PH. BIANE

Relations entre pont et excursion du mouvement Brownien réel

Annales de l'I. H. P., section B, tome 22, nº 1 (1986), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 22, n° 1, 1986, p. 1-7. *Probabilités et Statistiques*

Relations entre pont et excursion du mouvement Brownien réel

par

Ph. BIANE
Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI,
Tour 56, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — A l'aide d'une description de la mesure d'Itô des excursions du mouvement Brownien, due à J. M. Bismut, on montre quelques relations entre le pont Brownien, l'excursion Brownienne normalisée, et leurs temps locaux.

ABSTRACT. — Using Bismut's description of Itô's excursion law, we show some relations between Brownian bridge and Brownian excursion, and their local times.

INTRODUCTION

Dans [*1*], W. Verwaat a montré comment on pouvait construire l'excursion normalisée du mouvement Brownien réel en prenant un pont Brownien, en coupant sa trajectoire à l'instant où il atteint son minimum, et en échangeant les deux bouts de trajectoire ainsi obtenus (cf. théorème 1 ci-dessous).

On va voir qu'une description de la mesure d'Itô des excursions du mouvement Brownien, due à J. M. Bismut [*2*] permet de retrouver ce résultat, ainsi que d'en donner une réciproque, c'est-à-dire, étant donné une excursion normalisée Brownienne, de construire un pont Brownien de telle

Liste de mots-clés : Pont Brownien, excursions, temps locaux.

sorte que la construction de Verwaat appliquée à ce pont redonne l'excursion de départ.

Cette description permet également de donner quelques résultats sur les processus des temps locaux du pont et de l'excursion Brownienne, qui font intervenir les constructions citées plus haut. En particulier, on retrouve un résultat de T. Jeulin [3] sur les temps locaux de l'excursion normalisée du mouvement Brownien.

Rappelons que l'on appelle excursion normalisée du mouvement Brownien le pont du processus de Bessel de dimension 3 valant 0 aux temps 0 et 1. (Voir [8] p. 79). De même, le pont Brownien désigne pour nous le mouvement Brownien issu de 0 et conditionné à valoir 0 au temps 1.

On introduit la notation suivante, dont on se servira dans la suite : Soit $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(0) = f(T) = 0$. Soit $\sigma \in [0, T]$, on note $V(f ; T ; \sigma)$ la fonction continue sur $[0, T]$ nulle en 0 et T telle que :

$$\begin{aligned} V(f ; T ; \sigma)(t) &= f(\sigma + t) - f(\sigma) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq T - \sigma \\ &= f(\sigma + t - T) - f(\sigma) \quad \text{pour} \quad T \geqq t \geqq T - \sigma . \end{aligned}$$

REMARQUE 1. — On vérifie immédiatement que :
pour tout $\sigma \in [0, T]$:

$$V(V(f ; T ; \sigma) ; T ; T - \sigma) = f .$$

1) LE THÉORÈME DE VERWAAT ET SA RÉCIPROQUE

THÉORÈME 1. — *Soit $(p(t))_{0 \leqq t \leqq 1}$ un pont Brownien, et ξ l'instant, presque sûrement unique, où il atteint son minimum sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. Alors, le processus $(e(t))_{0 \leqq t \leqq 1}$ défini par :*

$e = V(p ; 1 ; \xi)$ a pour loi celle de l'excursion normalisée du mouvement Brownien.

De plus, la variable $1 - \xi$ est indépendante de e, et uniformément répartie sur $[0, 1]$.

THÉORÈME 2. — *Soit $(e(t))_{0 \leqq t \leqq 1}$ l'excursion normalisée du mouvement Brownien, et η une variable indépendante de e, de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors le processus $(p(t))_{0 \leqq t \leqq 1}$ défini par : $p = V(e ; 1 ; \eta)$ a la loi du pont Brownien.*

De plus, $1 - \eta$ *est l'unique instant où p atteint son minimum sur l'intervalle temps* $[0, 1]$.

Remarque 2. — Le *théorème 1* est dû à W. Verwaat [*1*]. Les *théorèmes 1* et *2* fournissent des constructions réciproques, en effet, avec les notations du *théorème 2*, et d'après la remarque 1, on a : $e = \mathrm{V}(p\,;1\,;1-\eta)$ et $1-\eta$ est l'unique instant où p atteint sur minimum.

Les *théorèmes 1* et *2* sont démontrés dans la troisième partie.

2) QUELQUES RÉSULTATS SUR LES TEMPS LOCAUX

THÉORÈME 3. — *Soit* $(e(t))_{0 \leqq t \leqq 1}$ *l'excursion normalisée du mouvement Brownien. On désigne par* l^x *le temps local de e en x au temps 1.*

$$\textit{Soit} \quad \tau_t = \inf\left\{ x \;\middle|\; \int_0^x l^y dy = \int_0^1 1_{\{e(s) \leqq x\}} ds \geq t \right\} \quad \textit{pour} \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

(Rappelons que l'égalité qui figure dans la définition de τ_t *est la formule de densité d'occupation).*

Alors, le processus $\left(\frac{1}{2} l^{\tau_t}\right)_{0 \leqq t \leqq 1}$ *a la loi de l'excursion normalisée.*

Remarque 3. — La loi du processus $\left(\frac{1}{2} l^{\tau_t}\right)_{0 \leqq t \leqq 1}$ a été donnée par T. Jeulin dans [*3*].

THÉORÈME 4. — *Soit* $(p(t))_{0 \leqq t \leqq 1}$ *un pont Brownien. On appelle* m^x *son temps local en x au temps 1.*

Soit $\sigma_t = \inf\left\{ x \;\middle|\; \int_{-\infty}^x m^y dy = \int_0^1 1_{\{p(s) \leqq x\}} ds \geqq t \right\}$, *pour* $0 \leqq t \leqq 1$, *alors le processus*

$$\left(\frac{1}{2} m^{\sigma_t}\right)_{0 \leqq t \leqq 1}$$

a pour loi celle de l'excursion normalisée du mouvement Brownien.

Remarque 4. — Le fait que les processus $\left(\frac{1}{2} l^{\tau_t}\right)_{0 \leqq t \leqq 1}$ et $\left(\frac{1}{2} m^{\sigma_t}\right)_{0 \leqq t \leqq 1}$ des *théorèmes 3* et *4* ont la même loi, est une conséquence du *théorème 1* (ou du *théorème 2*). En effet, soit p un pont Brownien, m^x ses temps locaux, et σ comme dans le *théorème 4*, alors si on prend $e = \mathrm{V}(p\,;1\,;\xi)$ (ξ est toujours l'instant où p atteint son minimum), il est facile de voir que, avec les notations du *théorème 3* :

$$\frac{1}{2} l^{\tau_t} = \frac{1}{2} m^{\sigma_t} \qquad \text{pour tout} \quad t \in [0, 1].$$

Le *théorème 4* nous a permis de construire à partir d'un pont Brownien p, un processus $\left(\frac{1}{2} m^{\sigma_t}\right)_{0 \leqq t \leqq 1}$ ayant la loi de l'excursion normalisée du mouvement Brownien. D'après le *théorème 2* on peut construire, à partir de $\left(\frac{1}{2} m^{\sigma_t}\right)_{0 \leqq t \leqq 1}$, un pont Brownien, si l'on se donne une variable ρ indépendante de $\left(\frac{1}{2} m^{\sigma_t}\right)_{0 \leqq t \leqq 1}$ et uniformément distribuée sur $[0, 1]$.

Le théorème suivant nous fournit une expression explicite pour le choix d'une telle variable, en particulier, on voit qu'on peut la choisir mesurable par rapport à $(p_t)_{0 \leqq t \leqq 1}$.

THÉORÈME 5. — *On conserve les notations du théorème 4 :*

Soit $\rho = \int_0^1 1_{\{p(s) \leqq 0\}} ds = \int_{-\infty}^0 m^x dx$, *alors* ρ *est indépendante du processus* $\left(\frac{1}{2} m^{\sigma_t}\right)_{0 \leqq t \leqq 1}$ *et uniformément répartie sur* $[0, 1]$.

COROLLAIRE. — Le processus $V\left(\frac{1}{2} m^{\sigma}; 1; \rho\right)$ a la loi du pont Brownien.

3) PREUVES

Les démonstrations des *théorèmes 1* à *5* utilisent de façon essentielle les résultats de J. M. Bismut [*2*] que nous rappelons :

Soient Z et Z′ deux mouvements Browniens indépendants issus de 0, A une variable aléatoire indépendante de Z et Z′ ayant pour « loi » la mesure σ-finie $1_{\{a \geqq 0\}} da$ sur $\mathbb{R}_+$.

n désigne la mesure d'Itô des excursions positives du mouvement Brownien réel hors de 0 (voir [*7*] p. 123).

On pose $T = \inf\{t \mid Z_t = -A\}$, $T' = \inf\{t \mid Z'_t = -A\}$. Soient E et P les processus définis par :

$$\begin{aligned} E(t) &= Z_{T-t} + A && \text{pour} && 0 \leqq t \leqq T \\ &= Z'_{t-T} + A && \text{pour} && T \leqq t \leqq T + T' \\ P(t) &= Z'_t && \text{pour} && 0 \leqq t \leqq T' \\ & Z_{T+T'-t} && \text{pour} && T' \leqq t \leqq T' + T. \end{aligned}$$

On a alors les résultats suivants : (J. M. Bismut [*2*] *théorèmes 1-2* et *2-16*).

a) La loi du couple (T, E) est la mesure σ-finie $1_{\{0 \leqq t \leqq \sigma(e)\}} dt dn(e)$ (où $\sigma(e)$ désigne la longueur de l'excursion e).

b) Conditionnellement à $T + T' = 1$, P a la loi du pont Brownien. (La décomposition ci-dessus est une décomposition de Williams de la trajectoire de P à son minimum).

Remarquons que d'après *a*), conditionnellement à $T + T' = 1$ T est uniformément répartie sur $[0, 1]$ et indépendante de E, qui a la loi de l'excursion Brownienne normalisée. D'autre part, par construction de P, T' est l'unique instant auquel P atteint son minimum sur $[0, T + T']$.

Pour montrer les *théorèmes 1* et *2*, il suffit maintenant de remarquer que :

$$E = V(P; T + T'; T'), \quad P = V(E; T + T'; T)$$

et de conditionner par

$$T + T' = 1.$$

Pour étudier les temps locaux de E et P, on va utiliser une autre description de la loi de P :

Soit X un mouvement Brownien issu de 0, $(L^x{}_t)_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t \geqq 0}}$ la famille de ses temps locaux, L une variable indépendante de X, de « loi » la mesure σ-finie $2.1_{\{l \geqq 0\}} dl$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\tau = \inf\{t \mid L_t^0 = L\}$, alors, les processus $(P(t))_{0 \leqq t \leqq T+T'}$ et $(X_t)_{0 \leqq t \leqq \tau}$ ont la même loi. (Voir J. M. Bismut [*2*] *théorème 2.17*, ou J. Pitman-M. Yor [*4*] p. 307).

D'après Ray [*5*] et Knight [*6*], conditionnellement à $L = l$ fixé, les processus $\left(\frac{1}{2} L_\tau^x\right)_{x \geqq 0}$ et $\left(\frac{1}{2} L_\tau^{-x}\right)_{x \geqq 0}$ sont deux martingales indépendantes de variations quadratiques respectives :

$$\int_0^x L_\tau^y dy \quad \text{et} \quad \int_{-x}^0 L_\tau^y dy.$$

Effectuons les changements de temps suivants :

$$h^+(t) = \inf\left\{ x \,\middle|\, \int_0^x \mathrm{L}_\tau^y dy \geqq t \right\} \qquad \text{pour} \qquad t \leqq \int_0^\tau 1_{\{\mathrm{X}_s \geqq 0\}} ds = \rho^+$$

$$h^-(t) = \inf\left\{ x \,\middle|\, \int_{-x}^0 \mathrm{L}_\tau^y dy \geqq t \right\} \qquad \text{pour} \qquad t \leqq \int_0^\tau 1_{\{\mathrm{X}_s \leqq 0\}} ds = \rho^- .$$

Par la caractérisation de Paul Lévy, les deux processus

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{L}_\tau^{h^+(t)}\right)_{0 \leqq t \leqq \rho^+} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}_\tau^{h^-(t)}\right)_{0 \leqq t \leqq \rho^-}$$

sont deux mouvements Browniens indépendants conditionnellement à L, issus de $\frac{1}{2}$L et arrêtés à leur premier temps de passage en 0.

On voit donc que le triplet :

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{L} ; \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}_\tau^{h^+(t)}\right)_{0 \leqq t \leqq \rho^+} ; \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}_\tau^{h^-(t)}\right)_{0 \leqq t \leqq \rho^-}\right)$$

a même loi que

$$(\mathrm{A} ; (\mathrm{A} + \mathrm{Z}_t')_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}'} ; (\mathrm{A} + \mathrm{Z}_t)_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}}) .$$

Donc, si
$$\mathrm{M}_t = \frac{1}{2}\mathrm{L}_\tau^{h^+(t)} - \frac{1}{2}\mathrm{L} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq t \leqq \rho^+$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{L}_\tau^{h^-(\tau - t)} - \frac{1}{2}\mathrm{L} \qquad \text{pour} \qquad \rho^+ \leqq t \leqq \tau$$

M a la même loi que P (ou X);

En conditionnant par $\tau = 1$, on voit donc que, avec les notations du *théorème 4*, le processus $\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}m^\sigma ; 1 ; \rho\right)$ est un pont Brownien, et que $1 - \rho$ est l'instant où il atteint son minimum. Appliquons maintenant le *théorème 1* :

$\frac{1}{2}m^\sigma = \mathrm{V}\left(\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}m^\sigma ; 1 ; \rho\right) ; 1 - \rho\right)$ est une excursion normalisée, et ρ est indépendant du processus $\frac{1}{2}m$, d'où les *théorèmes 4* et *5* et donc le *théorème 3* d'après la remarque 4.

RÉFÉRENCES

[1] W. Verwaat, A relation between Brownian bridge and Brownian excursion. *Ann. of Proba.*, t. **7**, n° 1, 1979, p. 143-149.

[2] J. M. Bismut, Last exist decompositions and regularity at the boundary of transition probability. *Zeit. für Wahr.*, t. **69**, 1985, p. 65-99.

[3] T. Jeulin, Applications de la théorie du grossissement de filtrations à l'étude des temps locaux du mouvement Browniens. Springer, *Lecture Notes in Math.*, t. **1118**, p. 197-305.

[4] J. Pitman, M. Yor, Bessel processes and infinitely divisible laws. Stochastic integrals. Proceedings LMS, Durham, 1980. Springer, *Lecture Notes in Math.*, t. **851**.

[5] D. Ray, Sojourn times of diffusion processes. *Ill. J. Math.*, t. **7**, 1965, p. 615-630.

[6] F. B. Knight, Random walk and a sojourn density of Brownian motion. *T. A. M. S.*, t. **109**, 1965, p. 56-86.

[7] N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North-Holland, 1981.

[8] K. Ito, H. P. Mac-Kean, *Diffusion process and their sample path.* Springer-Verlag, Berlin, 1965.

(Manuscrit reçu le 15 mars 1985)
(révisé le 23 avril 1985)