60 G 15, 60 G 17.

$\mathscr{A}$ et à la tribu $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}_+$), tribu borélienne associée à la topologie de la convergence faible à distance finie.

Soit $\mu^\bullet$ une mesure aléatoire positive d'ordre 2, c'est-à-dire telle que le processus stochastique associé à la mesure aléatoire $\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet$ sur $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ possède un moment d'ordre 1 [8]. A tout n-échantillon $(\mu_1^\bullet, \mu_2^\bullet, \ldots, \mu_n^\bullet)$ de $\mu^\bullet$, nous associons la mesure aléatoire réelle :

$$\eta_n^\bullet = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i^\bullet - \mu),$$

μ étant la mesure moyenne associée à $\mu^\bullet$.

Dans le cas où $\mu^\bullet = \delta_X$, X étant une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, on retrouve les cas classiques étudiés par exemple dans [2] et [6].

Pour toute suite finie $S = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$ de boréliens bornés, désignons par $P_{n,S}$ la loi du vecteur aléatoire :

$$(\eta_n^\bullet(B_1), \ldots, \eta_n^\bullet(B_k)).$$

Le théorème de limite centrale relatif aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ permet de montrer que la suite des probabilités $(P_{n,S})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers P_S, probabilité gaussienne définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^k$. On en déduit, par le théorème de Kolmogorov-Bochner, l'existence d'une probabilité P sur la tribu produit $(\mathbb{R}^{\mathscr{B}_b}, \mathscr{R}^{\mathscr{B}_b})$, $\mathscr{R}$ désignant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, dont les projections de dimension finie sont les P_S; ces lois P_S sont centrées et de même covariance que la mesure aléatoire parente $\mu^\bullet$.

Nous appelons alors *processus de limite centrale* associé à la mesure aléatoire $\mu^\bullet$ tout processus stochastique réel indexé par $\mathscr{B}_b$:

$$\eta^\bullet = (\eta^\bullet(B))_{B \in \mathscr{B}_b},$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) *Les variables aléatoires* $\eta^\bullet(B)$ *sont définies sur le même espace probabilisé que la mesure aléatoire* $\mu^\bullet$.

(ii) *Le processus* $\eta^\bullet$ *est gaussien, centré.*

(iii) *La covariance de* $\eta^\bullet$ *est donnée par celle de* $\mu^\bullet$ *; pour tous boréliens bornés* B_1 *et* B_2 *:*

$$\mathrm{Cov}\{\eta^\bullet(B_1), \eta^\bullet(B_2)\} = E\{(\mu^\bullet - \mu) \otimes (\mu^\bullet - \mu)(B_1 \times B_2)\}.$$

La construction de tels processus est classique. Il est malheureusement impossible d'assimiler $\eta^\bullet$ à une mesure aléatoire, ce qui rend délicate

l'étude d'une éventuelle convergence en loi de la suite $(\eta_n^{\cdot})$ vers $\eta^{\cdot}$. On est alors amené à construire un espace métrique qui contient l'ensemble $\mathscr{M}$ des mesures réelles, et dans lequel, sous des hypothèses appropriées, les applications $\eta_n^{\cdot}$ et $\eta^{\cdot}$, considérées comme variables aléatoires, prennent leurs valeurs.

Soit d la pseudo-distance sur $\mathscr{B}_b$, définie par :

$$d(\mathrm{B}, \mathrm{B}') = \| \mu^{\cdot}(\mathrm{B} \triangle \mathrm{B}') \|_2$$

où $\| \cdot \|_2$ désigne la norme relative à l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \Pr)$. Pour une partie $\mathscr{C}$ de l'ensemble $\mathscr{B}_b$, nous désignons par $\mathrm{B}(\mathscr{C})$ [resp. $\mathrm{C}(\mathscr{C})$] l'espace vectoriel des applications λ de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}$, bornées (resp. d-continues et bornées). Nous munissons ces deux espaces de la norme de la convergence uniforme, définie par :

$$\|\lambda\| = \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{C}} |\lambda(\mathrm{B})|$$

et nous désignons aussi par d la pseudo-distance induite par d sur $\mathscr{C}$. Soit $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{B}(\mathscr{C})$ formé des applications λ de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent :

$$\lambda = \varphi + \nu,$$

où φ est un élément de $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ et où ν est une application bornée de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui est la restriction à $\mathscr{C}$ d'une mesure réelle sur $\mathscr{X}$. D'après ces définitions, nous avons : $\mathrm{D}(\mathscr{C}) \subset \mathrm{B}(\mathscr{C})$. Il est par ailleurs immédiat que pour tout $\omega \in \Omega$, η_n^{ω} est une mesure réelle sur $\mathscr{X}$; la condition :

$$(1) \qquad \forall \omega \in \Omega, \quad \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{C}} \mu^{\omega}(\mathrm{B}) < \infty$$

entraîne alors que pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout nombre entier naturel n, la restriction à $\mathscr{C}$ de η_n^{ω} (encore notée de la même façon) est un élément de $\mathrm{D}(\mathscr{C})$. Nous munirons l'espace $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ de la tribu, notée $\mathbb{B}$, engendrée par les boules ouvertes pour la pseudo-distance d.

Dans toute la suite de cet article, nous considérerons une mesure aléatoire positive $\mu^{\cdot}$, d'ordre 2, et un sous-ensemble $\mathscr{C}$ de l'ensemble $\mathscr{B}_b$ des boréliens bornés. On désignera par μ la mesure moyenne de $\mu^{\cdot}$.

Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}_b$, telle que la condition (1) ci-dessus soit satisfaite, et telle que :

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\eta_n^{\cdot}$ de Ω dans $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathscr{A}$ et $\mathbb{B}$.

Conformément à [3], nous dirons que $\mathscr{C}$ est une *classe de Donsker* pour $\mu^{\bullet}$ si et seulement si les conditions 1° à 3° ci-dessous sont satisfaites :

1° $\mathscr{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathscr{B}_d, d)$.

2° Il existe un processus de limite centrale $\eta^{\bullet}$ dont, presque sûrement, les restrictions à $\mathscr{C}$ des trajectoires :

$$\eta^{\omega}: \quad B \mapsto \eta^{\omega}(B)$$

sont uniformément continues.

3° En désignant par P_n la probabilité sur $(D(\mathscr{C}), \mathbb{B})$ qui est la loi de la variable aléatoire $\eta_n^{\bullet}$ et par P la probabilité borélienne sur l'espace métrique $(D(\mathscr{C}), \|\,.\,\|)$ qui est la loi de $\eta^{\bullet}$, la suite (P_n) converge faiblement vers P $\Big[$c'est-à-dire que pour toute application f continue et bornée de $D(\mathscr{C})$ dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int^{*} f dP_n = \lim_{n \to +\infty} \int_{*} f dP_n = \int f dP \Big].$$

Nous citons sans démonstration le théorème suivant, qui relie la notion de classe de Donsker à l'oscillation de $\eta_n^{\bullet}$ sur les boréliens. Ce résultat est, à nouveau, fortement inspiré de [3].

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathscr{C}$ une partie de $\mathscr{B}_b$, vérifiant les conditions* (1) *et* (2) *ci-dessus.*

Si $\mathscr{C}$ est une classe de Donsker pour $\mu^{\bullet}$, alors :

(3) *$\mathscr{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathscr{B}_d, d)$.*

(4) *$\mathscr{C}$ et $\eta_n^{\bullet}$ vérifient la condition, dite de faible oscillation : A tout nombre réel $\varepsilon > 0$ est associé un nombre réel $\rho > 0$ tel que l'on ait, pour tout n assez grand :*

$$\Pr{}^{*}\Big\{ \sup_{\substack{(B, B') \in \mathscr{C}^2 \\ d(B, B') < \rho}} |\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(B')| > \varepsilon \Big\} < \varepsilon.$$

Inversement, sous l'hypothèse supplémentaire :

$$\sup_{B \in \mathscr{C}} \operatorname{Var} \mu^{\bullet}(B) < \infty,$$

les conditions (3) *et* (4) *entraînent que $\mathscr{C}$ est une classe de Donsker pour $\mu^{\bullet}$.*

III. – NOTION D'ENTROPIE

Cette notion avait été utilisée en [3] (metric entropy with inclusion) dans le cas particulier où $\mu^{\bullet}$ est la mesure aléatoire de Dirac δ_ξ, ξ étant une variable aléatoire de loi π sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. La pseudo-distance d sur $\mathscr{B}_b$ était définie par :

$$d(\mathrm{B}, \mathrm{B}') = \pi(\mathrm{B} \triangle \mathrm{B}'),$$

où Δ désigne l'opération de différence symétrique. L'absence d'une trop grande dispersion des boréliens à l'intérieur d'une classe $\mathscr{C}$ y était caractérisée au moyen d'inégalités du type :

$$\pi(\mathrm{B}) < \varepsilon.$$

Les résultats obtenus reposaient essentiellement sur le fait que pour tout borélien B, les deux premiers moments de la variable aléatoire de Bernoulli $\delta_\xi(\mathrm{B})$ sont déterminés par la loi de probabilité π.

Dans la situation plus générale envisagée ici, nous substituons à la mesure aléatoire de Dirac δ_ξ une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$. Le rôle de la loi de probabilité π sera joué par ce que nous appellerons « fonction d'entropie », définie à partir du moment d'ordre 2 de la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$.

Nous appellerons *fonction d'entropie* associée à $\mu^{\bullet}$ l'application Φ de $\mathscr{B}_b$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\Phi(\mathrm{B}) = \| \mu^{\bullet}(\mathrm{B}) \|_2,$$

où $\| \, . \, \|_2$ désigne la norme relative à l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{Pr})$. Remarquons les propriétés suivantes : Φ est croissante [pour tous éléments B et B′ de $\mathscr{B}_b$ tels que $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}'$, on a : $\Phi(\mathrm{B}) \leqq \Phi(\mathrm{B}')$]]; Φ est sous-additive [pour tous éléments B et B′ de $\mathscr{B}_b$, *on a :* $\Phi(\mathrm{B} \cup \mathrm{B}') \leqq \Phi(\mathrm{B}) + \Phi(\mathrm{B}')$]; enfin, d'après l'inégalité de Jensen, $\mu(\mathrm{B}) \leqq \Phi(\mathrm{B})$ pour tout élément B de $\mathscr{B}_b$.

Nous dirons que la classe $\mathscr{C}$ *possède une entropie relativement à la mesure aléatoire* $\mu^{\bullet}$ si à tout nombre réel ρ strictement positif est associée au moins une suite finie de boréliens bornés :

$$(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_k)$$

vérifiant la condition :

Pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{C}$, il existe deux boréliens bornés $\mathrm{A}_{s(\mathrm{B})}$ et $\mathrm{A}_{t(\mathrm{B})}$, où $1 \leqq s(\mathrm{B}) \leqq k$ et $1 \leqq t(\mathrm{B}) \leqq k$, tels que :

$$\mathrm{A}_{s(\mathrm{B})} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{A}_{t(\mathrm{B})},$$

et :

$$\Phi(A_{t(B)} - A_{s(B)}) < \rho.$$

On suppose maintenant que $\mathscr{C}$ possède une entropie relativement à $\mu^{\bullet}$. Pour $\rho > 0$, on définit $\Gamma(\rho)$ comme étant le plus petit nombre entier naturel k vérifiant la condition ci-dessus. Le nombre réel $\operatorname{Log}\Gamma(\rho)$ sera appelé *ρ-entropie de $\mathscr{C}$ relativement à $\mu^{\bullet}$*, la suite

$$S_\rho = (A_1, A_2, \ldots, A_{\Gamma(\rho)})$$

sera appelé *suite ρ-approximante pour $\mathscr{C}$ relativement à $\mu^{\bullet}$*, et ρ sera appelé module d'approximation de $\mathscr{C}$ par S_ρ.

IV. – INÉGALITÉ DE BERNSTEIN-FRÉCHET

Ce résultat classique est souvent formulé avec des hypothèses trop contraignantes. Ou bien les variables aléatoires sont supposées bornées comme, par exemple, dans G. Bennett [1]; pourtant, tel n'est pas le cas dans la version donnée par S. Bernstein lui-même. Ou bien l'on requiert une limitation de l'écart entre la variable aléatoire somme et son espérance mathématique (M. Fréchet [5]) : cette condition, non contraignante dans les applications usuelles, amenait cependant de graves difficultés techniques dans la suite de notre étude. Nous retenons ici l'énoncé dû à P. Jacob, qui présente une majoration peu différente de celle de [4], à partir d'une condition sur les moments d'ordre 2, et qui évite les clauses trop restrictives mentionnées ci-dessus.

PROPOSITION 1. – *Soient $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \Pr)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de rang n associée à cette suite :*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ sont mutuellement indépendantes, possèdent des moments de tous ordres, et vérifient la condition suivante :

Il existe un nombre réel $K > 1$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2,

$$E\{|\xi_i - E(\xi_i)|^p\} \leqq K^{p-2} p! \operatorname{Var}(\xi_i),$$

alors pour tout nombre entier naturel $n \geqq 1$ *et pour tout nombre réel* u *strictement positif, on a :*

$$\Pr\{|S_n - E(S_n)| \geqq u\} \leqq 2\exp\left(-\frac{u^2}{4\,\mathrm{Var}(S_n) + 2\,K\,u}\right).$$

Preuve. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$E(\xi_n) = m_n; \qquad \mathrm{Var}(\xi_n) = \sigma_n^2$$
$$E(S_n) = M_n; \qquad \mathrm{Var}(S_n) = s_n^2.$$

Soit t un nombre réel tel que $0 \leqq t < \dfrac{1}{K}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \geqq 2$,

$$\frac{1}{k!} E\{t^k |\xi_i - m_i|^k\} \leqq t^2 \sigma_i^2 (t\,K)^{k-2}$$

est le terme général d'une série convergente, si bien que, d'après un théorème classique d'intégration, la série de terme général :

$$t^k (\xi_i - m_i)^k / k!$$

est presque sûrement convergente et d'espérance $E\{e^{t(\xi_i - m_i)}\}$; on peut alors procéder aux majorations suivantes

$$\begin{aligned} E\{e^{t(\xi_i - m_i)}\} &\leqq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} t^k E\{|\xi_i - m_i|^k\}/k! \\ &\leqq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} t^k \sigma_i^2 K^{k-2} = 1 + t^2 \sigma_i^2/(1 - t\,K) \\ &\leqq \exp(t^2 \sigma_i^2/(1 - t\,K)). \end{aligned}$$

Compte tenu de l'indépendance des variables aléatoires $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, on obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E\{e^{t(S_n - M_n)}\} = \prod_{i=1}^{n} E\{e^{t(\xi_i - m_i)}\} \leqq \exp(t^2 s_n^2/(1 - t\,K)),$$

et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\Pr\{S_n - M_n \geqq \varepsilon s_n\} \leqq \exp(-t\,\varepsilon\, s_n + t^2 s_n^2/(1 - t\,K)).$$

Soit alors :

$$t_n = \varepsilon/(2s_n + \varepsilon K);$$

le cas où s_n^2 est nul étant trivial, on vérifie immédiatement que $0 \leqq t_n < 1/K$, ce qui permet d'écrire :

$$\Pr\{|S_n - M_n| \geqq \varepsilon s_n\} \leqq \exp(-s_n \varepsilon^2/(4s_n + 2\varepsilon K)).$$

Une majoration similaire est obtenue pour $\Pr\{S_n - M_n \leqq -\varepsilon s_n\}$, si bien que :

$$\Pr\{|S_n - M_n| \geqq \varepsilon s_n\} \leqq 2\exp(-s_n \varepsilon^2/(4s_n + 2\varepsilon K)).$$

Le résultat annoncé s'en déduit, en posant $u = \varepsilon s_n$.

Nous supposerons, dans la suite, que la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ satisfait à la double condition suivante :

$$(5)\quad \begin{cases} \text{(i) } \mu^{\bullet} \text{ possède des moments de tous ordres.} \\ \text{(ii) Il existe un nombre réel } K > 0 \text{ tel que pour tou } B \in \mathscr{B}_b, \text{ et } p \in \mathbb{N} \\ \text{vérifiant } p \geqq 2, \\ \qquad E\{|\mu^{\bullet}(B) - \mu(B)|^p\} \leqq K^{p-2} p! \operatorname{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\}. \end{cases}$$

La condition (5) (ii) apparaît, au premier abord, peu naturelle, et appelle un certain nombre de remarques. Nous désignerons pour tous $B \in \mathscr{B}_b$, et $p \in \mathbb{N}$, le moment centré d'ordre p (resp. moment absolu centré d'ordre p) de la variable aléatoire $\mu^{\bullet}(B)$ par :

$$m_p(B) = E\{(\mu^{\bullet}(B) - \mu(B))^p\}$$

[resp. $a_p(B) = E\{|\mu^{\bullet}(B) - \mu(B)|^p\}$].

Tout d'abord, la condition (5) entraîne, de façon immédiate :

$$(6)\qquad \overline{\lim_{p \to +\infty}} \sup_{B \in \mathscr{B}_b} \left(\frac{a_p(B)}{p!}\right)^{1/p} < +\infty.$$

Inversement, en supposant l'existence des moments de tous ordres, la condition (6), jointe à la condition supplémentaire :

$$(7)\qquad \sup_{B \in \mathscr{B}_b} \operatorname{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\} < +\infty,$$

implique la condition (5). En effet, soit M un majorant de la suite

$$\left(\sup_{B \in \mathscr{B}_b} \left(\frac{a_p(B)}{p!}\right)^{1/p}\right),$$

et soit

$$V = \sup_{B \in \mathscr{B}_b} \operatorname{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\};$$

comme $\left(\frac{M^2}{V}\right)^{1/p-2}$ tend vers 1 lorsque $p \to +\infty$, il est possible de choisir K de façon que l'on ait, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$K > \max(M, \sqrt{V})\left(\frac{M^2}{V}\right)^{1/p-2};$$

la condition (5) se trouve alors vérifiée.

En second lieu, la condition (6) est vérifiée dès que l'on a :

$$\lim_{q \to +\infty} \sup_{B \in \mathscr{B}_b} \left(\frac{m_{2q}(B)}{(2q)!}\right)^{1/2q} < +\infty. \tag{8}$$

Ce résultat découle de l'inégalité de Liapounov :

$$(a_{p-1}(B))^{1/p-1} \leqq (a_p(B))^{1/p},$$

et des relations évidentes :

$$\left(\frac{a_{p-1}(B)}{(p-1)!}\right)^{1/p-1} \leqq \left(\frac{a_p(B)}{p!}\right)^{1/p} \frac{(p!)^{1/p}}{[(p-1)!]^{1/p-1}};$$

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{(p!)^{1/p}}{(p-1)!^{1/p-1}} = 1$$

$$a_{2q}(B) = m_{2q}(B).$$

Finalement, la condition (5) (ii) peut être remplacée par celle, plus maniable :

$$m_{2p}(B) \leqq K^{2p-2}(2p)!\, m_2(B). \tag{9}$$

A titre d'exemple de mesure aléatoire vérifiant la condition (5), citons certaines mesures aléatoires de Poisson : pour une mesure positive sur l'espace métrique séparable $\mathscr{X}$, $\mu^{\bullet}(B)$ suit la loi de Poisson de paramètre

$\mu(B)$. En supposant que

$$\sup_{B \in \mathscr{B}_b} \mu(B) < +\infty,$$

la condition (9) est assurée au moyen de la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Soit ξ une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson dont le paramètre λ appartient à l'intervalle* $[0, 1]$, *et m_n son moment centré d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$). Il existe un nombre réel* K (*indépendant de λ*) *tel que pour tout nombre entier naturel n vérifiant $n \geqq 2$, on ait :*

$$m_n \leqq K^{n-2} n! \lambda.$$

Preuve. — Nous raisonnons par récurrence sur n. La relation s'obtient immédiatement pour $n=2$. Utilisons, par ailleurs, la fonction caractéristique de la variable aléatoire centrée $\xi - E(\xi)$:

$$\varphi(t) = \exp[\lambda(e^{it} - it - 1)],$$

avec laquelle nous avons, pour tout entier naturel n :

$$m_n = i^n \varphi^{(n)}(0).$$

Posons, pour tout réel t :

$$u(t) = \lambda[e^{it} - it - 1];$$

les relations évidentes :

$$\varphi'(t) = u'(t)\,\varphi(t)$$

$$\varphi^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n=1} \binom{n-1}{j} \varphi^{(j)}(0)\, u^{(n-j)}(0),$$

$$u'(0) = 0$$

$$u^{(n-j)}(0) = i^{n-j}\lambda \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq j \leqq n-2,$$

entraînent :

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n} = \lambda \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{i^j}.$$

En supposant que pour $0 \leqq j \leqq n$,

$$\frac{\varphi^{(j)}(0)}{i^j} \leqq K^{j-2} j! \lambda,$$

et que $\lambda \in [0, 1]$, on obtient :

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n} \leqq \lambda \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} j!\, K^{j-2}.$$

Il reste donc à établir que :

$$\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \frac{j!}{n!} K^{j-2} \leqq K^{n-2};$$

un calcul facile montre que :

$$\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \frac{j!}{n!} K^{j-2} = K^{n-2} \frac{1}{nK} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(1/K)^j}{j!} - 1 \right) \leqq K^{n-2} \frac{1}{K} (e^{1/K} - 1);$$

or il existe un réel α tel que $0 < \alpha < 1$, et el que pour tout $0 < x < \alpha$, on ait :

$$x(e^x - 1) \leqq 1.$$

La propriété est alors démontrée en prenant $K > \frac{1}{\alpha}$. ■

Revenant au cas général, nous appliquerons une première fois la proposition 1 à la mesure aléatoire $\eta_n^{\bullet}$:

PROPOSITION 3. — *La condition* (5) *implique, pour tout borélien* B, *pour tout nombre réel* $u > 0$ *et pour tout nombre entier naturel* $n \geqq 1$, *l'inégalité :*

$$\Pr\{|\eta^{\bullet}{}_n(B)| > u\}\, 2 \exp\left(- \frac{u^2}{4[\Phi(B)]^2 + (2Ku/\sqrt{n})} \right).$$

Preuve. — Considérons, pour tout $B \in \mathscr{B}_b$, la variable aléatoire :

$$\xi_i = \mu^{\bullet}{}_i(B).$$

La suite $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ est constituée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées; en reprenant les notations de la proposition 1, on a :

$$\operatorname{Var} S_n = n \operatorname{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\}$$
$$S_n - E(S_n) = \sqrt{n}\, \eta_n^{\bullet}(B).$$

Il en résulte alors :

$$\Pr\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\mathrm{B})-n\,\mu(\mathrm{B})\right|\geqq u\sqrt{n}\right\}\leqq 2\exp-\frac{nu^2}{4n\,\mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(\mathrm{B})\}+2\mathrm{K}u\sqrt{n}}.$$

Sachant que :

$$\eta_n^{\bullet}(\mathrm{B})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[\mu_i(\mathrm{B})-\mu(\mathrm{B})]$$

et que :

$$\mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(\mathrm{B})\}\leqq[\Phi(\mathrm{B})]^2,$$

on en déduit l'inégalité annoncée. ■

Nous utiliserons une seconde fois l'inégalité de Bernstein-Fréchet pour étudier l'oscillation de $\eta_n^{\bullet}$ le long d'une suite ρ-approximante. Nous supposons que la classe $\mathscr{C}$ possède une entropie relativement à $\mu^{\bullet}$. Soient $\rho>0$ et S_ρ une suite ρ-approximante pour $\mathscr{C}$, notée :

$$\mathrm{S}_\rho=(\mathrm{A}_q)_{1\leqq q\leqq\Gamma(\rho)}.$$

A tout borélien borné B appartenant à la classe $\mathscr{C}$ sont associés deux indices $s(\mathrm{B})$ et $t(\mathrm{B})$ tels que :

$$\mathrm{A}_{s(\mathrm{B})}\subset\mathrm{B}\subset\mathrm{A}_{t(\mathrm{B})}$$
$$\Phi(\mathrm{A}_{t(\mathrm{B})}-\mathrm{A}_{s(\mathrm{B})})<\rho.$$

Considérons la variable aléatoire réelle :

$$\omega_{n,\rho}=\max_{[\mathrm{S}_\rho]}|\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_t)-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_s)|,$$

où le maximum est pris sur la classe $[\mathrm{S}_\rho]$ des couples de boréliens A_t et A_s de la suite S_ρ tels que :

$$\mathrm{A}_s\subset\mathrm{A}_t$$
$$\Phi(\mathrm{A}_t-\mathrm{A}_s)<\rho$$
$$(s,t)\in\{1,2,\ldots,\Gamma(\rho)\}^2.$$

La variable aléatoire $\omega_{n,\rho}$ sera appelée *oscillation de* $\eta_n^{\bullet}$ *le long de* S_ρ.

LEMME 1. — *Si la mesure aléatoire* $\mu^{\bullet}$ *satisfait à la condition* (5), *alors pour tous nombres réels strictement positifs* ρ *et* u, *et pour tout nombre entier naturel non nul* n, *nous avons :*

$$\Pr\{\omega_{n,\rho} > u\} \leqq 2[\Gamma(\rho)]^2 \exp - \frac{u^2}{4\rho^2 + (2\mathrm{K}u/\sqrt{n})}.$$

Preuve. — Comme $A_s \subset A_t$, nous avons :

$$\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s) = \eta_n^{\bullet}(A_t - A_s),$$

et, par conséquent, l'événement $\{\omega_{n,\rho} > u\}$ est contenu dans la réunion des événements :

$$\{|\eta_n^{\bullet}(A_t - A_s)| > u\},$$

les indices s et t décrivant l'ensemble :

$$\{1, 2, \ldots, \Gamma(\rho)\}.$$

Il en résulte l'inégalité :

$$\Pr\{\omega_{n,\rho} > u\} \leqq \sum_{(s,t) \in \{1, 2, \ldots, \Gamma(\rho)\}^2} \Pr\{|\eta_n^{\bullet}(A_t - A_s)| > u\}.$$

Les différents termes de la somme sont ensuite majorés uniformément au moyen de la proposition 2, et de l'inégalité :

$$\Phi(A_t - A_s) < \rho. \quad \blacksquare$$

V. CONSTRUCTION D'UN MODULE D'APPROXIMATION A PARTIR D'UNE CONDITION INTÉGRALE PORTANT SUR L'APPLICATION Γ

Nous supposons que la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ vérifie la condition (5) relative aux moments, que la classe $\mathscr{C}$ possède une entropie relative à $\mu^{\bullet}$ et vérifie la condition intégrale :

$$\int_0^1 [\operatorname{Log}\Gamma(x^2)]^{1/2}\, dx < \infty. \tag{10}$$

La condition (10) implique :

$$\lim_{x \to 0_+} x \operatorname{Log} \Gamma(x) = 0 \tag{11}$$

et

$$\int_0^1 [\operatorname{Log} \Gamma(y)]^{1/2} y^{-1/2} \, dy < \infty. \tag{12}$$

La relation (12) entraîne à son tour, du fait de la décroissance de l'application $y \to [\operatorname{Log} \Gamma(y)]^{1/2} y^{-1/2}$,

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1}{K 2^l} \operatorname{Log} \Gamma\left(\frac{1}{K 2^l} \right) \right]^{1/2} < \infty. \tag{13}$$

Fixons $0 < \varepsilon < 1$ et choisissons un nombre réel α tel que $0 < \alpha < 1/3$, et un nombre entier naturel l_0 tels que l'on ait simultanément les relations (14) à (17) :

$$\Gamma(x) \leqq \exp \frac{\varepsilon^2}{4\,096 (K+1) x}, \quad \text{pour tout nombre réel } x \tag{14}$$

tel que $0 < x \leqq \alpha$, d'après (11);

$$\exp - \frac{\varepsilon^2}{2\,048 (K+1) \alpha} \leqq \frac{\varepsilon}{32}; \tag{15}$$

$$\sum_{l=l_0}^{\infty} \left[\frac{1}{K 2^l} \operatorname{Log} \Gamma\left(\frac{1}{K 2^l} \right) \right]^{1/2} \leqq \frac{\varepsilon}{32 \sqrt{10 (K+2)}}, \quad \text{d'après (13)}; \tag{16}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \exp\left(- \frac{K \varepsilon^2 2^{l+l_0}}{5 (K+2) 2^{11} (l+1)^4} \right) \leqq \frac{\varepsilon}{32}. \tag{17}$$

En outre, désignons par r un nombre entier naturel tel que l'on ait simultanément :

$$r \geqq l_0 \tag{18}$$

et :

$$\frac{1}{K 2^r} \leqq \alpha < \frac{1}{3}. \tag{19}$$

Posons enfin :

$$\rho_\varepsilon = \frac{1}{K\,2^r}; \tag{20}$$

dans cette notation, l'indice ε rappelle que r dépend de ε, par l'intermédiaire de (18) et de (19).

Considérons maintenant une suite ρ_ε-approximante pour $\mathscr{C}$ relativement à μ^* :

$$S_{\rho_\varepsilon} = (A_1, A_2, \ldots, A_{\Gamma(\rho_\varepsilon)});$$

nous étudions l'oscillation relative à cette suite. Pour tout borélien B de la classe $\mathscr{C}$ on notera $A_{s(B)}$ et $A_{t(B)}$ tous boréliens de classe S_{ρ_ε} tels que l'on ait simultanément :

$$A_{s(B)} \subset B \subset A_{t(B)} \tag{21}$$

$$\Phi(A_{t(B)} - A_{s(B)}) < \rho_\varepsilon. \tag{22}$$

DÉFINITION. — *Le nombre réel strictement positif* ε *étant donné, nous appellerons* oscillation de η_n^* relative à la suite S_{ρ_ε} *la variable aléatoire réelle :*

$$O_{n,\varepsilon} = \sup_{\substack{(B,B') \in \mathscr{C}^2 \\ d(B,B') < \rho_\varepsilon}} \left| \eta_n^*(A_{t(B)}) - \eta_n^*(A_{t(B')}) \right|. \tag{23}$$

PROPOSITION 4. — *Sous les hypothèses* (5) *et* (6), *nous avons pour n assez grand :*

$$\Pr\left\{ O_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2} \right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{24}$$

Preuve. — L'inégalité triangulaire relative à la pseudo-distance d sur l'ensemble $\mathscr{B}_b$ donne, pour tous éléments B et B′ de la classe $\mathscr{C}$:

$$d(A_{t(B)}, A_{t(B')}) \leqq d(A_{t(B)}, B) + d(B, B') + d(B', A_{t(B')}),$$

puis, par définition de d, et d'après (21) et (22) :

$$d(A_{t(B)}, A_{t(B')}) \leqq \Phi(A_{t(B)} - B) + d(B, B') + \Phi(A_{t(B')} - B') \leqq 2\rho_\varepsilon + d(B, B').$$

Il en résulte que la condition :

$$d(B, B') < \rho_\varepsilon$$

implique :

$$d(A_{t(B)}, A_{t(B')}) < 3\rho_\varepsilon.$$

De ce fait, en posant :

$$\pi_{n,\varepsilon} = \Pr\left\{ \sup_{[3\rho_\varepsilon]} |\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

où le supremum est pris relativement à la classe $[3\rho_\varepsilon]$ des couples (s, t) tels que l'on ait simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s, t) \in \{1, 2, \ldots, \Gamma(\rho_\varepsilon)\}^2 \\ \quad d(A_s, A_t) < 3\rho_\varepsilon, \end{array} \right. \tag{25}$$

nous obtenons :

$$\Pr\left\{ O_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2} \right\} < \pi_{n,\varepsilon}.$$

Par ailleurs, en remarquant les relations évidentes :

$$\begin{aligned} &|\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| \\ &\quad = |\eta_n^{\bullet}(A_t - A_s) + \eta_n^{\bullet}(A_t \cap A_s) - \eta_n^{\bullet}(A_s \cap A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s - A_t)| \\ &\qquad\qquad \leqq |\eta_n^{\bullet}(A_t - A_s)| + |\eta_n^{\bullet}(A_s - A_t)|, \end{aligned}$$

nous avons l'inclusion :

$$\begin{aligned} &\left\{ |\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\qquad \subset \left\{ |\eta_n^{\bullet}(A_t - A_s)| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \cup \left\{ |\eta_n^{\bullet}(A_s - A_t)| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \end{aligned}$$

et, compte tenu de la proposition 3,

$$\begin{aligned} &\Pr\left\{ |\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\qquad \leqq 2\exp\left(\frac{\varepsilon^2}{64[\Phi(A_t - A_s)]^2 + (8K\varepsilon/\sqrt{n})} \right) \\ &\qquad\qquad + 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{64[\Phi(A_s - A_t)]^2 + (8K\varepsilon/\sqrt{n})} \right). \end{aligned}$$

Sachant que

$$\Phi(A_t - A_s) \leqq \Phi(A_t \triangle A_s) = d(A_t, A_s) < 3\,\rho_\varepsilon,$$

que, d'après (19) et (20), $3\,\rho_\varepsilon < 1$, que, par conséquent $[\Phi(A_t - A_s)]^2 < 3\,\rho_\varepsilon$, et qu'une majoration analogue vaut pour $\Phi(A_s - A_t)$, nous obtenons :

$$\Pr\left\{ |\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leqq 4 \exp\left(- \frac{\varepsilon^2}{192\,\rho_\varepsilon + (8\,K\,\varepsilon/\sqrt{n})} \right).$$

Supposons que l'on ait :

$$\sqrt{n} \geqq \frac{\varepsilon\,K^2\,2^r}{8\,(16\,K + 13)}. \tag{26}$$

Nous obtiendrons, d'après (20) :

$$\frac{K\,\varepsilon}{\sqrt{n}} \leqq 8\,(16\,K + 13)\,\rho_\varepsilon$$

et, compte tenu de la condition (25) :

$$\pi_{n,\varepsilon} \leqq 4\,[\Gamma(\rho_\varepsilon)]^2 \exp - \frac{\varepsilon^2}{1\,024\,(K+1)\,\rho_\varepsilon}.$$

Les relations (14) et (19) donnent alors :

$$\pi_{n,\varepsilon} \leqq 4 \exp\left(- \frac{\varepsilon^2}{2\,048\,(K+1)\,\rho_\varepsilon} \right),$$

et, enfin, d'après (15), et sous réserve de la condition (26),

$$\Pr\left\{ O_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2} \right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \blacksquare$$

Il nous faut aller plus loin, en introduisant un nouveau module d'approximation plus fin que le précédent. Pour tout nombre entier naturel n non nul, désignons par $p(n)$ l'unique entier naturel tel que l'on ait :

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon\,K\,2^{p(n)+r-4}} \leqq 1, \tag{27}$$

et posons :

$$\rho_\varepsilon^n = \frac{1}{K\,2^{p(n)+r}}; \tag{28}$$

dans cette notation, l'indice ε rappelle que l'entier naturel r dépend de ε, par l'intermédiaire des relations (14), (15), (16), (18), (19). Considérons alors la suite ρ_ε^n-approximante :

$$(A_{p(n),\,q})_{1 \leq q \leq \Gamma(\rho_\varepsilon^n)}.$$

Ainsi, à tout borélien B de la classe $\mathscr{C}$ sont associés deux indices :

$$s[p(n), B] \qquad \text{et} \qquad t[p(n), B],$$

tels que :

$$\begin{cases} A_{p(n),\,s[p(n),\,B]} \subset B \subset A_{p(n),\,t[p(n),\,B]}. \\ \Phi(A_{p(n),\,t[p(n),\,B]} - A_{p(n),\,s[p(n),\,B]}) < \rho_\varepsilon^n. \end{cases} \tag{29}$$

Compte tenu de la majoration suivante, qui est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left\{ \left| \eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B)}) \right| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \\ \subset \left\{ \left| \eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\,t[p(n),\,B]}) \right| > \frac{\varepsilon}{8} \right\} \\ \cup \left\{ \left| \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\,t[p(n),\,B]}) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B)}) \right| > \frac{\varepsilon}{8} \right\}, \end{aligned} \tag{30}$$

nous introduirons les variables aléatoires réelles :

$$E'_{n,\,\varepsilon} = \sup_{B \in \mathscr{C}} \left| \eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\,t[p(n),\,B]}) \right|, \tag{31}$$

qui sera appelée dans ce qui suit *erreur d'approximation relative à la suite* $S_{\rho_\varepsilon^n}$, et :

$$E''_{n,\,\varepsilon} = \sup_{B \in \mathscr{C}} \left| \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\,t[p(n),\,B]}) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B)}) \right|, \tag{32}$$

appelée erreur *d'approximation entre les suites* S_{ρ_ε} *et* $S_{\rho_\varepsilon^n}$.

Nous serons amenés, dans les paragraphes qui suivent, à établir les inégalités :

$$\Pr\left\{ E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8} \right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}$$

et

$$\Pr\left\{ E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8} \right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Étudions, en premier lieu, l'erreur d'approximation relative à la suite $S_{p_\varepsilon^n}$. Nous touchons ici le nœud du problème car, outre une nouvelle application de l'inégalité de Bernstein-Fréchet, la proposition qui suit fait intervenir la définition même de la mesure aléatoire empirique normalisée d'ordre n :

$$\eta_n^{\bullet} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i^{\bullet} - \mu).$$

PROPOSITION 5. — *Toujours sous les hypothèses* (5) *et* (10), *nous avons, pour tout entier naturel non nul n :*

$$\Pr\left\{ E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8} \right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}. \tag{33}$$

Preuve. — A partir de la définition de $\eta_n^{\bullet}$, rappelée ci-dessus, nous avons, pour tout borélien B appartenant à la classe $\mathscr{C}$, pour tout nombre entier naturel n, et pour le borélien :

$$A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}$$

qui leur est associé par (28) et (29) :

$$\begin{aligned}\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} [\mu_i^{\bullet}(B) - \mu_i^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]})] \\ &\quad + \sqrt{n}\,[\mu(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) - \mu(B)].\end{aligned}$$

Comme la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ est positive, la double inclusion figurant dans (29) donne les inégalités :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} [\mu_i^{\bullet}(B) - \mu_i^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]})] \leqq 0$$

$$\mu(B) \geqq \mu(A_{p(n),\, s[p(n),\, B]}),$$

et par conséquent :

$$\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) \leqq \sqrt{n}\, \mu(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]} - A_{p(n),\, s[p(n),\, B]}).$$

En tenant compte de (4), de (29), et de la partie droite de la double inégalité (26), nous obtenons alors :

$$\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) \leqq \frac{\varepsilon}{16}. \tag{34}$$

On établit de la même façon que :

$$\eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, s[p(n),\, B]}) - \eta_n^{\bullet}(B) \leqq \frac{\varepsilon}{16}.$$

Comme

$$\begin{aligned}\eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) - \eta_n^{\bullet}(B) \\ = \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]} - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, s[p(n),\, B]}) \\ + \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, s[p(n),\, B]}) - \eta_n^{\bullet}(B),\end{aligned}$$

on déduit de ce qui précède :

$$\begin{aligned}\eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) - \eta_n^{\bullet}(B) \\ \leqq \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, s[p(n),\, B]}) + \frac{\varepsilon}{16}.\end{aligned} \tag{35}$$

Par ailleurs, l'application du lemme donne :

$$\begin{aligned}\Pr\Big\{ \sup_{[S_{\rho_\varepsilon^n}]} \big| \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) \\ - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),\, s[p(n),\, B]}) \big| > \frac{\varepsilon}{16} \Big\}\end{aligned} \tag{36}$$

$$\leqq 2[\Gamma(\rho_\varepsilon^n)]^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{256[4(\rho_\varepsilon^n)^2+(K\varepsilon/8\sqrt{n})]}\right).$$

Nous avons, d'après (28), (19) et (20) :

$$\rho_\varepsilon^n = \frac{1}{K\,2^{p(n)+r}} \leqq \frac{1}{K\,2^r} < 1,$$

d'où il résulte :

$$(\rho_\varepsilon^n)^2 \leqq \rho_\varepsilon^n.$$

De plus, la partie gauche de la double inégalité (27) implique :

$$\frac{K\varepsilon}{8\sqrt{n}} \leqq 4K\rho_\varepsilon^n,$$

et d'après (14) et (19), nous avons :

$$\Gamma(\rho_\varepsilon^n) \leqq \exp\frac{\varepsilon^2}{4096(K+1)\rho_\varepsilon^n}.$$

Il résulte alors des trois dernières inégalités que le second membre de (36) est majoré par :

$$2\exp-\frac{\varepsilon^2}{2048(K+1)\rho_\varepsilon^n},$$

ou encore, d'après (19) et (15), par $\frac{\varepsilon}{16}$.

Ce résultat, joint à l'inégalité (35) donne la relation annoncée :

$$\Pr\left\{E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}. \blacksquare$$

En vue d'étudier l'erreur d'approximation entre les suites S_{ρ_ε} et $S_{\rho_\varepsilon^n}$, il convient d'introduire un nouveau module d'approximation. Pour tout nombre entier naturel l, posons :

$$\rho_{\varepsilon,l} = \frac{1}{K\,2^{l+r}},$$

et considérons une suite $\rho_{\varepsilon, l}$ approximante :

$$S_{\varepsilon, l}=(A_{l, q})_{1 \leqq q \leqq \Gamma(\rho_{\varepsilon, l})}.$$

Ainsi, à tout borélien B de la classe $\mathscr{C}$ sont associés deux indices $s(l, B)$ et $t(l, B)$ appartenant à l'ensemble des nombres entiers $\{1, 2, \ldots, \Gamma(\rho_{\varepsilon, l})\}$, tels que :

$$\text{(37)} \qquad \begin{cases} A_{l, s(l, B)} \subset B \subset A_{l, t(l, B)} \\ \Phi(A_{l, t(l, B)} - A_{l, s(l, B)}) < \rho_{\varepsilon, l} \end{cases}.$$

Posons aussi, pour $l \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathscr{C}$,

$$\tilde{A}_{l, B}=A_{l, t(l, B)}-A_{l+1, t(l+1, B)}$$
$$\tilde{A}'_{l, B}=A_{l+1, t(l+1, B)}-A_{l, t(l, B)}.$$

PROPOSITION 6. — *Sous les hypothèses* (5) *et* (10) *relatives à* $\mu^{\bullet}$ *et* $\mathscr{C}$, *nous avons, pour tout nombre réel* $u>0$, *pour tout naturel* $n \geqq 1$, *pour tout* $l \in \{0, 1, \ldots, p(n)-1\}$, *et pour tout borélien* B *appartenant à la classe* $\mathscr{C}$:

$$\Pr\{|\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l, B})|>u\} \leqq 2 \exp\left(-\frac{u^2}{4\rho_{\varepsilon, l}+(2Ku/\sqrt{n})}\right),$$

ainsi qu'une relation analogue avec $\tilde{A}'_{l, B}$.

Preuve. — Comme l'application Φ est croissante, les relations (37) ainsi que les relations :

$$\begin{cases} A_{l+1, s(l+1, B)} \subset B \subset A_{l+1, t(l+1, B)} \\ \Phi(A_{l+1, t(l+1, B)} - A_{l+1, s(l+1, B)}) < \rho_{\varepsilon, l+1}, \end{cases}$$

qui en sont une conséquence immédiate, impliquent :

$$\Phi(\tilde{A}_{l, B}) < \rho_{\varepsilon, l}$$
$$\Phi(\tilde{A}'_{l, B}) < \rho_{\varepsilon, l+1}.$$

Par ailleurs, la proposition 3 donne :

$$\Pr\{|\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l, B})|>u\} \leqq 2 \exp - \frac{u^2}{4[\Phi(\tilde{A}_{l, B})]^2+(2Ku/\sqrt{n})}.$$

Sachant que

$$\Phi(\tilde{A}'_{l, B}) \leqq \rho_{\varepsilon, l+1} \leqq \rho_{\varepsilon, l},$$

et que

$$(\rho_{\varepsilon,l})^2 \leqq \rho_{\varepsilon,l},$$

du fait que : $K\,2^{r+l} \geqq K\,2^r \geqq 1$, d'après (19), on obtient les inégalités annoncées. ■

Nous introduisons, en outre, une suite $(u_{\varepsilon,l})_{l\in\mathbb{N}}$ de modules d'approximation. Posons, pour tout nombre entier naturel l :

$$(38)\qquad u_{\varepsilon,l} = \max\left(\frac{\varepsilon}{32(l+1)^2}, [10(K+2)\,\rho_{\varepsilon,l+1}\,\mathrm{Log}\,\Gamma(\rho_{\varepsilon,l+1})]^{1/2}\right).$$

LEMME 2. — *La suite* $(u_{\varepsilon,l})_{l\in\mathbb{N}}$ *définie par* (38) *vérifie les propriétés suivantes :*

$$(39)\qquad \sum_{l\in\mathbb{N}} u_{\varepsilon,l} < \frac{\varepsilon}{16}.$$

(40) *Pour tout nombre entier naturel* l,

$$\Gamma(\rho_{\varepsilon,l+1}) \leqq \exp\frac{(u_{\varepsilon,l})^2}{10(K+2)\,\rho_{\varepsilon,l+1}}.$$

(41) *Pour tout nombre entier naturel* l *tel que* $l \in \{0, 1, \ldots, p(n)-1\}$,

$$u_{\varepsilon,l} < \rho_{\varepsilon,l}\sqrt{n}.$$

Preuve. — 1° Du fait que :

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{(l+1)^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

nous tirons, de façon immédiate :

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{32(l+1)^2} < \frac{10\,\varepsilon}{192}.$$

Par ailleurs, du fait que $r \geqq l_0$ [hypothèse (18)], et d'après (16), nous avons :

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} [\rho_{\varepsilon,l+1}\,\mathrm{Log}\,\Gamma(\rho_{\varepsilon,l+1})]^{1/2}$$

$$= \sum_{l\geqq r+1}\left[\frac{1}{K\,2^l}\,\mathrm{Log}\,\Gamma\left(\frac{1}{K\,2^l}\right)\right]^{1/2} \leqq \frac{\varepsilon}{32\sqrt{10(K+2)}} \leqq \frac{\varepsilon}{96}.$$

L'inégalité (40) en résulte alors.

2° Par définition même de $u_{\varepsilon, l}$, nous avons :

$$[5(4+2K)\,\rho_{\varepsilon, l+1}\,\mathrm{Log}\,\Gamma(\rho_{\varepsilon, l+1})]^{1/2} \leqq u_{\varepsilon, l},$$

et par conséquent :

$$\Gamma(\rho_{\varepsilon, l+1}) \leqq \exp \frac{(u_{\varepsilon, l})^2}{10(K+2)\,\rho_{\varepsilon, l+1}}.$$

3° Nous avons, d'après (39) :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad u_{\varepsilon, l} \leqq \sum_{l \in \mathbb{N}} u_{\varepsilon, l} < \frac{\varepsilon}{16},$$

et, d'après la partie gauche de l'inégalité (27) :

$$\frac{\varepsilon}{16} < \frac{2\sqrt{n}}{K\,2^{p(n)+r}}.$$

L'inégalité annoncée résulte alors de ce que : $l \leqq p(n)-1$. ■

PROPOSITION 7. — *Toujours sous les hypothèses* (5) *et* (10), *nous avons, pour n assez grand :*

$$\Pr\left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l, B})| > \frac{\varepsilon}{16} \right\} \leqq \frac{\varepsilon}{16},$$

ainsi qu'une inégalité analogue pour $\tilde{A}'_{l, B}$.

Preuve. — Raisonnons sur $\tilde{A}_{l, B}$; la démarche est analogue avec $\tilde{A}'_{l, B}$. D'après (39), nous avons les inclusions :

$$\begin{aligned}\left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l, B})| > \frac{\varepsilon}{16} \right\} &\subset \left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l, B})| > \sum_{l \in \mathbb{N}} u_{\varepsilon, l} \right\} \\ &\subset \bigcup_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \left\{ \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l, B})| > u_{\varepsilon, l} \right\},\end{aligned}$$

puis, en passant aux probabilités, l'inégalité :

$$\text{(42)} \quad \Pr\left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l, B})| > \frac{\varepsilon}{16} \right\}$$

$$\leqq \sum_{l=0}^{p(n)-1} \Pr\{\sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > u_{\varepsilon,l}\}.$$

La proposition 6 donne, pour tout nombre entier naturel l :

$$\Pr\{|\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > u_{\varepsilon,l}\} \leqq 2\exp\left(-\frac{(u_{\varepsilon,l})^2}{4\rho_{\varepsilon,l}+(2K u_{\varepsilon,l}/\sqrt{n})}\right).$$

Nous obtenons alors, d'après la définition de $\tilde{A}_{l,B}$ et celle des indices $t(l, B)$:

$$(43) \quad \Pr\{\sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > u_{\varepsilon,l}\}$$
$$\leqq 2\Gamma(\rho_{\varepsilon,l})\Gamma(\rho_{\varepsilon,l+1})\exp\left(-\frac{(u_{\varepsilon,l})^2}{4\rho_{\varepsilon,l}+(2K u_{\varepsilon,l}/\sqrt{n})}\right).$$

Comme l'application Γ est décroissante, et comme :

$$\rho_{\varepsilon,l} = \frac{1}{K\,2^{r+l}},$$

nous avons, pour tout nombre entier naturel $l \geqq 1$:

$$\Gamma(\rho_{\varepsilon,l}) \leqq \Gamma(\rho_{\varepsilon,l+1}).$$

Avec cette dernière inégalité, jointe à (40) et (41), le premier membre de (43) est majoré par :

$$2\exp - \frac{(u_{\varepsilon,l})^2}{10(K+2)\rho_{\varepsilon,l}},$$

ou encore, en tenant compte de (18) et de (38), par :

$$2\exp\left(-\frac{K\varepsilon^2 2^{l+l_0}}{5(K+2)2^{11}(l+1)^4}\right).$$

Nous obtenons alors, d'après (42) et (17) :

$$\Pr\left\{\sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\right\}$$
$$\leqq 2\sum_{l=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{K\varepsilon^2 2^{l+l_0}}{5(K+2)2^{11}(l+1)^4}\right) \leqq \frac{\varepsilon}{16}. \blacksquare$$

Nous sommes enfin à même de conclure pour l'erreur d'approximation entre les suites S_{ρ_ε} et $S_{\rho_\varepsilon^n}$:

PROPOSITION 8. — *Toujours sous les hypothèses* (5) *et* (10) *nous avons, pour tout entier naturel non nul n :*

$$\Pr\left\{E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}. \tag{44}$$

Preuve. — Observons d'abord que l'inégalité triangulaire entre nombres réels donne, pour tout nombre entier naturel n, et pour tout borélien B appartenant à la classe $\mathscr{C}$, les majorations :

$$\begin{aligned} &|\eta_n^{\bullet}(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B)})| \\ &\quad \leqq \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} |\eta_n^{\bullet}(A_{l,t(l,B)}) - \eta_n^{\bullet}(A_{l+1,t(l+1,B)})| \\ &\quad \leqq \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| + \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} |\eta_n^{\bullet}(A'_{n,B})|, \end{aligned} \tag{45}$$

et l'inclusion :

$$\begin{aligned} &\left\{\sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B)})| > \frac{\varepsilon}{8}\right\} \\ &\quad \subset \left\{\sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\right\} \\ &\qquad \cup \left\{\sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}'_{l,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\right\}. \end{aligned} \tag{46}$$

Par conséquent, nous avons, en tenant compte de (32) :

$$\begin{aligned} \Pr\left\{E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\right\} &\leqq \Pr\left\{\sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\right\} \\ &\quad + \Pr\left\{\sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(A'_{l,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\right\}, \end{aligned}$$

et, d'après la proposition 6.

$$\Pr\left\{ E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8} \right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}. \blacksquare$$

VI. UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UNE CLASSE SOIT DE DONSKER

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mu^{\bullet}$ *une mesure aléatoire satisfaisant aux conditions* (5) *et* (7) *relatives aux moments.*

Soit $\mathscr{C}$ *une classe de boréliens bornés, possédant une entropie relativement à* $\mu^{\bullet}$, *et vérifiant les conditions* (1) *et* (2).

Sous ces hypothèses, la condition intégrale :

$$\int_0^1 [\operatorname{Log}\Gamma(x^2)]^{1/2}\, dx < +\infty \tag{10}$$

entraîne que $\mathscr{C}$ *est une classe de Donsker relativement à* $\mu^{\bullet}$.

Preuve. — Nous nous ramenons aux hypothèses du théorème 1. Puisque $\mathscr{C}$ possède une entropie pour $\mu^{\bullet}$, $\mathscr{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathscr{B}_b, d)$. Afin d'obtenir la condition de faible oscillation, il suffit de montrer que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, la mesure aléatoire vérifie, lorsque n est assez grand :

$$\Pr\{ \sup_{\substack{(B, B') \in \mathscr{C}^2 \\ d(B, B') < \rho_\varepsilon}} |\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(B')| > \varepsilon \} < \varepsilon, \tag{47}$$

le nombre ρ_ε ayant été défini en (20).

Pour cela, nous partirons de l'inclusion suivante, valable pour tous boréliens B et B′ de la classe $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned}\{|\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(B')| > \varepsilon\} \subset &\left\{ |\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B)})| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \\ &\cup \left\{ |\eta_n^{\bullet}(A_{t(B)}) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B')})| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\cup \left\{ |\eta_n^{\bullet}(A_{t(B')}) - \eta_n^{\bullet}(B')| > \frac{\varepsilon}{4} \right\},\end{aligned}$$

qui est conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire. Nous obtenons alors, d'après (23), (20), (31) et (32),

$$\Pr\{\sup_{\substack{(B,B')\in\mathscr{C}^2\\ d(B,B')<\rho_\varepsilon}} |\eta_n^*(B)-\eta_n^*(B')|>\varepsilon\}$$

$$\leqq \Pr\left\{O_{n,\varepsilon}>\frac{\varepsilon}{2}\right\}+2\left[\Pr\left\{E'_{n,\varepsilon}>\frac{\varepsilon}{8}\right\}+\Pr\left\{E''_{n,\varepsilon}>\frac{\varepsilon}{8}\right\}\right].$$

Il résulte, finalement, des relations (24), (33) et (44), la relation annoncée (47). ■

Le rôle de la condition intégrale (10) est pleinement mis en évidence. Dans le cas de mesures bornées, le théorème de Borisov [4] en souligne déjà le caractère draconien. Sous nos hypothèses plus générales, elle garde toute son importance.

RÉFÉRENCES

[1] G. BENNETT, Probability Inequalities for the Sum of Independant Random Variables, *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. **57**, 1962, p. 33-45.

[2] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[3] R. M. DUDLEY, Central Limit Theorems for Empirical Measures, *Ann. Probability.*, vol. **6**, 1978, p. 899-929.

[4] R. M. DUDLEY, *Cours de l'Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour*, 1982. *Lecture Notes in Mathematics*, n° **1097**, Springer Verlag, 1984.

[5] M. FRÉCHET, *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*, Premier livre, 1950.

[6] P. GAENSSLER et W. STUTE, Empirical Processes: a Survey of Results for Independant and Identically Distributed Random Variables, *Ann. Probability.*, vol. **7**, 1979, p. 193-243.

[7] P. JACOB, Convergence uniforme à distance finie des mesures signées, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **XV**, n° 4, 1979, p. 355-373.

[8] O. KALLENBERG, *Random Measures*, Academic Press, 1976.

(*Manuscrit reçu le* 26 *novembre* 1984)
(*corrigé le* 10 *avril* 1986.)