

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL MÉTIVIER

Convergence faible et principe d'invariance pour des martingales à valeurs dans des espaces de Sobolev

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, n° 4 (1984), p. 329-348

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_4_329_0>

© Gauthier-Villars, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Echanges Annales

Convergence faible et principe d'invariance pour des martingales à valeurs dans des espaces de Sobolev

par

Michel MÉTIVIER (*)

Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France

RÉSUMÉ. — $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite de martingales à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, on donne une condition suffisante de tension de la suite des lois des M^n dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H})$. Cette condition s'exprime uniquement à l'aide du processus $\ll M^n \gg$ dont la définition est rappelée au début du paragraphe 1.

Le paragraphe 2 applique ce critère à l'étude de la suite $(M^N)_{N \geq \mathbb{N}}$ lorsque M^N est la « martingale accompagnatrice » d'un processus X^N à valeurs dans $\mathbb{H}$ tel que

$$X_t^N = X_0^N + \int_0^t b^N(X_s^N) ds + M_t^N$$

$$\text{où} \quad \ll M^N \gg_t = \int_0^t a^N(X_s^N) ds \quad a^N(X_s^N) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{V}; \mathbb{V}')$$

et où $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{V}'$ est un triplet de Gelfand d'espaces de Hilbert. Lorsque la suite (X^N) converge en probabilité vers une fonction déterministe f et pour des hypothèses convenables sur a^N et la suite $\varepsilon_N \downarrow 0$, les martingales

(*) Les résultats de ce travail ont été en grande partie obtenus pendant un séjour de l'auteur au « Center for Stochastic Processes » de l'Université de North-Carolina à Chapel Hill, dans l'été 1983, que l'auteur tient à remercier.

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$ convergent faiblement dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{V}')$ vers un processus gaussien.

Ce théorème est appliqué à des processus considérés par L. Arnold, M. Theodosopulu et P. Kotelenetz.

ABSTRACT. — $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ being a sequence of martingales with values in a Hilbert space $\mathbb{H}$ a sufficient condition for the tightness in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H})$ of the laws of the M^n 's is given in terms of the processes $\ll M^n \gg n \in \mathbb{N}$ only. (Their definition is recalled in 1).

This is applied to the study of the accompanying martingales M^N of $\mathbb{H}$ -valued processes X^N solution of a stochastic equation

$$X_t^N = X_0^N + \int_0^t b^N(X_s^N) ds + M_t^N,$$

where M^N is a martingale such that

$$\ll M^N \gg_t = \int_0^t a^N(X_s^N) ds \quad a^N(X_s^N) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$$

where $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{V}'$ is a Gelfand-tripel. The martingales $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$ for a suitable $\varepsilon_N \downarrow 0$ are shown to converge weakly in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{V}')$ to a gaussian process.

The results is applied to processes considered by L. Arnold, M. Theodosopulu and P. Kotelenetz.

Key-words: Hilbert valued martingales. Weak convergence. Invariance principle. Stochastic partial differential equation. Martingale problems.

1. UNE CONDITION SUFFISANTE DE COMPACITÉ FAIBLE

Nous considérons une suite $(M^n)_{n \geq 0}$ de processus à valeurs dans un espace de Hilbert séparable $\mathbb{H}$. Chacun de ces processus est défini sur un espace probabilisé $(\Omega^n, \mathcal{A}^n, P^n)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}$. On suppose que M^n est pour $(\mathcal{F}^n, P^n)$ localement une martingale cad. lag de carré intégrable. On note $\tilde{P}^n$ la loi de M^n , sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H})$.

On note $\ll \tilde{M}^n \gg$ l'unique processus prévisible à valeurs dans $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}'; \mathbb{H})$

(espace des opérateurs nucléaires du dual $\mathbb{H}'$ de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$) possédant la propriété : pour tout $g, h \in \mathbb{H}'$, le processus $Y^{f,g}$ défini par

$$Y_t^{f,g} := (M_t^n; h)(M_t^n; g) - (M_0^n; h)(M_0^n; g) - (h; \ll \tilde{M}^n \gg_t g)$$

est une martingale locale. (cf. [6]) ⁽¹⁾.

L'opérateur $\ll \tilde{M}^n \gg (t, \omega)$ étant positif pour tout (t, ω) on peut définir l'opérateur de Hilbert-Schmidt $\ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}}(t, \omega)$. (On note $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt et $\| \cdot \|_2$ sa norme). On rappelle la définition suivante (cf. [1]) :

$\ll M^n \gg = \text{trace } \ll \tilde{M}^n \gg \cdot (\| M^n \|^2 - \ll M^n \gg$ est une martingale locale) (cf. [6]).

1.1. DÉFINITION. — Une suite de processus $(X^n)_{n \geq 0}$, cad.lag, définis sur les $(\Omega^n, \mathcal{A}^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ à valeurs dans un espace métrique (E, d) est dit satisfaire la condition de Aldous si, pour tout $N > 0$, $\varepsilon, \eta > 0$ existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite (τ^n) de temps d'arrêts (où τ^n est défini sur Ω^n et relatif à la filtration $\mathcal{F}^n$) tels que $\tau^n \leq N$ on a

$$[A] \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < \theta < \delta} P^n \{ d(X_{\tau^n + \theta}^n, X_{\tau^n}^n) > \eta \} \leq \varepsilon$$

1.2. DÉFINITION. — On dira que la suite $(X^n)_{n \geq 0}$ de processus satisfait la condition $[T_t]$ pour $t \in \mathbb{R}^+$ si la suite des lois $(\tilde{P}_t^n)_{n \geq 0}$ des variables aléatoires $(X_t^n)_{n \geq 0}$ (à valeurs dans E) est tendue.

On rappelle que si $(X^n)_{n \geq 0}$ possède la propriété $[A]$ et la propriété $[T_t]$ pour tout t appartenant à un ensemble D_0 dense dans $\mathbb{R}^+$, la suite $(\tilde{P}^n)_{n \geq 0}$ est tendue dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H})$ (cf. [1]).

On rappelle également la propriété suivante :

1.3. PROPOSITION. — Soit $\mathbb{G}$ un espace de Hilbert et $(\mathbb{G}_k)_{k \geq 0}$ une suite croissante d'espaces de dimension finie de $\mathbb{G}$, telle que pour tout $h \in \mathbb{G}$

$$\lim_k \Pi_{\mathbb{G}_k} h = h.$$

(1) On rappelle que tout élément $\tilde{a}$ de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}'; \mathbb{H})$ s'identifie à un élément a de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{H}$ (produit tensoriel nucléaire de $\mathbb{H}$ par $\mathbb{H}$) qui est en quelque sorte la « matrice » associée à $\tilde{a}$. Le processus à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{H}$ associé à $\ll M \gg$ est noté $\ll M \gg$ dans [6]. De la même façon tout élément $\tilde{a}$ de $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}'; \mathbb{H})$ s'identifie à un élément a de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$: dans

une base orthonormée (h_i) de $\mathbb{H}$, a s'écrit $\sum_{i,j} \xi_{i,j} h_i \otimes h_j$ les $(h_i \otimes h_j)_{i,j}$ constituant eux-mêmes une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$. On a alors $\tilde{a}(h) = \sum_{i,j} \xi_{i,j} (h_i; h)_{\mathbb{H}} h_j$.

Une suite μ_n de lois de probabilité dans $\mathbb{G}$ est tendue si et seulement si pour tout ε et η existent un $\rho_\varepsilon > 0$ et un sous-espace $\mathbb{G}_{\varepsilon, \eta}$ de la suite $(\mathbb{G}_k)_{k \geq 0}$ tels que

$$(1.3.1) \quad \sup_n \mu_n \{ g : \|g\| > \rho_\varepsilon \} \leq \varepsilon$$

et

$$(1.3.2) \quad \sup_n \mu_n \{ g : d(g, \mathbb{G}_{\varepsilon, \eta}) > \eta \} \leq \varepsilon$$

où $d(g, \mathbb{G}_{\varepsilon, \eta})$ désigne la distance de g à $\mathbb{G}_{\varepsilon, \eta}$.

Démonstration. — Cette proposition résulte en effet de la condition suivante de compacité dans $\mathbb{G}$. Un ensemble $C \subset \mathbb{G}$ a une fermeture compacte si et seulement si il est borné et pour tout η existe un sous-espace $\mathbb{G}_k$ de dimension finie, tel que

$$\sup_{g \in C} d(g, \mathbb{G}_k) < \eta.$$

Les deux conditions de la proposition sont donc trivialement nécessaires pour que tout ε existe un compact C_ε tel que

$$\sup_n \mu_n(\mathbb{G} - C_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Réciproquement, si elles sont satisfaites et si ε est donné, on obtient un compact C_ε en prenant l'adhérence de l'ensemble C'_ε suivant :

$$C'_\varepsilon := \mathbb{G} - \bigcup_{k \geq 1} \left(\{ g : \|g\| > \rho_\varepsilon \} \cup \left\{ g : d(g, \mathbb{G}_{\varepsilon/2^k, \frac{1}{k}}) > \frac{1}{k} \right\} \right)$$

et on a pour tout n

$$\mu(\mathbb{G} - C_\varepsilon) \leq 2\varepsilon.$$

On a le résultat suivant :

1.4. THÉORÈME. — Si la suite $(\ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}})_{n \geq 0}$ de processus à valeurs dans $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ satisfait $[T_t]$ et si $(M^n)_{n \geq 0}$ satisfait $[T_0]$ la suite $(M^n)_{n \geq 0}$ satisfait $[T_s]$ pour tout $s \leq t$.

Démonstration. — La démonstration se ramène évidemment au cas $M_0^n = 0$ pour tout n . Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $\hat{C}$ de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$ tel que

$$(1.4.1) \quad \sup_n P^n \{ \ll M^n \gg^{\frac{1}{2}}_t \notin \hat{C} \} \leq \varepsilon/2.$$

Remarquons (en considérant par exemple une base orthonormée) que l'on peut construire une suite croissante $(\mathbb{H}_n)$ de sous-espaces de dimension

finie de $\mathbb{H}$, telle que $\bigcup_n \mathbb{H}_n \otimes \mathbb{H}_n$ soit dense dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$. L'ensemble $\hat{C}$ dans (1.4.1) est donc borné, puisque compact, et pour tout $\rho > 0$ existe un sous-espace $\mathbb{H}_\rho$ de dimension finie de $\mathbb{H}$ tel que

$$(1.4.3) \quad \sup_{y \in \hat{C}} \|y - \Pi_{\mathbb{H}_\rho \otimes \mathbb{H}_\rho}(y)\| \leq \rho$$

Nous montrons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\beta > 0$ on peut trouver $\alpha > 0$ et un espace de dimension finie $\mathbb{H}_\rho$ tel que

$$(1.4.4) \quad \sup_n P^n \left\{ \sup_{s \leq t} \|M_s^n\| > \alpha \right\} \leq \varepsilon$$

et

$$(1.4.5) \quad \sup_n P^n \left\{ \sup_{s \leq t} \|M_s^n - \Pi_{\mathbb{H}_\rho} M_s^n\| > \beta \right\} \leq \varepsilon.$$

Ce sont les conditions de la proposition 1.3 qui impliqueront la compacité des lois des variables $\{M_s^n, n \in \mathbb{N}\}$. Pour démontrer (1.4.4), nous utilisons un lemme de Lengart (cf. [5]) qui nous donne pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ (rappelons qu'on a supposé $M_0^n = 0$) :

$$\begin{aligned} P^b \left\{ \sup_{s \leq t} \|M_t^n\| > \alpha \right\} &\leq \frac{b}{\alpha^2} + \text{Prob} \left\{ \text{Trace} \ll M^n \gg_t > b \right\} \\ &= \frac{b}{\alpha^2} + \text{Prob} \left\{ \|\ll M^n \gg_t^{\frac{1}{2}}\|_{\text{H.S.}}^2 > b \right\}. \end{aligned}$$

En prenant $b := \sup_{y \in \hat{C}} \|y\|_{\text{H.S.}}^2$ on a donc

$$(1.4.6) \quad P^n \left\{ \sup_{s \leq t} \|M_s^n\| > \alpha \right\} \leq \frac{b}{\alpha^2} + \varepsilon/2.$$

On peut alors choisir α de telle sorte qu'on ait l'inégalité (1.4.4).

Pour montrer (1.4.5) choisissons $\rho \leq \frac{\varepsilon}{2} \beta^2$ et considérons l'espace de dimension finie $\hat{\mathbb{F}}_\rho = \mathbb{H}_\rho \otimes \mathbb{H}_\rho$ défini ci-dessus, pour lequel (1.4.3) est vraie. Soit $\mathbb{G}_\rho$ le sous-espace orthogonal à $\mathbb{H}_\rho$ dans $\mathbb{H}$ et appelons Π_1 (resp. Π_2) la projection orthogonale sur $\mathbb{G}_\rho$ (resp. $\mathbb{H}_\rho$). Écrivons pour simplifier $Q := \ll M^n \gg_t$.

Supposons que nous puissions démontrer

$$(1.4.7) \quad \ll \Pi_1 M^n \gg_t \leq \|Q^{\frac{1}{2}} - \Pi_{\mathbb{H}_\rho \otimes \mathbb{H}_\rho} Q^{\frac{1}{2}}\|_{\text{H.S.}}^2.$$

Alors, en utilisant l'hypothèse que

$$P^n \left\{ \|Q^{\frac{1}{2}} - \Pi_{\mathbb{H}_\rho \otimes \mathbb{H}_\rho} Q^{\frac{1}{2}}\|_{\text{H.S.}}^2 > \rho \right\} \leq \varepsilon/2$$

et réutilisant le lemme de Lengart, on obtient que

$$P^n \left\{ \sup_{s \leq t} \|\Pi_1 M_s^n\| > \beta \right\} \leq \frac{\rho}{\beta^2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le choix fait de ρ montre que

$$P^n \left\{ \sup_{s \leq t} \|\Pi_1 M_s^n\| > \beta \right\} \leq \varepsilon$$

ce qui est l'inégalité à démontrer (1.4.5).

La démonstration du théorème repose donc maintenant uniquement sur la preuve de (1.4.7). Or cette dernière inégalité résulte du lemme suivant.

LEMME. — Soit $Q := \ll M \gg_t$. Soit $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2$ une décomposition orthogonale de $\mathbb{H}$ et soit $\Pi_{\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2} Q^{\frac{1}{2}}$ la projection orthogonale de $Q^{\frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{H}_2 \hat{\otimes} \mathbb{H}_2$. Soit Π_i la projection orthogonale sur $\mathbb{H}_i$, $i = 1, 2$. Alors

$$\prec \Pi_1 M \succ_t \leq \|Q^{\frac{1}{2}} - \Pi_{\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2} Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{H},s}^2.$$

Démonstration du lemme. — Soit $\tilde{Q}$ l'opérateur dans $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ associé à Q . On a :

$$(1.4.8) \quad \overline{\text{Proj}_{\mathbb{H}_i \hat{\otimes} \mathbb{H}_j} Q^{\frac{1}{2}}} = \Pi_j \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_i \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Remarquons d'abord que :

$$(1.4.9) \quad \prec \Pi_2 M \succ_t = \text{trace}(\Pi_2 \circ \tilde{Q} \circ \Pi_2).$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_2\|_{\mathbb{H},s}^2 &\leq \|\Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{H},s}^2 = \text{trace}(\Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_2) \\ &= \text{trace}(\Pi_2 \circ \tilde{Q} \circ \Pi_2). \end{aligned}$$

On déduit donc de (1.4.9) que

$$(1.4.10) \quad \|\Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_2\|_{\mathbb{H},s}^2 \leq \prec \Pi_2 M \succ_t.$$

Mais, puisque $\|M_t\|^2 = \|\Pi_1 M_t\|^2 + \|\Pi_2 M_t\|^2$, on a

$$(1.4.11) \quad \prec M \succ_t = \prec \Pi_1 M_t \succ + \prec \Pi_2 M_t \succ.$$

La décomposition orthogonale

$$\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_2 \oplus \mathbb{H}_2 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_2$$

montre que

$$(1.4.12) \quad \prec M \succ_t = \|Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{H},s}^2 = \sum_{i,j=1}^2 \|\Pi_i \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_j\|_{\mathbb{H},s}^2.$$

Des égalités (1.4.10), (1.4.11) et (1.4.12) on conclut donc :

$$\begin{aligned} \llcorner \Pi_1 M_t \lrcorner &\leq \llcorner M \lrcorner_t - \|\Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_2\|_{\mathbb{H},s}^2 \\ &\leq \|Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{H},s}^2 - \|\Pi_{\mathbb{H}_2 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_2} Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{H},s}^2 \\ &\leq \|Q^{\frac{1}{2}} - \Pi_{\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2} Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{H},s}^2. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme et du théorème. ■

1.5. COROLLAIRE. — *Supposons qu'existe une base orthonormale $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{H}$ telle que pour tout $\eta > 0$,*

$$\begin{aligned} i) \quad &\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{P}^n \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \langle h_k, \llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t h_k \rangle \geq \eta \right\} = 0 \\ ii) \quad &\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{P}^n \{ \llcorner M^n \lrcorner_t > \rho \} = 0. \end{aligned}$$

Alors la suite $(M^n)_{n \geq 0}$ vérifie $[T_s]$ pour tout $s \leq t$, dès que $[T_0]$ est vraie.

Démonstration. — Il suffit de montrer que (i) et (ii) impliquent $[T_t]$ pour la suite de processus $(\llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t)_{n \geq 0}$.

Si Π_m est l'opérateur de projection sur l'espace $\mathbb{H}^m$ de dimension finie engendrée par $\{h_1, \dots, h_m\}$ on a

$$\begin{aligned} \|\llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t - \Pi_m \llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t \Pi_m\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|\llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t h_k - \Pi_m \llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t \Pi_m h_k\|^2 \\ &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \|\llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t h_k\|^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=m+1}^{\infty} (h_j; \llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t h_k)^2_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

En raison de la symétrie de $\llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t - \Pi_m \llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t \Pi_m\|_2^2 &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \|\llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t h_k\|^2 + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (h_k; \llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t h_j)_{\mathbb{H}}^2 \\ &\leq 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \|\llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t h_k\|^2 = 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle h_k; \llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t h_k \rangle. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{L}_2^m(\mathbb{H})$ est le sous-espace de dimension finie des applications linéaires de $\mathbb{H}^m$ la condition (i) implique pour tout $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$, l'existence d'un m tel que

$$(1.5.1) \quad \sup_n \mathbf{P}^n \{ \|\llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t - \Pi_m \llcorner \tilde{M}^n \lrcorner_t \Pi_m\|_2 > \eta \} \leq \varepsilon.$$

La condition (ii) implique pour tout ε l'existence d'un $\rho > 0$ tel que

$$(1.5.2) \quad \sup_n P^n \{ \| \ll \tilde{M}^n \gg_t^{\frac{1}{2}} \|_2 > \rho \} \leq \varepsilon.$$

Les conditions (1.3.1) et (1.3.2) impliquent que pour tout t , les lois des variables $\ll \tilde{M}^n \gg_t^{\frac{1}{2}}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ vérifient les conditions de la proposition 1.3. D'où le corollaire. ■

1.6. THÉORÈME. — *On suppose que la suite $(M^n)_{n \geq 0}$ de martingales vérifie l'hypothèse du théorème 1.4 ou du corollaire 1.5, pour une suite $(t_k); t_k \uparrow \infty$ et que la suite de processus croissants $(\ll M^n \gg)_{n \geq 0}$ vérifie la condition [A] de la définition 1.1.*

Alors la suite $(\tilde{P}^n)_{n \geq 0}$ des lois des (M^n) est équitendue dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H})$.

Démonstration. — Une extension immédiate d'un résultat de R. Rebolledo (cf. [7] et aussi [6] pour une exposition) montre que si les processus $\ll M^n \gg$ vérifient la condition [A], il en est de même pour les processus M^n . Le théorème de Aldous [1] rappelé au début donne donc immédiatement la propriété d'équitension pour la suite $(\tilde{P}^n)_{n \geq 0}$. ■

2. UN PRINCIPE D'INVARIANCE POUR MARTINGALES

2.1. CADRE ET NOTATIONS.

Nous considérons un « triplet de Gelfand » d'espaces de Hilbert : $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{V}'$, l'espace $\mathbb{H}$ étant identifié à son dual $\mathbb{H}'$.

En plus de ce triplet, nous considérons un espace de Banach $\mathbb{W}$ tel qu'on ait les injections continues $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{V}'$.

Nous noterons $(\cdot; \cdot)_{\mathbb{V}}$ (resp. $(\cdot; \cdot)_{\mathbb{H}}$) le produit scalaire dans $\mathbb{V}$ (resp. $\mathbb{H}$), réservant le crochet $\langle, \rangle$ pour la dualité entre un espace et son dual.

Nous considérons une suite $\{(X_t^N)_{t \geq 0} : N \in \mathbb{N}\}$ de processus définis respectivement sur des bases stochastiques $(\Omega^N, (\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}, P^N)$ tels que

$$(2.1.1) \quad 1_{[0, T]} X^N(\omega) \in L^\infty([0, T]; \mathbb{W}) \cap \mathbb{D}[0, T; \mathbb{V}]$$

pour tout $T \geq 0$ et tout $\omega \in \Omega^N$.

On suppose que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathbb{W}$, $b^N(g)$ est un élément de $\mathbb{V}'$ tel que

$$(2.1.2) \quad X_t^N = X_0^N + \int_0^t b^N(X_s^N) ds + M_t^N$$

Le processus M^N étant une martingale de carré intégrable cad-lag à valeurs dans $\mathbb{H}$ (pour la filtration $(\mathcal{F}^N, \mathbb{P}^N)$) et le processus $\left(\int_0^t b^N(X_s^N) ds\right)_{t \geq 0}$ étant à trajectoires dans $C(\mathbb{R}^+; \mathbb{V}')$.

2.2. On formule les hypothèses suivantes sur X^N et sur la martingale M^N : $(\varepsilon_N)_{N \geq 0}$ est une suite de nombres positifs décroissants avec $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = 0$

(H₁) i) Pour tout $T \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ existe $\rho_T > 0$ tel que

$$\limsup_N E^N \left\{ \sup_{s \leq T} \|X_s^N\|_{\mathbb{W}} \right\} < \infty$$

ii) Pour tout $T \geq 0$ $\rho > 0$

$$\lim_N \mathbb{P}^N \left\{ \sup_{t \leq T} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} \Delta X_t^N \right\|_{\mathbb{V}'} > \rho \right\} = 0$$

$$\text{iii)} \quad \sup_N \sup_t \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} \Delta X_t^N \right\|_{\mathbb{V}'} < \infty$$

(H₂) Pour tout $g \in \mathbb{W}$, $a^N(g)$ est un élément de $\mathcal{L}_1(\mathbb{V}; \mathbb{V}')$ tel que

$$i) \ll \tilde{M}^N \gg = \left(\int_0^t a^N(X_s^N) ds \right)_{t \geq 0} \text{ à trajectoires dans } C(\mathbb{R}^+; \mathcal{L}_1(\mathbb{V}; \mathbb{V}')) .$$

ii) Pour toute base (v_k) orthonormée de $\mathbb{V}$ existe une famille positive (α_k) avec $\sum \alpha_k < \infty$ et quels que soient N et $g : \langle v_k, a^N(g) v_k \rangle \leq \varepsilon_N \|g\|_{\mathbb{W}} \alpha_k$ (noter que ceci implique : $a^N(g) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{V}; \mathbb{V}')$).

(H₃) Pour tout $g \in \mathbb{W}$, $u \in \mathbb{V}$

$$\lim_N \left\langle u, \left(\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(g) - a(g) \right) u \right\rangle = 0, \quad \text{avec } a(g) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{V}; \mathbb{V}').$$

(H₄) Il existe $f \in C(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{W})$ avec pour tout T

$$\sup_{t < T} \|f(s)\|_{\mathbb{W}} \leq \rho_T,$$

telle que

$$\forall u, v \in \mathbb{V} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E \left(\left\langle u, \left[\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(X_s^N) - \frac{1}{\varepsilon_N} a^N(f(s)) \right] v \right\rangle \right) = 0$$

pour presque tout $s \in \mathbb{R}^+$.

2.3. THÉORÈME. — Sous les hypothèses (H₁) à (H₄) la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N \right)_{N \geq 0}$ de martingales converge faiblement dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{V}')$ vers le processus gaussien

continu à accroissements indépendants centrés de covariance $C(t) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{V}; \mathbb{V}')$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbb{V} \quad \langle u; C(t)v \rangle = \int_0^t \langle u; a(f(s))v \rangle ds$$

Démonstration.

1) *Compacité faible de la suite des lois des M^N .*

L'hypothèse (H_2) entraîne avec (H_1) pour tout $t \leq T$ et $\varepsilon > 0$ l'existence de $\rho_T > 0$ tel que :

$$\limsup_N P^N \left\{ \int_0^t \frac{1}{\varepsilon_N} \|a^N(X_s^N)\|_{\mathcal{L}_1(\mathbb{V}; \mathbb{V}')} ds > \rho_T C \right\} \leq \varepsilon \quad \text{pour} \quad C = T \sum_k a_k.$$

La condition (ii) du corollaire (1.5) est donc vérifiée pour la martingale $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$ à valeurs dans $\mathbb{V}'$.

Si maintenant (u_k) est une base orthonormée de $\mathbb{W}$ les conditions (H_1) et (H_2) impliquent pour tout $t \leq T$, $\varepsilon > 0$:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \langle u_k; \frac{1}{\varepsilon_N} \ll M^N \gg_t u_k \rangle > T \rho_T(\varepsilon) \sum_{k \geq m} a_k \right\} \leq \varepsilon$$

ce qui fournit immédiatement la condition (i) du corollaire 1.5.

En outre la condition de Aldous résulte immédiatement de la majoration

$$P^N \left\{ \int_{\tau_N}^{\tau_N + \delta} \|a^N(X_s^N)\|_{\mathcal{L}_1(\mathbb{V}; \mathbb{V}')} ds > \rho_T \delta C \right\} \leq \varepsilon$$

2) *Convergence faible.*

Notons $\tilde{P}^N$ la loi de la martingale $Y_N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$.

Nous avons seulement à prouver que pour toute suite convergente extraite de $(\tilde{P}^N)_{N \in \mathbb{N}}$ (que nous noterons encore $(\tilde{P}^N)_{n \in \mathbb{N}}$ pour simplifier) la limite $\tilde{P}$ est solution sur $C(\mathbb{R}^+; \mathbb{V}')$ du problème de martingale suivant : $(\xi_t)_{t \geq 0}$ désignant le processus canonique dans $C(\mathbb{R}^+; \mathbb{V}')$ pour tout $v \in \mathbb{V}$ le processus réel $(\langle v, \xi_t \rangle)_{t \geq 0}$ est une $\tilde{P}$ -martingale locale et

$$(2.3.1) \quad \langle v, \xi_t \rangle^2 - \int_0^t \langle v; a(f(s))v \rangle ds$$

est également une $\tilde{P}$ -martingale locale.

Notons que $(H_1)(ii)$ implique pour la limite $\tilde{P}$ d'être portée par $C(\mathbb{R}^+; \mathbb{V}')$.

La formule de Ito appliquée à la martingale réelle $\langle v; Y^N \rangle$ et à la fonction $\varphi \in C_K^\infty$ donne

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} \varphi(\langle v, Y_t^N \rangle) &= \frac{1}{2} \int_0^t \varphi''(\langle v, Y_s^N \rangle) \langle v, \frac{a^N}{\varepsilon_N}(X^N(s))v \rangle ds \\ &+ \sum_{s \leq t} [\varphi(\langle v, Y_s^N \rangle) - \varphi(\langle v, Y_{s-}^N \rangle) \\ &- \langle v; \Delta_s Y^N \rangle \varphi'(\langle v, Y_{s-}^N \rangle) \\ &- \frac{1}{2} \langle v; \Delta_s Y^N \rangle^2 \varphi''(\langle v, Y_{s-}^N \rangle)] + M_t^{N, \varphi} \end{aligned}$$

où $M^{N, \varphi}$ est une martingale sur $(\Omega^N, \mathcal{F}^N, P^N)$.

Sur l'espace canonique $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{V}')$ définissons le temps d'arrêt τ_α pour $\alpha > 0$ par

$$\tau_\alpha := \inf \{ t; \| \xi_t \|_{\mathbb{V}'} > \alpha \}$$

et considérons une fonction $\varphi_\alpha \in C_K^\infty$ telle que

$$\varphi_\alpha(x) = x \quad \text{si} \quad |x| \leq \|v\|(\alpha + r)$$

avec

$$r := \sup_N \sup_t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} \|\Delta X_t^N\|_{\mathbb{V}'}$$

Si τ_α^N est le temps d'arrêt sur $(\Omega^N, \mathcal{F}^N, P^N)$ défini par

$$\tau_\alpha^N := \inf \{ t; \|Y_t^N\|_{\mathbb{V}'} > \alpha \}$$

on a, pour $F \in \mathcal{D}_s$, $F^N := (Y^N)^{-1}(F) \in \mathcal{F}_s^N$

$$\begin{aligned} \tilde{E}^N \{ 1_F(\langle v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} \rangle - \langle v, \xi_{s \wedge \tau_\alpha} \rangle) \} \\ = \tilde{E}^N \{ 1_F[\varphi_\alpha(\langle v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} \rangle) - \varphi_\alpha(\langle v, \xi_{s \wedge \tau_\alpha} \rangle)] \}. \end{aligned}$$

Or :

$$E^N \{ 1_{F^N}(\langle v, Y_{t \wedge \tau_\alpha^N}^N \rangle - \langle v, Y_{s \wedge \tau_\alpha^N}^N \rangle) = 0$$

(puisque, pour $t < \tau_\alpha^N$, $\varphi_\alpha''(\langle v, Y_{t-}^N \rangle) = 0$) et

$$\varphi_\alpha(\langle v, Y_t^N \rangle) - \varphi_\alpha(\langle v, Y_{t-}^N \rangle) - \langle v, \Delta_t Y^N \rangle \varphi_\alpha'(\langle v, Y_{t-}^N \rangle) = 0.$$

Comme $\tilde{\omega} \curvearrowright \varphi_\alpha(\langle v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} \rangle)$ est $\tilde{P}$ -p. s. continue, on a, puisque $\tilde{P}^N$ converge vers $\tilde{P}$:

$$\tilde{E} \{ 1_F(\langle v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} \rangle - \langle v, \xi_{s \wedge \tau_\alpha} \rangle) \} = 0.$$

$$\text{et} \quad \lim_{\alpha \uparrow \infty} \tilde{P} \{ \tau_\alpha \geq T \} \leq \limsup_{\alpha \uparrow \infty} \tilde{P}^N \{ \tau_\alpha \geq T \} = 0 \quad \text{pour tout} \quad T > 0.$$

Donc : $(\langle v, \xi_t \rangle)_{t \geq 0}$ est une martingale locale.

Remplaçons maintenant φ_α par $\psi_\alpha \in C_K^\infty$ telle que :

$$\psi_\alpha(x) = x^2 \quad \text{si} \quad |x| \leq \|v\|(\alpha + r).$$

On a cette fois

$$\begin{aligned} \tilde{E}^N \left\{ 1_F \left[\langle v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} \rangle^2 - \langle v, \xi_{s \wedge \tau_\alpha} \rangle^2 - \int_{s \wedge \tau_\alpha}^{t \wedge \tau_\alpha} \langle v, a(f(\tau))v \rangle d\tau \right] \right\} \\ = E^N \left\{ 1_F \left[\langle v, Y_{t \wedge \tau_\alpha}^N \rangle^2 - \langle v, Y_{s \wedge \tau_\alpha}^N \rangle^2 - \int_{s \wedge \tau_\alpha}^{t \wedge \tau_\alpha} \langle v, \frac{a^N}{\varepsilon_N}(X_\tau^N)v \rangle d\tau \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{s \wedge \tau_\alpha}^{t \wedge \tau_\alpha} \left[\langle v, \frac{a^N}{\varepsilon_N}(X_\tau^N)v \rangle - \langle v, a(f(\tau))v \rangle \right] d\tau \right] \right\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (2.3.3) \quad \tilde{E}^N \left\{ 1_F \left[\langle v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} \rangle^2 - \langle v, \xi_{s \wedge \tau_\alpha} \rangle^2 - \int_{s \wedge \tau_\alpha}^{t \wedge \tau_\alpha} \langle v, a(f(\tau))v \rangle d\tau \right] \right\} \\ \leq \int_0^t E^N \left| \langle v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(X_\tau^N) - \frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau)) \right] v \rangle \right| d\tau \\ + \int_0^t \langle v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau)) - a(f(\tau)) \right] v \rangle d\tau. \end{aligned}$$

D'après (H₂) (ii), (H₁) (i) et (H₄)

$$E^N \left| \langle v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(X_\tau^N) - \frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau)) \right] v \rangle \right| \leq 2C \|v\|^2 E^N \left(\sup_{s \leq T} \|X_s^N\|_W \right) < \infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E^N \left| \langle v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(X_\tau^N) - \frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau)) \right] v \rangle \right| = 0$$

donc

$$(2.3.4) \quad \int_0^t E^N \left| \langle v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(X_\tau^N) - \frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau)) \right] v \rangle \right| d\tau = 0$$

Enfin (H₃) implique

$$(2.3.5) \quad \int_0^t \langle v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau)) - a(f(\tau)) \right] v \rangle d\tau = 0.$$

Les inégalités (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5) impliquent (2.3.1).

3. EXEMPLES

3.1. On se place dans la situation considérée par L. Arnold et M. Theodopulu [3] et P. Kotelenetz [4]. L'espace $\mathbb{H}$ sera l'espace $(L^2(S))'$ évidemment identifié à $L^2(S)$, où $S := [0, 1]$. L'espace $\mathbb{V}$ sera un sous-espace H_q où H_q est le sous-espace suivant de l'espace de Sobolev H^q :

$$H_q := \{ u : u \in H^q, D^k u(0) = D^k u(1) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1 \dots q-1 \}.$$

Pour $q = 0$, on pose $H_0 := L^2(S)$.

Pour chaque valeur de N I_i^N est l'intervalle $\left] \frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right]$ et h_i^N est la fonction indicatrice : $h_i^N = 1_{[i/N, (i+1)/N]} \in \mathbb{H}$.

On note $\mathbb{H}_0^N$ le sous-espace de dimension finie de $\mathbb{H}$ engendré par $h_1^N, \dots, h_N^N$.

La suite de processus considérée $(X^N)_{N \geq 0}$ est une suite de processus de Markov de sauts purs, X^N , prenant leurs valeurs dans $\mathbb{H}_0^N$. On a donc :

$$(3.1.1) \quad X_t^N = \sum_{i=1}^N X_t^{N,i} h_i^N$$

$X^{N,i}$ $i = 1 \dots N$ étant les coordonnées d'un processus de Markov dans $\mathbb{R}^N$.

Cette suite de processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{H}_0$ considérée dans [3] et [4] a l'interprétation suivante : $X^{N,i}$ est la masse moyenne par unité de volume (densité) de l'ensemble des particules d'un certain type (chacune de masse ε_N « très petite ») présentes dans la cellule I_i^N à l'instant t . Chaque arrivée ou départ d'une particule dans la cellule I_i^N à l'instant t (soit par naissance ou mort ou provenance d'une cellule voisine ou départ vers une cellule voisine) se traduit par un saut de $X^{N,i}$ d'amplitude $N\varepsilon_N$. On étudie le modèle « limite » du modèle fourni pour N « grand » et ε_N « petit », c'est-à-dire pour $N \rightarrow \infty$ et $\varepsilon_N \downarrow 0$ dans des conditions de normalisation données.

Comme pour tout processus de Markov la loi P^N de X^N est solution d'un problème de martingale : pour toute $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{H}_0^N)$

$$(3.1.2) \quad \varphi(X_t^N) = \varphi(X_0^N) + \int_0^t L^N \varphi(X_s^N) ds + M_t^{N,\varphi}$$

où $M^{N,\varphi}$ est une martingale.

Le générateur L^N s'écrit pour $g \in \mathbb{H}_0^N$, $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{H}_0^N)$

$$(3.1.3) \quad L^N \varphi(g) = \langle b^N(g), D\varphi(g) \rangle + \text{Trace } a^N(g) \circ D^2 \varphi(g) + \sum_m R^2 \varphi(g, m) \gamma^N(g, m)$$

où $b^N(g) \in \mathbb{H}_0^N$, $D\varphi(g)$: dérivée de φ en $g \in (\mathbb{H}_0^N)'$, $a^N(g) \in \mathcal{L}((\mathbb{H}_0^N); \mathbb{H}_0^N)$, $D^2 \varphi(g)$: dérivée seconde de φ en g est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^N; (\mathbb{H}_0^N)')$, $R_2 \varphi(g, m)$ est le reste de Taylor d'ordre 2 de φ en g pour un accroissement m et $\gamma^N(g, m)$ est la probabilité instantanée d'un saut d'amplitude m quand le processus X_t^N est en g ⁽²⁾.

On déduit facilement de (3.1.3), suivant une démarche traditionnelle que le processus X^N satisfait également la formulation suivante du problème de martingale (non équivalente en raison des sauts) :

$$(3.1.4) \quad X_t^N = X_0^N + \int_0^t b^N(X_s^N) ds + M_t^N,$$

M^N étant une martingale locale à valeurs dans $\mathbb{H}_0$ telle que

$$(3.1.5) \quad \ll M^N \gg_t = \int_0^t a^N(X_s^N) ds,$$

le processus $\ll M^N \gg$ prenant ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^N; \mathbb{H}_0^N)$.

Arnold et Theodosopulu donnent des conditions pour que la suite (X^N) converge dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}_{-2})$ ou $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}_0)$ vers une fonction déterministe f à valeurs dans $\mathbb{H}_0$. Ils abordent ensuite le problème de la convergence faible de $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$. C'est ce problème que nous traitons ici.

Dans le cas considéré par Arnold-Theodosopulu [3] et Kotelenez [4]

$$(3.1.6) \quad \begin{aligned} \text{on a pour } g &:= \sum_{i=1}^N g^{N,i} h_i^N \\ b^N(g) &= \sum_{i=1}^N \mathcal{C}(g^{N,i}) h_i^N + D \Delta^N g \end{aligned}$$

⁽²⁾ On a d'ailleurs $\gamma^N(g, m) = \frac{1}{N\varepsilon_N} \lambda(g^{N,i})$ si $m = \varepsilon_N N h_i^N$, $\gamma^N(g, m) = \frac{1}{N\varepsilon_N} \mu(g^{N,i})$ si $m = -\varepsilon_N N h_i^N$, $\gamma^N(g, m) = \frac{D N^2}{2 N \varepsilon_N} (g^{N,i})$ si $m = \varepsilon_N N (h_{i+1}^N - h_i^N)$ ou $m = \varepsilon_N N (h_{i-1}^N - h_i^N)$ les fonctions λ, μ étant des fonctions positives.

où D est une constante, $\mathcal{C}$ est une fonction uniformément Lipschitzienne de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ de la forme suivante :

(3.1.7) $\mathcal{C}(u) = \lambda(u) - \mu(u)$ λ et μ étant deux applications uniformément lipschitziennes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ avec en outre $\mu(0) = 0$ et où Δ^N est le Laplacien approché d'ordre N défini par :

$$(3.1.8) \quad \Delta^N g(x) := \begin{cases} N^2 \left(g\left(x + \frac{1}{N}\right) + g\left(x - \frac{1}{N}\right) - 2g(x) \right) & \text{si } \frac{1}{N} \leq x \leq 1 - \frac{1}{N} \\ N^2 \left(g\left(x + \frac{1}{N}\right) - g(x) \right) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{N} \\ N^2 \left[g\left(x - \frac{1}{N}\right) - g(x) \right] & \text{si } 1 - \frac{1}{N} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

On définit par ailleurs :

$$(3.1.9) \quad |\mathcal{C}|(u) = \lambda(u) + \mu(u).$$

On remarque que (3.1.6) s'écrit pour tout $g \in \mathbb{H}_0^N$

$$(3.1.10) \quad (u; b^N(g)) = (u; \mathcal{C}(g)) + D(\Delta^N u; g).$$

La fonction $a^N(g)$ est définie pour $u, v \in \mathbb{H}_0^N$

$$(3.1.11) \quad (a^N(g)u; v)_{\mathbb{H}_0} := (a_1^N(g)u; v)_{\mathbb{H}_0} + (a_2^N(g)u; v)_{\mathbb{H}_0}$$

avec

$$(a_1^N(g)u; v)_{\mathbb{H}_0} = N \varepsilon_N \sum_{i=1}^N |\mathcal{C}|(g^{N,i}(h_i^N; u))_{\mathbb{H}_0}(h_i^N; v)_{\mathbb{H}_0},$$

soit

$$(3.1.12) \quad (a_1^N(g)u; v)_{\mathbb{H}_0} = \varepsilon_N (|\mathcal{C}|(g)u; v)_{\mathbb{H}_0}$$

(en notant que $\sqrt{N}h_i^N$, $i = 1 \dots N$ est une base orthonormée de $\mathbb{H}_0^N$),
et, en notant $(;)_0$ au lieu de $(;)_{\mathbb{H}_0}$, pour simplifier,

$$(a_2^N(g)u; v)_0 = DN^3 \varepsilon_N \left[\sum_{i=1}^{N-1} g^{N,i}(u; h_{i+1}^N - h_i^N)_0 (v; h_{i+1}^N - h_i^N)_0 + \sum_{i=2}^N g^{N,i}(u; h_{i-1}^N - h_i^N)_0 (v; h_{i-1}^N - h_i^N)_0 \right].$$

Si on note ∇_+^N et ∇_-^N les « gradients approchés à droite et à gauche d'ordre N » définis par

$$(3.1.13) \quad \begin{aligned} \nabla_+^N u(x) &:= \begin{cases} N \left[u\left(x + \frac{1}{N}\right) - u(x) \right] & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{N} \\ 0 & \text{si } 1 - \frac{1}{N} < x \leq 1 \end{cases} \\ \nabla_-^N u(x) &:= \begin{cases} N \left[u\left(x - \frac{1}{N}\right) - u(x) \right] & \text{si } \frac{1}{N} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{N} \end{cases} \end{aligned}$$

on peut écrire

$$(3.1.14) \quad (a_2^N(g)u; v) = D_{\varepsilon_N}[(g\nabla_-^N u; \nabla_-^N v)_0 + (g\nabla_+^N u; \nabla_+^N v)_0].$$

On remarque que les formules (3.1.10) à (3.1.14) gardent un sens pour tout $g \in \mathbb{H}_0$, et que, par conséquent, *le processus X^N considéré comme processus à valeurs dans $\mathbb{H}_0$ (ou $\mathbb{H}_0^!$) est solution du problème de martingale défini par (3.1.4) (3.1.5), les coefficients b^N et a^N étant définis par (3.1.10) à (3.1.14).*

3.2. CAS 1 : $\mathbb{V} = \mathbb{H}_2$, $\mathbb{W} = L^\infty$.

Cette situation correspond au cas considéré par L. Arnold et M. Theodosopulu [3] dans laquelle on considère non pas les processus X^N mais les processus $\bar{X}^N$ arrêtés de la façon suivante :

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \tau_N : \inf \{ t : \|X_t\|_\infty \geq \rho(t) \} \\ \bar{X}_t^N = X_{t \wedge \tau_N}^N \end{cases}$$

où ρ est une fonction croissante telle que l'équation d'évolution

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, q) = D \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}(t, q) + \mathcal{C}(f(t, q)) \\ \frac{\partial f}{\partial q}(t, 0) = \frac{\partial f}{\partial q}(t, 1) = 0 \\ f(0, q) \in \mathbb{H}_2 \end{cases}$$

a une solution unique $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{H}_0) \cap C(\mathbb{R}^+, \mathbb{H}_2)$ telle que

$$\sup_{t \leq T} \|f(t)\|_\infty \leq \rho(T) - 1.$$

(Dans les hypothèses sur $\mathcal{C}$ faites dans [3], une telle solution f et une telle fonction ρ existent).

La suite de processus $(\bar{X}^N)_{N \geq 0}$ satisfait trivialement (H_1) .

L'hypothèse (H_2) (i) est exprimée par (3.1.5), tandis que (3.1.12) et (3.1.14) impliquent pour tout $u, v \in \mathbb{H}_2$ et $g \in L_\infty$

$$(3.2.3) \quad (a^N(g)u; v)_0 \leq K \varepsilon_N \|g\|_\infty \|u\|_1 \|v\|_1$$

pour une constante convenable K .

Le fait que $H_2 \hookrightarrow \mathbb{H}_1$ soit de Hilbert Schmidt implique immédiatement (H_2) (ii) avec $\alpha_k = \|v_k\|_1^2$.

Définissons maintenant pour tout $u, v \in \mathbb{H}_1$:

$$(3.2.4) \quad (a(g)u; v)_0 := (\mathcal{C} | (g)u; v)_0 + 2D(g \nabla u; \nabla v)_0.$$

Pour tout $g \in \mathbb{H}_0$ on a

$$(a(g)u; v)_0 \leq K \|g\|_\infty \|u\|_1 \|v\|_1$$

ce qui implique que $a(g) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{V}; \mathbb{V}')$.

En outre

$$\left(u; \left[\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(g) - a(g) \right] u \right)_0 = D(g(\nabla_+^N u - \nabla u); u)_0 + D(g(\nabla_-^N u - \nabla u); u)_0$$

d'où

$$\left| \left(u; \frac{1}{\varepsilon_N} a^N(g) - a(g) u \right)_0 \right| \leq \frac{2D}{N} \|g\|_\infty \|u\|_1 \|u\|_2.$$

(On utilise la propriété

$$\left(\|u(\nabla_+^N u - \nabla u)\|_0 \leq \|u\|_1 \|\nabla_+^N u - \nabla u\|_0 \leq \|u\|_1 \frac{1}{N} \|u\|_2 \right)$$

Ceci implique la condition (H_3) .

Il est montré par ailleurs dans [3] que, si on fait les hypothèses suivantes :

$$[\text{A.T.1}] \quad \lim_{N \rightarrow \infty} N \varepsilon_N = 0,$$

$$[\text{A.T.2}] \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|\bar{X}_0^N - f(0)\|_{\mathbb{H}_0} = 0,$$

la suite $(\bar{X}^N)_{N \in \mathbb{N}}$ considérée dans [3] est telle que pour tout $T > 0$, tout $u \in \mathbb{H}_1$ et tout $\delta > 0$

$$(3.2.5) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |(\bar{X}_t^N - f(t); u)_0| \geq \delta \right\} = 0.$$

(cf. aussi [4], page 12).

On a donc pour tout $u, v \in \mathbb{H}_2$ et $s \leq T$

$$\left| E < u, \left[\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(\bar{X}_s^N) - \frac{1}{\varepsilon_N} a^N(f(s)) \right] v > \right| \leq \\ E(K(|\bar{X}_s^N - f(s)|; v)_0 \|u_1\|) + D E(|\bar{X}_s^N - f(s)|; v)_0 [\|\nabla_+^N u\|_0 + \|\nabla_-^N u\|_0]$$

K désignant une constante de Lipschitz pour $|\mathcal{C}|$. Comme $\|\nabla_+^N u\|_0 \leq \|u\|_1$ l'inégalité précédente et la convergence vers zéro de $E(|\bar{X}_s^N - f(s)|; v_0)$ (comme conséquence (3.2.5) et de $|\bar{X}_s^N - f(s)| \leq 2\rho(T)$ pour $s \leq T$) impliquent la propriété (H₄).

On peut donc appliquer le théorème 2.3. On retrouve ainsi le résultat de [4].

PROPOSITION. — Dans les hypothèses de [4] les lois des martingales $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} \bar{M}^N$ convergent faiblement dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}_{-2})$ lorsque $N \rightarrow \infty$ vers le processus gaussien continu à accroissements indépendants centrés de covariance $C(t) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H}_2; \mathbb{H}_{-2})$ où $C(t) = \int_0^t a f(s) ds$, a étant défini par (3.2.4).

Remarque. — Nous avons montré la convergence faible des lois des martingales $\bar{M}^N$ sous l'hypothèse $N\varepsilon_N \rightarrow 0$ et sans l'hypothèse $N^2\varepsilon_N \rightarrow \infty$ comme dans [4], page 49.

3.3. CAS 2 : $\mathbb{V} = \mathbb{H}_4$, $\mathbb{W} = \mathbb{H}_{-2}$.

Cette situation correspond au cas étudié dans Kotelenetz [4]. Sous l'hypothèse $\lim_N N\varepsilon_N = 0$ et $\lim_N \|X_0^N - f(0)\|_{-2} = 0$ en probabilité on a, pour tout $T > 0$ et $\delta > 0$:

$$(3.3.1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^N - f(t)\|_{-2} > \delta \right\} = 0$$

Dans ces conditions les hypothèses (H₁) et (H₂)(i) sont vérifiées. On peut écrire maintenant pour tout $u, v \in \mathbb{H}_3$ et $g \in \mathbb{H}_0$

$$(a^N(g)u; v)_0 \leq K\varepsilon_N \|g\|_0 [\|u \cdot v\|_0 + \|\nabla^N u, \nabla^N v\|_0] \leq K\varepsilon_N \|g\|_0 \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Comme $\mathbb{H}_3 \hookrightarrow \mathbb{H}_2$ est de Hilbert Schmidt, on voit que (H₂)(ii) est vérifiée avec $\alpha_k = \|v_k\|_2^2$.

(H₃) est vérifiée comme ci-dessus pour le cas 1 (3).

(3) On a d'ailleurs $a^N(g) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H}_3; \mathbb{H}_{-3})$ et de même pour $a(g)$.

Enfin, pour la propriété (H₄), on a pour tout $u, v \in \mathbb{H}_4$:

$$\begin{aligned} \left| E < u, \left[\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(X_s^N) - \frac{1}{\varepsilon_N} a^N(f(s)) \right] v > \right| &\leq \\ &\leq K' E(\| X_s^N - f(s) \|_{-2}) (\| uv \|_2 + \| \nabla_+^N u \nabla_+^N v \|_2 + \| \nabla_-^N u \nabla_-^N v \|_2) \\ &\leq 3K' E(\| X_s^N - f(s) \|_{-2}) \| u \|_4 \| v \|_4 \end{aligned}$$

pour une constante K' .

La relation (3.3.1) et la majoration

$$\sup_{t \leq T} \| X_s^N - f(s) \|_{-2} \leq 2\rho_T$$

impliquent

$$\lim_N E \| X_s^N - f(s) \|_{-2} = 0$$

et la propriété (H₄).

Le théorème 2.3 redonne ainsi le résultat de [3] (théorème 2.1) sans d'ailleurs utiliser la condition $\lim_N N^2 \varepsilon_N \rightarrow \infty$.

3.4. CAS 3 : $\mathbb{V} = \mathbb{H}_3$; $\mathbb{W} = \mathbb{H}_0$.

Nous nous plaçons dans les hypothèses du théorème 11 de Kotelenez [4]. On suppose non seulement $\lim_N N \varepsilon_N = 0$ mais $\lim_{N \rightarrow \infty} N^3 \varepsilon_N = 0$. Dans ces conditions lorsque $\lim_{N \rightarrow \infty} \| X_0^N - f(0) \|_0 = 0$ on a, pour tout $T > 0$ et $\delta > 0$:

$$(3.4.1) \quad \lim_N P^N \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \| X_t^N - f(t) \|_0 > \delta \right\} = 0$$

En raisonnant comme dans le cas 2 ci-dessus, on obtient facilement les propriétés (H₂) (ii) et (H₃) pour $\mathbb{V} = \mathbb{H}_3$ et la propriété (H₄) résulte de :

$$E < u, \left[\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(X_s^N) - \frac{1}{\varepsilon_N} a^N(f(s)) \right] v > \leq 3K' E(\| X_s^N - f(s) \|_0) \| u \|_2 \| v \|_2.$$

On obtient donc la proposition suivante non démontrée dans [4].

PROPOSITION. — *Pour la fonction $\mathcal{C}$ considérée par Arnold et Theodosopulu et avec les hypothèses suivantes :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^3 \varepsilon_N = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \| X_0^N - f(0) \|_0 = 0$$

les lois des martingales $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$ convergent faiblement dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}_{-3})$,

lorsque $N \rightarrow \infty$ vers le processus gaussien continu à accroissements indépendants centrés de covariance $C(t) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H}_2; \mathbb{H}_{-2})$ où, pour tout $u, v \in \mathbb{H}$

$$(u; C(t)v)_0 := \int_0^t [(\mathcal{C} | (f(s))u; v)_0 + 2D(f(s)\nabla u; \nabla v)_0] ds.$$

RÉFÉRENCES

- [1] D. ALDOUS, Stopping times and tightness, *Ann. of Prob.*, t. **6**, n° 2, 1978, p. 335-340.
- [2] L. ARNOLD, *Mathematical models of chemical reactions*. In: *Stochastic Systems*. M. Hazewinkel, J. Willems, ed., Dordrecht, 1981.
- [3] L. ARNOLD, M. THEODOSOPULU, Deterministic limit of the stochastic model of chemical reactions with diffusion. *Adv. Appl. Prob.*, t. **12**, 1980, p. 363-329.
- [4] P. KOTELÉNEZ, *Law of large numbers and central limit theorem for chemical reactions with diffusions*. Universitat Bremen, 1982.
- [5] E. LENGART, Relations de domination entre deux processus. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **B XIII**, 1977, p. 171-179.
- [6] M. MÉTIVIER, *Semimartingales*. De Gruyter. Berlin, New York, 1982.
- [7] R. REBOLLEDO, La méthode des martingales appliquée à la convergence en loi des processus. *Mémoires de la S. M. F.*, t. **62**, 1979.

(Manuscrit reçu le 13 mars 1984)