ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

LAURENT SCHWARTZ

Le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^N$, en tant que semi-martingale dans S_N

Annales de l'I. H. P., section B, tome 21, nº 1 (1985), p. 15-25

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1985__21_1_15_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 21, n° 1, 1985, p. 15-25. *Probabilités et Statistiques*

Le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^N$, en tant que semi-martingale dans S_N

par

Laurent SCHWARTZ
Centre de Mathématiques, École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex

RÉSUMÉ. — Le mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^N$ est, considéré comme à valeurs dans $S_N = \mathbb{R}^N \cup \{ \infty \}$, une semi-martingale dans $[0, +\infty] \times \Omega$ pour $N \geqslant 3$, pour les temps montants ou descendants.

ABSTRACT. — Brownian motion on $\mathbb{R}^N$, as a process with values in $S_N = \mathbb{R}^N \cup \{ \infty \}$, is a semi-martingale in $[0, +\infty] \times \Omega$ for $N \geqslant 3$ for increasing or decreasing times.

§ 1. ÉNONCÉ ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Soient $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathscr{T}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, \mathbb{P})$ un ensemble filtré probabilisé, vérifiant les conditions habituelles (sauf peut-être le caractère $\mathbb{P}$-complet des $\mathscr{T}_t$), et B une martingale continue sur $[0, +\infty[\times \Omega$, de loi brownienne $\mathbb{P}$ de distribution initiale $B_0(\mathbb{P}) = \mu$ sur $\mathbb{R}^N$($B_t - B_s$ est gaussienne de paramètre $\sqrt{t-s}$, indépendante de $\mathscr{T}_s, 0 \leqslant s < t < +\infty$). Pour $N \geqslant 3$, on sait que, quand $t \to +\infty$, B_t tend p. s. vers ∞ dans $\mathbb{R}^N$, et même que, pour tout $\alpha < \dfrac{1}{2}$, B_t/t^α tend p. s. vers ∞, ce que nous écrirons $| B_t |^{-1} \leqslant Ct^{-\alpha}$, C dépendant de α et ω [1]. Si alors on plonge $\mathbb{R}^N$ dans son compactifié d'Alexandroff $S_N = \mathbb{R}^N \cup \{ \infty \}$, la sphère munie de sa structure différentielle usuelle, on peut prolonger B en $\overline{B}$, défini sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ à valeurs dans S_N, p. s. continu, en posant $\overline{B}(+\infty) = B_{(+\infty)-} = \infty$. On connaît la signification de semi-martingale à valeurs dans une variété différentielle [2]. Alors :

THÉORÈME (1.1). — Sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, $\overline{B}$ est une semi-martingale pour $((\mathscr{C}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, \mathbb{P})$, à valeurs dans S_N, pour $N \geqslant 3$.

Remarque. — Ω est quelconque, et les tribus $\mathscr{C}_t$ sont peut-être bien plus grandes que les tribus naturelles engendrées par B.

Démonstration. — Nous allons montrer que $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est réunion d'une suite d'ouverts optionnels dans chacun desquels elle est restriction d'une semi-martingale [3]. C'est vrai dans $[0, n[\times \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, où $\overline{B} = B^n$, brownien arrêté au temps n. Il suffit de le montrer pour l'ouvert $]1, +\infty] \times \Omega$; il suffit pour cela qu'elle soit une semi-martingale dans $[1, +\infty] \times \Omega$, car, en prolongeant celle-ci par une constante dans $[0, 1[\times \Omega$, on en fait une semi-martingale sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. On va donc montrer que $\overline{B}$, restreinte à $[1, +\infty[\times \Omega$, est restriction d'une semi-martingale sur $[1, +\infty] \times \Omega$ (temps initial 1). Appelons Φ l'inversion de S_N, $x \mapsto \dfrac{x}{|x|^2}$ avec $\Phi(0) = \infty$, $\Phi(\infty) = 0$; il suffit de montrer que $\Phi(\overline{B})$, sur $[1, +\infty[\times \Omega$, est restriction d'une semi-martingale sur $[1, +\infty] \times \Omega$. Par Ito, sur $[1, +\infty[\times \Omega$:

$$(1.2)\quad \Phi(B_t) - \Phi(B_1) = \sum_{k=1}^{N} \int_1^t \partial_k \Phi(B_s) d B_s^k + \frac{1}{2} \int_1^t \Delta\Phi(B_s) ds = M + V,$$

ou les B^k sont les coordonnées de B dans $\mathbb{R}^N$. Cette formule n'est vraie que dans $([1, +\infty[\times \Omega')$, $\Omega' = \{ \omega \in \Omega ; \forall t, B_t(\omega) \neq 0 \}$, mais $B \neq 0$, $\mathbb{P}$ p. s.

---

(1) Voir DVORETZY et ERDÖS, *Some problems on random walk in space. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Probabilities*, 1951, p. 353-367.

(2) Voir L. SCHWARTZ, Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. **780**, 1980, définition (1.2), page 6. Dans le cas vectoriel, si les $\mathscr{C}_t$ ne sont pas $\mathbb{P}$-complètes, on considérera comme semi-martingale une somme $X = V + M$, *$\mathscr{C}$-adaptée*, V et M adaptées pour les tribus $\mathbb{P}$-complétées $\mathscr{C}_t \vee \mathscr{N}_{\mathbb{P}}$, V $\mathbb{P}$ p.s. à variation finie càdlàg, M $\mathbb{P}$ p.s. càdlàg, $(\mathscr{C}_t \vee \mathscr{N}_{\mathbb{P}})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$-martingale locale.

(3) L. SCHWARTZ, *loc. cit.*, proposition (2.4), page 10.

En calculant les dérivées successives de Φ, on voit aussitôt que

$$(1.3)\qquad |\partial_k\Phi(x)| \leqslant \text{const.}\, |x|^{-2}, \qquad |\Delta\Phi(x)| \leqslant \text{const.}\, |x|^{-3}.$$

Le processus V est à variation finie jusqu'au temps $+\infty$; en effet sa variation est

$$(1.4)\quad \int_1^{+\infty} |dV_s| \leqslant \text{const.} \int_1^{+\infty} |B_s|^{-3} ds \leqslant C\,\text{const.} \int_1^{+\infty} s^{-3\alpha} ds,$$

α quelconque $< \frac{1}{2}$ donc $3\alpha < \frac{3}{2}$, donc on peut le prendre > 1. Donc V est prolongeable en $\overline{V}$, processus à variation finie dans $[1, +\infty] \times \Omega$, en posant $\overline{V}(\infty) = V(\infty_-)$. Ensuite M est une martingale locale sur $[1, +\infty[\, \times \Omega$; si Φ^i est la i-ème composante de Φ, $\Phi^i(x) = x^i/|x|^2$,

$$(1.5)\quad |[M^i, M^j]_t| = \left| \int_1^t \sum_{k=1}^N \partial_k\Phi^i(B_s)\partial_k\Phi^j(B_s) ds \right|$$
$$\leqslant \text{const.} \int_1^t |B_s|^{-4} ds \leqslant \text{const.}\, C \int_1^{+\infty} s^{-4\alpha} ds.$$

Comme plus haut, 4α peut être pris > 1, donc $[M, M]_t$ a p. s. une limite pour $t \to +\infty$, et par suite M aussi, et elle est prolongeable en $\overline{M}$, martingale locale dans $[1, +\infty] \times \Omega$, avec $\overline{M}_\infty = M_{\infty-}$, ce qui achève la démonstration. ■

Remarque (1.6). — Le début, pour passer de $[0, +\infty[$ à $[1, +\infty[$, est lourd, par souci de dire « tout », mais on se passera dans la suite de telles précisions !

(1.7) Si Ω est l'espace des trajectoires continues $C([0, +\infty[\,; \mathbb{R}^N)$, $\overline{\Omega}$ l'espace $C([0, +\infty]; S_N)$, chacun muni de la plus petite famille de tribus croissante et continue à droite, qui rende le processus canonique π, $\overline{\pi}$, $\pi_t(\omega) = \omega_t$, $\overline{\pi}_t(\omega) = \omega_t$, adapté, bien évidemment il existe une injection naturelle $\overline{\Omega} \to \Omega$, les tribus de $\overline{\Omega}$ sont les images réciproques de celles de Ω, et $\overline{\pi}$ est l'image réciproque de π. Alors l'énoncé (1.1) équivaut à dire que $\mathbb{P}$ provient d'une $\overline{\mathbb{P}}$ sur $\overline{\Omega}$, unique, et qui fait de $\overline{\pi}$ une semi-martingale.

(1.8) Ainsi, dans S_N, $N \geqslant 3$, B ressemble à un pont brownien sur $[0, +\infty]$; c'est une semi-martingale, qui part de $a \in S_N$ si $\mu = \delta_{(a)}$, au temps 0, et qui arrive en $\infty \in S_N$ au temps $+\infty$ (voir à ce sujet l'article suivant de M. Yor).

§ 2. MÊME ÉNONCÉ, AVEC INVERSION DU SENS DU TEMPS

Soit I un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, ouvert, semi-ouvert ou fermé, $(\mathrm{I} \times \mathrm{I})_+$ le sous-ensemble $\{ (s, t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I} \,; s < t \}$ de $\mathrm{I} \times \mathrm{I}$, q une fonction > 0 borélienne sur $(\mathrm{I} \times \mathrm{I})_+ \times \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, telle que, $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $\forall (s, t) \in (\mathrm{I} \times \mathrm{I})_+$, $\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} q(s, t \,; x, y) dy = 1$.

On appelle relation de Chapman-Kolmogorov la relation suivante :

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \forall r, s, t,\ r < s < t :$$

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} q(r, s \,; x, z) q(s, t \,; z, y) dz = q(r, t \,; x, y) . \tag{2.1}$$

Si cette relation est vérifiée, on dira que q définit une probabilité de transition ; la répartition conditionnelle à l'instant $t > s$, lorsqu'on sait que l'on part de x à l'instant s, est $q(s, t \,; x, y) dy$. Alors q permet de construire un processus ; il est indexé par les temps de I ; sa loi pour les temps $\geqslant \sigma \in \mathrm{I}$, $\mathbb{P}_\sigma^\mu$, correspondant à une répartition initiale μ sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ à l'instant initial σ, est donnée par ses projections marginales ; soient $\sigma < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$:

$$(2.2)\quad (\pi_0, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n})(\mathbb{P}_\sigma^\mu) =$$
$$= \mu(dx_\sigma) q(\sigma, t_1 \,; x_\sigma, x_{t_1}) dx_{t_1} q(t_1, t_2 \,; x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_2} \ldots q(t_{n-1}, t_n \,; x_{t_{n-1}}, x_{t_n}) dx_{t_n} .$$

La probabilité $\mathbb{P}_\sigma^\mu$, d'après un théorème classique de Kolmogorov, est portée par l'espace $(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})^{\mathrm{I}}$ de toutes les trajectoires, muni de la plus petite tribu rendant toutes ses projections π_t mesurables, et π est le processus canonique, $\pi_t(\omega) = \omega_t$. Il ne possède, s'il n'y a pas d'hypothèses supplémentaires sur q, aucune autre propriété intéressante que la propriété simple de Markov. Le processus est dit markovien continu si les lois marginales définissent une probabilité $\mathbb{P}_\sigma^\mu$ sur l'espace des trajectoires continues, quels que soient σ et μ, et si le processus ainsi formé est fortement markovien. Le plus connu de ces processus markoviens continus est le mouvement brownien, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, et, pour $s < t$:

$$(2.3)\quad \left\{ \begin{aligned} & q(s, t \,; x, y) = \gamma_{t-s}(y - x) , \\ & \qquad \gamma_\theta(\xi) = \text{gaussienne de paramètre } \sqrt{\theta} \text{ sur } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} (\theta > 0) \\ & \qquad\qquad = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \right)^{\mathrm{N}} \exp\left(- \mid \xi \mid^2 / 2\theta\right) . \end{aligned} \right.$$

A partir d'une fonction q, on peut en former une autre $\check{q}$ sur

$((-\mathrm{I})\times(-\mathrm{I}))_- \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $\quad ((-\mathrm{I})\times(-\mathrm{I}))_- = \{ (t,s)\in(-\mathrm{I})\times(-\mathrm{I}),\ t>s \}$,

en posant $\check{q}(t,s) = q(-t,-s)$. Il définit cette fois un processus « à temps descendant » ; $\check{q}(t,s;x,y)dy$ est la loi conditionnelle de π_s lorsqu'on sait que $\pi_t = x$; les lois marginales du processus pour une distribution ν à l'instant initial $\tau \in -\mathrm{I}$, sont données, pour $t_1 < t_2 \ldots < t_n < \tau$, par :

(2.4) $(\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\check{\mathbb{P}}^\nu_\tau) =$
$\nu(dx_\tau)\check{q}(\tau, t_n; x_t, x_{t_n})dx_{t_n}\check{q}(t_n, t_{n-1}; x_{t_n}, x_{t_{n-1}})dx_{t_{n-1}} \ldots \check{q}(t_2, t_1; x_{t_2}, x_{t_1})dx_{t_1}$.

Par changement de signe du temps, on passe du processus à temps montant au processus à temps descendant, de sorte que, si q définit un processus markovien continu à temps montant, il en est de même de $\check{q}$ à temps descendant ; c'est le cas pour q définie par (2.3), avec en plus $\check{q}(t,s) = q(s,t) = \gamma(t-s)$; on obtiendra un mouvement brownien à temps descendant, pour lequel on se fixera une distribution initiale ν à l'instant τ, et $\check{\mathbb{P}}^\nu_\tau$ sera portée par l'espace des trajectoires continues sur $]-\infty, \tau]$.

(2.4.1) On va maintenant définir les ponts browniens. Soit $b\in\mathbb{R}^N$, $\tau\in\mathrm{I}$. Soit q définissant un markovien continu à temps montant. Prenons une nouvelle probabilité de transition p, sur $(\mathrm{I}'\times\mathrm{I}')_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cap [-\infty, \tau[$, définie, pour $s < t < \tau$, par :

(2.4.2) $$p(s,t;x,y) = q(s,t;x,y)q(t,\tau;y,b)/q(s,\tau;x,b) ;$$

p est le conditionnement de q par $\pi_\tau = b$. Les p forment un nouveau système de probabilités de transition, vérifiant Chapman-Kolmogorov ; pour un départ de distribution μ au temps σ, $\sigma < \tau$, on a une probabilité $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$ sur l'espace des trajectoires, définie par ses lois marginales, pour $\sigma < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \tau$:

(2.5) $(\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n})(\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}) =$
$$\mu(dx_\sigma)q(\sigma, t_1; x_\sigma, x_{t_1})dx_{t_1}q(t_1, t_2; x_{t_1}, x_{t_2})dx_{t_2} \ldots$$
$$\ldots q(t_{n-1}, t_n; x_{t_{n-1}}, x_{t_n})dx_{t_n}q(t_n, \tau; x_{t_n}, b)/q(\sigma, \tau; x_\sigma, b)$$

On démontre alors aisément que, si les q définissent un markovien continu, les p en définissent un aussi dans $\mathrm{I} \cap [-\infty, \tau[$, peut être pas dans $\mathrm{I} \cap [-\infty, \tau]$; paradoxalement, bien qu'on ait conditionné par $\pi_\tau = b$, on ne peut pas affirmer que, $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$ – p. s., π_t ait la limite b lorsque $t < \tau$ tend vers τ, ni même qu'il ait une limite ! Le « conditionnement par $\pi_\tau = b$ » est donc assez platonique. Cependant, dans le cas brownien de (2.3), on montrera plus loin que $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$ est bien définie sur $C([\sigma,\tau];\mathbb{R}^N)$, avec $\pi_\tau = b$.

Il existe bien entendu des propriétés analogues relativement à $\check{q}$, mais en conditionnant par $\pi_\sigma = a \in \mathbb{R}^N$, pour l'intervalle de temps $(-I)\cap]\sigma, +\infty]$ ou $(-I)\cap]\sigma,+\infty]$. Les lois marginales de $\check{\mathbb{P}}^{\nu,a}_{\tau,\sigma}$ sont :

$$(2.6)\quad (\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\check{\mathbb{P}}^{\nu,a}_{\tau,\sigma})$$
$$\nu(dx_\tau)\check{q}(\tau, t_n ; x_\tau, x_{t_n})dx_{t_n}\check{q}(t_n, t_{n-1} ; x_{t_n}, x_{t_{n-1}})dx_{t_{n-1}} \ldots$$
$$\ldots \check{q}(t_2, t_1 ; x_{t_2}, x_{t_1})dx_{t_1}\check{q}(t_1, \sigma ; x_{t_1}, a)/\check{q}(\tau, \sigma ; x_\tau, a).$$

Dans les cas où, comme pour le mouvement brownien, $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$ est définie sur $C([\sigma,\tau];\mathbb{R}^N)$, on peut dans (2.5), calculer aussi la projection $(\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)$, en rajoutant à la fin un facteur $\delta_{(b)}(dx_\tau)$, et de même, dans (2.6), en rajoutant à la fin un facteur $\delta_{(a)}(dx_\sigma)$.

Ce qu'on appelle plus spécialement le pont brownien, en a au temps σ et en b au temps τ, est le processus canonique π, $\pi_t(\omega)=\omega_t$, sur $\Omega = C([\sigma,\tau];\mathbb{R}^N)$, pour la probabilité $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$ où $\mu=\delta_{(a)}$, ce qu'on notera $\mathbb{P}^{a,b}_{\sigma,\tau}$. Mais il existe aussi un pont brownien à temps descendant, relatif à $\check{\mathbb{P}}^{b,a}_{\tau,\sigma}$. *Et c'est le même* en ce sens que $\Omega = C([\sigma,\tau];\mathbb{R}^N)$ est le même et que $\mathbb{P}^{a,b}_{\sigma,\tau} = \check{\mathbb{P}}^{b,a}_{\tau,\sigma}$ à cause de la parité de γ_θ, $\gamma_\theta(-\xi) = \gamma_\theta(\xi)$:

$$(2.7)\quad (\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\check{\mathbb{P}}^{b,a}_{\tau,\sigma}) =$$
$$= \delta_{(b)}(dx_\tau)\gamma_{\tau-t_n}(x_{t_n}-x_\tau)dx_{t_n}\gamma_{t_n-t_{n-1}}(x_{t_{n-1}}-x_{t_n})dx_{t_{n-1}}$$
$$\ldots \gamma_{t_2-t_1}(x_{t_1}-x_{t_2})dx_{t_1}\gamma_{t_1-\sigma}(a-x_{t_1})\delta_{(a)}(dx_\sigma)/\gamma_{\tau-\sigma}(a-b)$$
$$= \delta_{(a)}(dx_\sigma)\gamma_{t_1-\sigma}(x_{t_1}-a)dx_{t_1}\gamma_{t_2-t_1}(x_{t_2}-x_{t_1})dx_{t_2}\ldots$$
$$\ldots \gamma_{t_n-t_{n-1}}(x_{t_n}-x_{t_{n-1}})dx_{t_n}\gamma_{\tau-t_n}(x_\tau-x_{t_n})\delta_{(b)}(dx_\tau)/\gamma_{\tau-\sigma}(b-a)$$
$$= (\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\mathbb{P}^{a,b}_{\sigma,\tau}).$$

Regardons maintenant les propriétés de semi-martingales dans le cas brownien (2.3). Pour la probabilité $\mathbb{P}^\mu_\sigma$ sur $C([\sigma,+\infty[;\mathbb{R}^N)$, le processus canonique π, brownien, est une martingale pour ses tribus naturelles. Le processus π est encore une semi-martingale sur $C([\sigma,\tau[;\mathbb{R}^N)$ pour $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$.

En effet, *en projection* sur $C([\sigma,\tau'];\mathbb{R}^N)$, $\tau'<\tau$, $\mathbb{P}^a_\sigma$ et $\mathbb{P}^{a,b}_{\sigma,\tau}$ sont des mesures équivalentes ; ceci est vrai en général, pas seulement dans le cas gaussien [Appelons Ω' l'ensemble $C([\sigma,\tau'];\mathbb{R}^N)$. Alors les lois marginales (2.2), (2.5), montrent que $\mathbb{P}'^{a,b}_{\sigma,\tau}(d\omega') = \dfrac{\mathbb{P}'^a_\sigma(d\omega')q(\tau',\tau;\omega'(\tau'),b)}{q(\sigma,\tau;a,b)}$, ce qui montre bien l'équivalence] ; alors Girsanov montre bien que π' est une $(\mathbb{P}^{a,b}_{\sigma,\tau})$-semi-martingale sur $[\sigma,\tau']\times C([\sigma,\tau'];\mathbb{R}^N)$, donc aussi π sur $[\sigma,\tau[\times C([\sigma,\tau[;\mathbb{R}^N)$. Ensuite les lois marginales montrent aussitôt que $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}^{a,b}_{\sigma,\tau}\,\mu(da)$, donc π est une $(\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau})$-semi-martingale sur $[\sigma, \tau[\times C([\sigma, \tau[\times \mathbb{R}^N)$ par le théorème de convexité de Jacod (4). Mais considérons $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$ sur $\Omega = C([\sigma, \tau[; \mathbb{R}^N)$ et les tribus naturelles ; nous allons voir que π_t a non seulement une limite p.s. lorsque $t < \tau$ tend vers τ, mais que π se prolonge en une semi-martingale $\bar{\pi}$ sur $[\sigma, \tau] \times \Omega$, de sorte qu'on peut le considérer comme une semi-martingale sur $[\sigma, \tau] \times (\bar{\Omega} = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ et les tribus naturelles, et la probabilité $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$ sur $\bar{\Omega} = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$.

On doit, pour le voir, utiliser des propriétés très particulières dues à la loi gaussienne. On montre (5) que, pour les tribus montantes, et $\mathbb{P}^{a,b}_{\sigma,\tau}$ sur $\Omega = C([\sigma, \tau[; \mathbb{R}^N)$, si on pose $M_t = \dfrac{b - \pi_t}{\tau - t}$, M est une martingale dont le crochet, à valeurs dans $\mathbb{R}^N \odot \mathbb{R}^N$, est donné par

$$(2.8) \quad [M, M]_t - [M, M]_\sigma = \frac{\theta}{\tau - t} - \frac{\theta}{\tau - \sigma}, \qquad \theta = \sum_{k=1}^{N} e_k \odot e_k,$$

où $(e_k)_{k=1,2,\ldots,N}$ est la base de $\mathbb{R}^N$. Ito donne

$$(2.9) \qquad b - \pi_t = (\tau - t).M + M.(\tau - t),$$

en notant $(\tau - t)$ le processus $t \mapsto \tau - t$. Alors $M.(\tau - t)$ est un processus V à variation localement finie dans $[\sigma, \tau[$, avec :

$$(2.10) \qquad \int_\sigma^t |dV_s| = \int_\sigma^t |M_s| \, ds,$$

$$(2.10.1) \quad \mathbb{E}^{a,b}_{\sigma,\tau} \int_\sigma^t |dV_s| \leqslant \mathbb{E}^{a,b}_{\sigma,\tau} \int_\sigma^t M_s^* ds = \int_\sigma^t (\mathbb{E}^{a,b}_{\sigma,\tau} M_s^*) ds$$
$$\leqslant \text{const.} \int_\sigma^t (\mathbb{E}^{a,b}_{\sigma,\tau} [M, M]_s^{1/2}) ds \leqslant \text{const.} \int_\sigma^t \left(\frac{1}{\tau - s}\right)^{1/2} ds \leqslant \text{const.}$$

(4) Ce théorème, vrai pour une intégrale de probabilités, est un peu partout démontré dans le cas d'une combinaison convexe *dénombrable* (voir par exemple J. JACOD : Calcul stochastique et problèmes de martingales, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. **714**, 1979, chap. VII, 2, § *e*, Théorème (7.42), page 235), mais, semble-t-il, ne figure nulle part avec une intégrale ! Cela tient à ce que Jacod a démontré le théorème avant le critère de Dellacherie pour les semi-martingales ; depuis que ce critère est connu, le théorème de Jacod est devenu trivial, même pour une intégrale de mesures.

(5) Voir T. JEULIN et M. YOR, Inégalité de Hardy, semi-martingales, et faux-amis. Séminaire de Probabilités XIII, 1977-1978, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. **721**, 1979, p. 332-359.

quand $t \to \tau$, où $|\ |$ est la norme dans $\mathbb{R}^N \odot \mathbb{R}^N$, et $\overline{M}_s^* = \sup_{\sigma \leqslant s' \leqslant s} |M_{s'}|$.

Donc $\int_\sigma^\tau |dV_s| < +\infty$ p.s., et V se prolonge en $\overline{V}$, à variation finie sur $[\sigma, \tau] \times \Omega$, $\overline{V}_\tau = V_{\tau-}$.

Ensuite $(\tau - t).M$ est une martingale N dans $[\sigma, \tau[\times \Omega$, et pour $t < \tau$:

$$(2.11) \quad [N, N]_t = \int_\sigma^t (\tau - s)^2 d[M, M]_s$$

$$\leqslant \text{const.} \int_\sigma^t (\tau - s)^2 d\left(\frac{1}{\tau - s}\right) = \text{const.} \int_0^t (\tau - s)^2 \frac{ds}{(\tau - s)^2} \leqslant \text{const.}$$

quand $t \to \tau$.

Donc $[N, N]_t$ est borné quand $t < \tau$ tend vers τ, et par suite N se prolonge en une martingale $\overline{N}$ sur $[\sigma, \tau] \times \Omega$, $\overline{N}_\tau = N_{\tau-}$.

Donc π se prolonge en une semi-martingale $\overline{\pi}$ sur $[\sigma, \tau] \times \Omega$, donc aussi sur $[\sigma, \tau] \times \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega} = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ muni de ses tribus naturelles. Par le théorème de convexité de Jacod, c'est aussi vrai pour $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b} \mu(da)$.

Le même résultat est valable à temps descendant, avec $\check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{\nu,a}$ sur $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$; ce qui remplace M est $\check{M}$, $\check{M}_t = \dfrac{\pi_t - a}{t - \sigma}$.

Il est donc légitime de chercher un énoncé analogue au théorème (1.1), mais à temps descendant :

THÉORÈME (2.12). — Sur $\Omega = C([0, +\infty[; \mathbb{R}^N)$, ou $C([0, +\infty]; S_N)$ pour $N \geqslant 3$, le processus canonique π, pour la plus petite famille de tribus décroissante et continue à gauche rendant π adapté, est une semi-martingale pour la probabilité du mouvement brownien montant $\mathbb{P}^\mu = \mathbb{P}_0^\mu$, de distribution μ au temps 0.

Démonstration. — Reprenons l'intervalle $[0, \tau]$, $0 < \tau < +\infty$, c'est-à-dire $[\sigma, \tau]$ avec $\sigma = 0$. Nous venons de voir que $\check{M}$, $\check{M}_t = \dfrac{\pi_t - a}{t}$, est une martingale sur $C(]0, \tau]; \mathbb{R}^N)$, pour la plus petite famille de tribus décroissante et continue à gauche rendant π adapté et la probabilité $\check{\mathbb{P}}_{\tau,0}^{b,a}$. Soit alors $0 < s < t < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^{N+1}$; en prenant $\tau = t_n$, on aura :

$$\check{\mathbb{E}}_{t_n,0}^{b,a} \check{M}_s f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n}) = \check{\mathbb{E}}_{t_n,0}^{b,a} \check{M}_t f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n}).$$

Mais π_s, π_t, donc $\check{M}_s, \check{M}_t$, sont intégrables pour $\mathbb{P}^a = \mathbb{P}^a_0$, et $\mathbb{P}^a$ est une intégrale des $\mathbb{P}^{a,b}_{0,\tau} = \check{\mathbb{P}}^{b,a}_{\tau,0}$, comme le montrent (2.2) et (2.5) :

$$(2.14) \qquad \mathbb{P}^a = \int_{\mathbb{R}^N} \check{\mathbb{P}}^{b,a}_{\tau,0} \gamma_\tau(b-a)db\,.$$

Donc on a aussi :

$$(2.14.1) \qquad \mathbb{E}^a \check{M}_s f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n}) = \mathbb{E}^a \check{M}_t f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_n})\,.$$

Par un théorème évident de classes monotones, cela montre que, si $\Omega = C([0, +\infty[; \mathbb{R}^N)$, $C([0, +\infty]; S_N)$ pour $N \geqslant 3$, muni de la famille de tribus, décroissante et continue à gauche, la plus petite qui rende π adapté, et de la probabilité $\mathbb{P}^a$ du brownien à temps croissant partant de a à l'instant 0, $\check{M}$ est une martingale sur $]0, +\infty[\times\Omega$. On ne peut pas parler de son crochet, puisqu'il n'y a pas le temps initial $+\infty$. Mais séparons en $]0, \rho]$ et $[\rho, +\infty[$, $0<\rho<+\infty$. Sur $]0,\rho]\times\Omega$, $[\check{M}, \check{M}]_t - [\check{M}, \check{M}]_\rho = \frac{\theta}{t} - \frac{\theta}{\rho}$, pour $\check{\mathbb{P}}^{b,a}_{\rho,0}$ quel que soit a, donc aussi pour leur intégrale $\mathbb{P}^a$ (formule (2.14) pour $\tau = \rho$). Prenons des intégrales stochastiques à temps descendant à partir de ρ (6), $\pi - a = (t)\,.\,\check{M} + \check{M}.(t)$; exactement comme on l'a fait à temps montant après (2.9), on voit que π est, pour $\mathbb{P}^a$, une semi-martingale à temps descendant sur $[0, \rho]\times\Omega$, donc aussi sur $[0, +\infty[\times\Omega$, N quelconque. Dans $[\rho, +\infty[$, $N \geqslant 3$, c'est moins simple, parce qu'il manque le temps initial $+\infty$. Soit $\rho < t < +\infty$. Nous prendrons, dans $[\rho, t]$, des intégrales descendantes, à partir du temps initial t. Alors :

$$(2.14.2) \qquad \pi_t - a = t\check{M}_t, \qquad \pi_\rho - \pi_t = \int_t^\rho s d\check{M}_s + \int_t^\rho \check{M}_s ds\,.$$

Comme pour la démonstration de (1.1), nous ferons l'inversion Φ, $\Phi(x) = x/|x|^2$, qui ramènera $S_N \backslash \{0\}$ à $\mathbb{R}^N$, et nous rappelons que $|\partial_k \Phi(x)| \leqslant$ const. $|x|^{-2}$, $|\partial_i\partial_j\Phi(x)| \leqslant$ const. $|x|^{-3}$. Alors, pour $1 \leqslant t \leqslant +\infty$:

$$(2.15) \qquad \Phi(\pi_\rho) - \Phi(\pi_t) = \int_t^\rho \sum_{k=1}^N \partial_k\Phi(\pi_s)d\pi_s^k + \frac{1}{2}\int_t^\rho \Delta\Phi(\pi_s)(-ds)$$

(parce que $d(\pi, \pi)_s = -\theta ds$, $\geqslant 0$ pour $ds \leqslant 0$; à temps descendant comme à temps montant, $[\pi, \pi]$ est la même, au signe près !). La probabilité est ici toujours $\mathbb{P}^a$, et on sait déjà que π est, pour les temps descen-

(6) Attention : pour $a < b$, $\int_a^b$ à temps montant et $\int_b^a$ à temps descendant ne sont pas opposés, à cause du crochet.

dants, une semi-martingale. La partie à variation finie de $\Phi(\pi_\rho) - \Phi(\pi)$ est définie, si les $\check{M}^k$ sont les coordonnées de $\check{M}$, par :

$$\text{(2.16)} \qquad W_t = \int_t^\rho \left(\sum_{k=1}^N \partial_k \Phi(\pi_s) \check{M}_s^k - \frac{1}{2} \Delta\Phi(\pi_s) \right) ds$$

et la partie martingale est définie par :

$$\text{(2.17)} \qquad L_t = \int_t^\rho \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi(\pi_s) s d\check{M}_s^k .$$

On a, pour $s \to +\infty$, les majorations :

$$\text{(2.18)} \quad |dW_s| \leqslant \text{const.} (|\pi_s|^{-2} |\check{M}_s| + |\pi_s|^{-3}) |ds| \leqslant \text{const.} (|\pi_s|^{-1} s^{-1} + |\pi_s|^{-3}) ds \leqslant \text{const.}\, C(s^{-\alpha-1} + s^{-3\alpha}) ds$$

donc $\int_{+\infty}^\rho |dW_s| \leqslant$ const. C, et W se prolonge en $\overline{W}$ à variation finie dans $[\rho, +\infty] \times \Omega$. Ensuite, si les L^k sont les coordonnées de L :

$$\text{(2.19)} \quad |d[L^i, L^j]_s| = \left| \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi^i(\pi_s) \partial_k \Phi^j(\pi_s) s^2 d[M^k, M^k]_s \right| \leqslant \text{const.} |\pi_s|^{-2} |\pi_s|^{-2} s^2 d\left(\frac{1}{s}\right) \leqslant \text{const.}\, C s^{-4\alpha} |ds| .$$

de sorte que $[L, L] - [L, L]_t$ est $\leqslant$ const. C, et L se prolonge en $\overline{L}$ martingale locale continue sur $[\rho, +\infty] \times \Omega$, $\overline{L}_{(+\infty)} = L_{(+\infty)-}$ (7), ce qui démontre bien que π est, sur $[0, +\infty] \times \Omega$, pour $\mathbb{P}^a$, une semi-martingale à temps descendant, à valeurs dans S_N. Il en est de même, par le théorème de convexité de Jacod, pour la probabilité $\mathbb{P}^\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}^a \mu(da)$.

Remarque. — Nous avons « contrarié » le sens du temps en prenant des tribus descendantes pour la probabilité $\mathbb{P}^\mu$ du brownien à temps montant. On peut naturellement faire la même chose, mais c'est plus simple, sur $[\sigma, \tau]$, pour le pont brownien. En effet, pour $\mathbb{P}^{a;b}_{\sigma,\tau}$, π est une semi-martingale à temps

(7) M. SHARPE, *Local times and singularities of continuous local martingales*, Séminaire de Probabilités XIV, 1978-1979, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. **784**, 1980, prop. 39, page 95.

descendant puisque $\mathbb{P}^{a,b}_{\sigma,\tau} = \check{\mathbb{P}}^{b,a}_{\tau,\sigma}$; c'est vrai aussi pour $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}^{a,b}_{\sigma,\tau}\,\mu(da)$.
De même, pour $\check{\mathbb{P}}^{\nu,a}_{\tau,\sigma}$, π est une semi-martingale à temps montant.

§ 3. QUELQUES COMPLÉMENTS

Avec les méthodes ci-dessus, on peut démontrer bien d'autres résultats, dont je me contenterai d'énoncer quelques-uns.

PROPOSITION (3.1). — Plaçons-nous dans les conditions du § 1. Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $t \mapsto B_t/t^\alpha$ (qui tend p. s. vers 0 pour $t \to +\infty$), $N \in \mathbb{N}$ quelconque, se prolonge en une semi-martingale sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Pour α réel $< \frac{1}{2}$, $t \mapsto B_t/t^\alpha$ (qui tend p. s. vers ∞ pour $t \to +\infty$) se prolonge en une semi-martingale à valeurs dans S_N sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, pour $N \geqslant 3$.

PROPOSITION (3.2). — Soient $-\infty < \sigma < \tau < +\infty$, et les tribus croissantes naturelles sur $C([\sigma,\tau];\mathbb{R}^N)$; si π est le processus canonique, alors $t \mapsto \dfrac{b-\pi_t}{(\tau-t)^\alpha}$, $\alpha < \frac{1}{2}$, est une semi-martingale pour $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$ (pont brownien), avec valeur b en τ.

Pour $\alpha > \frac{1}{2}$ et $N \geq 3$, $t \mapsto \dfrac{b-\pi_t}{(\tau-t)^\alpha}$ est une semi-martingale pour $\mathbb{P}^{\mu,b}_{\sigma,\tau}$, à valeurs dans S_N, avec valeur ∞ en τ.

Démonstration. — Par le changement de temps $u = \dfrac{1}{\tau - t}$, on rend la martingale M brownienne dans $\left[\dfrac{1}{\tau-\sigma}, +\infty\right[$, et (3.2) se déduit immédiatement de (3.1).

(Manuscrit reçu le 10 Avril 1984)