ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

XAVIER FERNIQUE

Comparaison de mesures gaussiennes et de mesures produit

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 2 (1984), p. 165-175
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_2_165_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 20, n° 2, 1984, p. 165-175. *Probabilités et Statistiques*

Comparaison de mesures gaussiennes et de mesures produit

par

Xavier FERNIQUE
Université Louis Pasteur, Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Laboratoire associé au C. N. R. S., rue du Général-Zimmer,
F67084, Strasbourg, Cedex

SOMMAIRE. — Soient μ une mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ la suite de ses marges unidimensionnelles; on montre que si μ n'est pas orthogonale à une mesure produit $\pi = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ et si pour tout n, μ_n est équivalente à π_n, alors μ est équivalente à π. La preuve est basée sur le fait suivant : soit μ une mesure gaussienne et π une mesure produit sur $\mathbb{R}^n$, le théorème de la limite centrale permet de construire une mesure *gaussienne produit* plus proche de μ que π au sens de la distance de Hellinger.

ABSTRACT. — Let μ be a gaussian measure on $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ and let $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ be its one dimensional marginal distributions. We show that if μ is not orthogonal to a product measure $\pi = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ and if for every n, μ_n is equivalent to π_n, then μ is equivalent to π. The proofs relies on the following fact: if μ is a gaussian measure and π a product measure on $\mathbb{R}^n$, then the central limit theorem allows one to construct a product gaussian measure closer to μ than π for the Hellinger distance.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - Vol. 20, 0246-0203
84/02/165/11/$ 3,10/© Gauthier-Villars

0. INTRODUCTION

0.1. Soient X et Y deux v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les lois de X et de Y sont dites orthogonales s'il existe une partie mesurable A de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $P\{X \in A\} = 0$ et $P\{Y \in A\} = 1$; elles sont dites équivalentes si pour toute partie mesurable A de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $P\{X \in A\} = 0$ si et seulement si $P\{Y \in A\} = 0$. Dans certains cas, on sait que ces deux notions sont complémentaires : si les composantes de X sont indépendantes ainsi que celles de Y, alors un théorème de S. Kakutani [*5*] indique que les lois de X et de Y sont équivalentes si et seulement si elles ne sont pas orthogonales et les lois de leurs composantes de mêmes rangs sont équivalentes; de la même manière, si les lois de X et de Y sont gaussiennes, alors un théorème de Hajek [*4*] et Feldman [*3*] montre que les lois de X et de Y sont équivalentes si et seulement si elles ne sont pas orthogonales. On peut trouver dans [*1*] une présentation simple de ces propriétés générales. La comparaison des lois de X et de Y dans le cas intermédiaire où X a une loi gaussienne et Y a une loi produit est complètement étudiée dans [*2*] si la loi produit de Y est une loi gaussienne et l'est partiellement dans [*6*] dans une situation plus générale; dans le travail présenté ici, on étudie ce problème : si X a une loi gaussienne et Y une loi produit, si de plus les composantes de X et de Y ont des lois équivalentes, alors les lois de X et de Y dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont orthogonales ou équivalentes, on précise dans quelles conditions l'équivalence est réalisée.

0.2. Les résultats rappelés ci-dessus ont montré que l'outil essentiel pour ce genre d'études est le suivant : pour tout entier n, nous notons π_n la projection de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur le produit $\mathbb{R}^n$ de ses n premiers facteurs, nous supposons que les lois de $\pi_n(X)$ et $\pi_n(Y)$ ont des densités $\Delta_{\pi_n(X)}$ et $\Delta_{\pi_n(Y)}$ pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, on sait alors que les lois de X et Y sont orthogonales dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si la distance de Hellinger $d_H(\pi_n(X), \pi_n(Y))$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers l'infini ou plus simplement si le produit scalaire associé $\int \sqrt{\Delta_{\pi_n^{(x)}(X)} \Delta_{\pi_n^{(x)}(Y)}}\, dx$ tend vers zéro. Pour utiliser efficacement ce passage à la limite, nous étudierons dans le paragraphe 1, les variations de ce produit scalaire pour X et n fixés quand Y décrit l'ensemble des v. a. à loi produit ; dans le paragraphe 2, nous préciserons ces propriétés quand la loi de X est gaussienne; le paragraphe 3 présentera le résultat principal. Le fil conducteur est le suivant : si X a une loi gaussienne et Y une loi produit non orthogonale à celle de X, peut-on construire à partir du théorème de la limite centrale appliqué à Y une loi produit *gaussienne* non orthogonale à celle de X et donc équivalente ?

1. APPROXIMATION DE MESURES PAR LES MESURES PRODUIT EN DIMENSION FINIE

1.1. Soient I un index fini et (E_i, m_i), $i \in I$ une famille d'espaces mesurés de formes respectives $\left(\mathbb{R}^{n_i}, dx_i = \bigotimes_{j \leqslant n_i} dx_{i,j}\right)$; on pose $E = \prod_{i \in I} E_i$, $dx = \bigotimes_{i \in I} dx_i$. On note $X = (X_i, i \in I)$ une v. a. à valeurs dans E dont la loi a *une densité* Δ_X *continue et strictement positive, les densités des composantes étant de plus localement bornées.* On pose

$$F = \left\{ f = \bigotimes_{i \in I} f_i : \forall i \in I, f_i \in L^1(E_i, dx_i ; \mathbb{R}^+) \right\}$$

et

$$F_1 = \left\{ f \in F : \sup_{i \in I} \int f_i dx_i \leqslant 1 \right\}.$$

On note Φ l'application de F dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\Phi(f) = \int \prod_{i \in I} \sqrt{f_i(x_i)} \sqrt{\Delta_X(x)} dx .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que Φ est majorée par 1 dans F_1 ; d'ailleurs si F_1 est muni de la convergence faible des racines carrées dans $L^2(E)$, il est compact et Φ est continue de sorte que l'ensemble

$$P(X) = \{ f \in F_1 : \Phi(f) = \sup_{F_1} \Phi = M(X) \}$$

qui est contenu dans l'ensemble $\left\{ \forall i \in I, \int f_i dx_i = 1 \right\}$ est un ensemble compact non vide. La proposition 1.2 analyse certaines propriétés générales de P(X).

PROPOSITION 1.2. — *Si* $\bar{f}$ *appartient à* P(X), *alors* $\bar{f}$ *a toutes ses composantes strictement positives p. p. ; de plus, on a :*

1.2.1 $\forall i \in \mathrm{I}, \quad \bar{f}_i(x_i) = \dfrac{1}{\mathrm{M(X)}} \displaystyle\int \left(\prod_{j \in \mathrm{I}} \sqrt{\bar{f}_j(x_j)} \right) \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}}(x)} \bigotimes_{j \neq i} dx_j, \quad$ p. p. dans E_i.

1.2.2. $\forall i \in \mathrm{I}, \quad \bar{f}_i(x_i) \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{M(X)}^2} \Delta_{\mathrm{X}_i}(x_i), \quad$ p. p. dans E_i.

Enfin $\bar{f}$ *a ses composantes p. p. égales à des fonctions continues sur les* E_i *et* P(X) *est compact pour la topologie de la convergence étroite, pour la topologie forte de* $\mathrm{L}^1(\mathrm{E})$ *et pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de* E *des versions continues ; ces topologies coïncident sur* P(X).

Démonstration. — Soient f un élément de F_1 et $\bar{f}$ un élément de P(X) ; nous fixons un élément i de I et nous leur associons l'application φ de [0, 1] dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(\alpha) = \Phi(g) \quad \text{où} \quad g_i = \alpha \bar{f}_i + (1 - \alpha) f_i \quad \text{et} \quad \forall j \neq i, \quad g_j = \bar{f}_j ;$$

alors φ est maximale en $\alpha = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in [0, 1[$, on a donc :

$$\int \frac{2\bar{f}_i \prod_{j \neq i} \sqrt{\bar{f}_j} \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}}(x)}}{\sqrt{\bar{f}_i} + \sqrt{\alpha \bar{f}_i + (1-\alpha) f_i}} dx \geqslant \left(\int_{\{\bar{f}_i = 0\}} + \int_{\{\bar{f}_i > \varepsilon f_i\}} \right) \frac{2 f_i \prod_{j \neq i} \sqrt{\bar{f}_j} \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}}(x)}}{\sqrt{\bar{f}_i} + \sqrt{\alpha \bar{f}_i + (1-\alpha) f_i}} dx .$$

Quand α tend vers 1, le théorème de convergence dominée par $2 \prod_{j \in \mathrm{I}} \sqrt{\bar{f}_j} \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}}(x)}$ montre que le premier membre a la limite finie M(X) ; le premier terme du second membre a donc aussi une limite finie, ce qui exige en tenant compte de $\{ \bar{f}_i = 0 \}$ que l'intégrale

$$\int_{\{\bar{f}_i = 0\}} \sqrt{f_i} \prod_{j \neq i} \sqrt{\bar{f}_j} \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}}(x)} dx$$

soit nulle ; puisque les $\bar{f}_j$ ne sont pas p. p. nuls dans les autres E_j et que Δ_{X} est positif partout, en choisissant convenablement f_i, on constate que la mesure de $\{ \bar{f}_i = 0 \}$ est nulle, c'est la première affirmation de l'énoncé.

On peut aussi appliquer au second terme du second membre le théorème de convergence dominée par $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(1+\sqrt{\alpha})^{-1}\sqrt{f_i}\prod_{j\neq i}\sqrt{\bar{f}_j}\sqrt{\Delta_X}$; il fournit :

$$M(X) \geqslant \sup_{\varepsilon>0}\int_{\{\bar{f}_i>\varepsilon f_i\}} \frac{f_i\prod_{j\neq i}\sqrt{\bar{f}_j}\sqrt{\Delta_X}}{\sqrt{\bar{f}_i}}\,dx\,,$$

et donc puisque $\bar{f}_i$ est strictement positive p. p. :

$$M(X) \geqslant \int\left(\int\prod_{j\neq i}\sqrt{\bar{f}_j}\sqrt{\Delta_X}\bigotimes_{j\neq i}dx_j\right)(\bar{f}_i)^{-\frac{1}{2}}(f_i dx_i)\,.$$

En utilisant des suites de fonctions f_i convergeant vers des mesures de Dirac, on obtient par le théorème de dérivation de Lebesgue :

$$M(X)\bar{f}_i(x_i) \geqslant \int\prod_{j\in I}\sqrt{\bar{f}_j}\sqrt{\Delta_X}\bigotimes_{j\neq i}dx_j, \quad \text{p. p. dans } E_i\,;$$

en intégrant en x_i, la définition de M(X) montre qu'en fait il y a p. p. égalité, c'est la relation 1.2.1. ; la relation 1.2.2 s'en déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Elle montre en particulier que P(X) est majoré à un facteur numérique fixe près par la fonction intégrable $\prod_{i\in I}\Delta_{X_i}(x_i)$.

Du fait de la relation 1.2.2, les propriétés topologiques énoncées seront établies si on montre que les versions des éléments de P(X) définies partout par la relation 1.2.1 sont sur tout compact de E uniformément équicontinues. Ceci résultera de la continuité de Δ_X et de la majoration des Δ_{X_i}. Nous utilisons sur E et sur tout E_i les normes définies par les plus grandes composantes. Soient $i\in I$, $\varepsilon>0$ et K un compact de E_i, nous choisissons un nombre A tel que :

$$K \subset \{\,\|x_i\|\leqslant A\,\} \quad \text{et} \quad \sum_{j\neq i}P\{\,\|X_j\|>A\,\}\leqslant \varepsilon^2M^4(X)\ (16\ \sup_K\ \Delta_{X_i})^{-1}\,,$$

nous fixons ensuite un nombre $\eta>0$ tel que :

$$\|x\|\leqslant A,\ \|x'\|\leqslant A,\ \|x-x'\|\leqslant\eta$$
$$\Rightarrow\sqrt{\Delta_X(x)}-\sqrt{\Delta_X(x')}\leqslant\varepsilon M(X)\left(4\int_{\|x\|\leqslant A}\bigotimes_{j\neq i}dx_j\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dans ces conditions, en utilisant successivement deux formules de Cauchy-Schwarz, on majore $\sqrt{f_i(x_i)} - \sqrt{f_i(x_i')}$ par :

$$\frac{2}{\mathrm{M(X)}}\sqrt{\sup_{\mathrm{K}} \Delta_{\mathrm{X}_i} \int_{\|u\|>\mathrm{A}} \prod_{j\neq i} f_j(u_j) \bigotimes_{j\neq i} du_j}$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{M(X)}}\sqrt{\int_{\|u\|\leqslant \mathrm{A}} \left| \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}}(x_i, u)} - \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}}(x_i', u)} \right|^2 \bigotimes_{j\neq i} du_j} \,;$$

On majore l'intégrale figurant au premier terme par l'inégalité 1.2.2, le choix de A et de η concluent à la majoration par ε et ceci termine la démonstration de la proposition.

1.3. Dans cet alinéa, nous utilisons deux fois les structures ci-dessus. La première fois, $\mathrm{I} = [1, n]$, $n_i = 1$ et donc $\mathrm{E}_i = \mathbb{R}$, $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, F est associé à la décomposition de E suivant les n facteurs de $\mathbb{R}^n$; la seconde fois, $\mathrm{I} = [1, n]$, $n_i = 2$ et donc $\mathrm{E}_i = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathrm{E} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$, F est associé à la décomposition de E suivant les n facteurs de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$ et non pas les deux n facteurs de $\mathbb{R}^{2n}$. On note $\mathrm{X} = (\mathrm{X}^1, \mathrm{X}^2)$ un couple de v. a. *indépendantes* à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on construit $\mathrm{M}(\mathrm{X}^1)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}^1)$, $\mathrm{M}(\mathrm{X}^2)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$. On a aussi $\mathrm{X} = ((\mathrm{X}_j^i, i \in [1, 2]), j \in [1, n])$, c'est une v. a. à valeurs dans $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$, on construit M(X) et P(X).

PROPOSITION 1.3. — *On a* $\mathrm{M(X)} = \mathrm{M}(\mathrm{X}^1)\mathrm{M}(\mathrm{X}^2)$*; de plus pour tout élément* $\bar{f} = \bigotimes_{i=1}^{n} \bar{f}_i$ *de* P(X), *les intégrales* $\int \bar{f}_i(x_i^2, x_i^2)dx_i^2$ *définissent un élément de* $\mathrm{P}(\mathrm{X}^1)$.

Démonstration. — Utilisant un élément $\bar{f}^1$ de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^1)$ et un élément $\bar{f}^2$ de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$, on constate immédiatement l'inégalité $\mathrm{M}(\mathrm{X}^1)\mathrm{M}(\mathrm{X}^2) \leqslant \mathrm{M(X)}$. Choisissons alors un élément $\bar{f}$ de P(X), on a la suite d'inégalités :

$\mathrm{M}(\mathrm{X}^1)\mathrm{M}(\mathrm{X}^2) \leqslant \mathrm{M(X)}$

$$\leqslant \int \left\{ \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\int \bar{f}_i(x_i^1, x_i^2)dx_i^2} \int \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\bar{f}_i(x_i^1, x_i^2)}{\int \bar{f}_i(x_i^1, x_i^2)dx_i^2}} \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}^2}(x^2)}dx^2 \right\} \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}^1}(x^1)}dx^1 .$$

En utilisant la définition de $\mathrm{M}(\mathrm{X}^2)$ dans l'intégrale interne, ceci se majore par :

$$\mathrm{M}(\mathrm{X}^2) \int \left\{ \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\int \bar{f}_i(x_i^1, x_i^2)dx_i^2} \right\} \sqrt{\Delta_{\mathrm{X}^1}(x^1)}dx^1 ,$$

les éléments du produit de facteurs sont les racines carrées des composantes d'un élément f de F_1 ; en utilisant la définition de $M(X^1)$, on obtient la majoration par $M(X^1)M(X^2)$ si bien que les inégalités successives sont en fait toutes des égalités; les résultats énoncés s'ensuivent.

2. APPROXIMATION DES MESURES GAUSSIENNES PAR DES MESURES PRODUIT EN DIMENSION FINIE

THÉORÈME 2.1. — *On suppose* $I = [1, n]$, $n_i = 1$, $E_i = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$ *; soit* G *une v. a. gaussienne centrée à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *; soit enfin* A *une v. a. dont la loi est une loi produit appartenant à* P(G). *Dans ces conditions,* A *possède des moments des deux premiers ordres et est centrée ; la loi gaussienne produit centrée ayant même covariance appartient aussi à* P(G). *De plus on a :*

2.1.1 $$\Phi^4\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \Delta_{G_i}\right) \leqslant M^4(G) \leqslant \left(1 + \ln\left(1/\Phi^4\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \Delta_{G_i}\right)\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. — *a*) Soit G une v. a. gaussienne centrée non dégénérée à valeurs dans E, sa densité est continue strictement positive et les densités de ses composantes sont bornées de sorte qu'on peut lui appliquer les résultats précédents; nous notons $X = (X^1, X^2)$ un couple de copies indépendantes de G. Soit (f^1, f^2) un couple d'éléments de P(G), alors la proposition 1.3 montre que $\prod_{i=1}^{n} f_i^1(x_i^1)f_i^2(x_i^2)$ est un élément de P(X), on a donc :

$$M^2(G) = \int \prod_{i=1}^{n} \sqrt{f_i^1(x_i^1)f_i^2(x_i^2)}\sqrt{\Delta_X(x^1, x^2)}dx\ ;$$

soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on lui associe le changement de variables défini par :

$$x^1 = \cos\theta y^1 + \sin\theta y^2, \qquad x^2 = -\sin\theta y^1 + \cos\theta y^2,$$

choisi de sorte de conserver la mesure dx et la loi de X; en calculant le changement de variables, on obtient :

$$M^2(G) = \int \prod_{i=1}^{n} \sqrt{f_i^1(\cos\theta x_i^1 + \sin\theta x_i^2)f_i^2(-\sin\theta x_i^1 + \cos\theta x_i^2)} \\ \times \sqrt{\Delta_X(x^1, x^2)}dx$$

et ceci exprime (proposition 1.3) que la suite $(g_i, i \in \mathrm{I})$ définie par :

$$g_i(x_i^1, x_i^2) = f_i^1 (\cos\theta x_i^1 + \sin\theta x_i^2) f_i^2 (-\sin\theta x_i^1 + \cos\theta x_i^2)$$

est un élément de P(X); la même proposition implique donc que la suite $\bar{f} = \int g(\,, x^2)dx^2$ est un élément de P(G). Ceci se traduit plus simplement en introduisant deux v. a. indépendantes à valeurs dans E, A^1 de loi $(f^1 dx^1)$ et A^2 de loi $(f^2 dx^2)$; on constate en effet que $(\bar{f} dx)$ est la loi de $\mathrm{A}^1 \cos\theta - \mathrm{A}^2 \sin\theta$, cette loi est donc un élément de P(G).

b) Soit f un élément arbitraire de P(G); nous notons A une v. a. de loi $(f dx)$ et $(\mathrm{A}^j, j \in \mathbb{N})$ une suite de copies indépendantes de A; le résultat (*a*) montre par induction que la loi de $\mathrm{S_N(A)} = \mathrm{N}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{A}^1 + \ldots + \mathrm{A}^\mathrm{N})$ a une densité qui appartient à P(G); les propriétés de compacité de P(G) (proposition 1.2) impliquent qu'on peut extraire de la suite de ces lois une suite étroitement convergente vers un élément de P(G); le théorème de la limite centrale dans $\mathbb{R}^n$ montre donc que A possède un moment du second ordre et est centrée, la loi limite étant la loi gaussienne centrée de même variance. Cette loi est une loi gaussienne produit appartenant à P(G); les premiers résultats du théorème sont démontrés.

c) Ces premiers résultats montrent que M(G) se calcule à partir des seules lois gaussiennes produit. Notant γ la covariance de G et g la matrice inverse, nous avons :

$$\mathrm{M(G)} = \sup \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{(\det\gamma)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(\det x)^{\frac{1}{4}}} \int \exp\left[-\frac{1}{4}{}^t u(g + x^{-1})u\right] du$$

où x parcourt l'ensemble X des $n \times n$-matrices diagonales positives; en tenant compte de la commutativité du déterminant d'un produit, l'intégration fournit :

$$\mathrm{M^4(G)} = \sup_{x \in \mathrm{X}} \left[(\det\gamma)\left(\det\frac{g + x^{-1}}{2}\right)(\det x)\left(\det\frac{g + x^{-1}}{2}\right)\right]^{-1},$$

et en effectuant dans cet ordre :

$$\mathrm{M^4(G)} = \sup_{x \in \mathrm{X}} \left(\det\left(\mathrm{I} + \frac{x^{-1} + xg - 2\mathrm{I}}{4}\right)\right)^{-1}.$$

Les matrices γ et x étant symétriques positives, la matrice $h = \gamma x^{-1}$ a un spectre $\Lambda(h)$ positif, la matrice $k = (\gamma x^{-1} + xg - 2\mathrm{I}) = (h + h^{-1} - 2\mathrm{I})$ qui en est une fonction positive a un spectre $\Lambda(k) = \left\{\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2, \lambda \in \Lambda(h)\right\}$

qui est aussi positif. On en déduit en comptant les valeurs propres avec leur ordre de multiplicité :

$$\det(\mathrm{I} + k/4) = \prod_{\lambda\in\Lambda(k)} (1 + \lambda/4) \in \left[1 + \frac{1}{4} \sum_{\lambda\in\Lambda(k)} \lambda, \exp\left(\frac{1}{4} \sum_{\lambda\in\Lambda(k)} \lambda\right)\right],$$

c'est-à-dire que $\det(\mathrm{I} + k/4)$ est compris entre $1 + \frac{1}{4}(\operatorname{Tr} k)$ et $\exp\left(\frac{1}{4}\operatorname{Tr} k\right)$; ceci s'écrit :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \exp\left(- \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\gamma_{ii}}{x_i^2} + g_{ii}x_i^2 - 2\right)\right) \leqslant \mathrm{M}^4(\mathrm{G})$$

$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\gamma_{ii}}{x_i^2} + g_{ii}x_i^2 - 2\right)}$$

et donc :

$$\exp\left(- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\gamma_{ii}g_{ii}} - 1)\right) \leqslant \mathrm{M}^4(\mathrm{G}) \leqslant \frac{2}{2 + \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\gamma_{ii}g_{ii}} - 1)}.$$

On a de la même manière :

$$\Phi^4\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \Delta_{\mathrm{G}_i}\right) \geqslant \exp\left(- \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (\gamma_{ii}g_{ii} - 1)\right),$$

et un calcul élémentaire fournit le résultat 2.1.1.

3. COMPARAISON DE MESURES GAUSSIENNES ET DE MESURES PRODUIT EN DIMENSION INFINIE

THÉORÈME 3.1. — *Soient* X *et* Y *deux v. a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *on suppose* X *gaussienne et les composantes de* Y *indépendantes, on suppose aussi que les composantes de* X *et de* Y *ont des lois équivalentes. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Les lois de X *et de* Y *ne sont pas orthogonales dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

ii) Les lois de X *et de* Y *sont équivalentes dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

iii) Les lois de X *et de* Y *sont équivalentes à la loi produit des marges unidimensionnelles de* X.

Démonstration. — Les implications $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ sont triviales; il suffit donc d'établir $(i) \Rightarrow (iii)$; sous l'hypothèse (i), on peut à une translation près supposer que X est centré et quitte à enlever de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ certains facteurs où les lois des composantes de X et de Y sont simultanément dégénérées, on peut limiter la preuve au cas où toutes les composantes de X et de Y ont des lois équivalentes à la mesure de Lebesgue correspondante. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les lois de $\pi_n(X)$ et de $\pi_n(Y)$ n'étant pas orthogonales, la loi de $\pi_n(X)$ ne sera pas portée par un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^n$ de sorte que la loi de $\pi_n(X)$ sera absolument continue pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pourra appliquer à $\pi_n(X)$ les résultats des paragraphes 1 et 2. Puisque (i) est vérifiée, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier n, on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\Delta_{\pi_n^{(x)}(Y)}} \sqrt{\Delta_{\pi_n^{(x)}(X)}} dx > \varepsilon ;$$

notons Z une v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gaussienne à composantes indépendantes de mêmes marges unidimensionnelles que X; le théorème 2.1 implique alors pour tout entier n :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\Delta_{\pi_n^{(x)}(Z)}} \sqrt{\Delta_{\pi_n^{(x)}(X)}} dx \geq \exp\left(- \frac{1}{4}(\varepsilon^{-8} - 1)\right) ;$$

d'après le résultat rappelé en 0.2, les lois de X et de Z ne sont donc pas orthogonales; comme elles sont gaussiennes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le théorème de Hajek-Feldman conclut à leur équivalence; ceci implique que les lois de Y et de Z ne sont pas non plus orthogonales; comme ce sont des lois produit, le théorème de Kakutani conclut à leur équivalence. Le théorème est démontré.

3.2 *Remarques :* (1) Soit X une v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$; si $n = 2$, les propriétés de concavité de $(f_1, f_2) \to \sqrt{f_1 f_2}$ montrent que P(X) n'a qu'un élément; si de plus X est gaussien centré, l'équation 1.2.1 permet de calculer explicitement la covariance de cet élément gaussien de P(X); si n est supérieur à 2 et X gaussien centré, l'équation 1.2.1 permet encore de calculer un système de n équations à n inconnues vérifiées par les éléments de la covariance de l'élément gaussien de P(X); le théorème 3.1 prouve en particulier l'existence d'une solution de ce système.

(2) L'argument central de l'ensemble des preuves présentées ici dans le cas gaussien se situe à l'alinéa (a) de la démonstration du théorème 2.1 : si X est gaussien et centré dans $\mathbb{R}^n$ et si A^1 et A^2 sont deux v. a. indépendantes dont les lois appartiennent à P(X), alors la loi de $2^{-\frac{1}{2}}(A^1 + A^2)$ appartient

aussi à P(X). Cet énoncé semble imposer l'extension naturelle au cas où la loi de X serait stable non gaussienne. Il faut pourtant remarquer que la propriété gaussienne de X intervient dans la preuve d'une manière très forte, savoir la stabilité de la loi d'un couple de copies indépendantes de X pour certaines transformations; cette invariance n'a pas d'équivalent pour les autres lois stables de sorte que la possibilité de l'extension n'est pas évidente.

RÉFÉRENCES

[*1*] S. D. CHATTERJI et V. MANDREKAR, Equivalence and singularity of gaussian measures and applications. *Probabilistic Analysis and related topics*, t. **1**, Academic Press, N. Y., 1978, p. 169-197.

[*2*] S. D. CHATTERJI et S. RAMASWAMY, Mesures gaussiennes et mesures produits. Séminaire de Probabilités, XVI, *Lectures Notes*, t. **920**, Springer.

[*3*] J. FELDMAN, Equivalence and perpendicularity of gaussian processes. *Pacific J. Math.*, t. **9**, 1958, p. 699-708.

[*4*] J. HAJEK, On a property of normal distribution of any stochastic processes. *Math. Statist. Prob.*, t. **1**, 1958-1961, p. 245-252.

[*5*] S. KAKUTANI, On equivalence of infinite product measures. *Ann. of Math.*, t. **49**, 1948, p. 214-224.

[*6*] S. RAMASWAMY, *Gaussian measures and product measures* (preprint), 1983.

(Manuscrit reçu le 28 octobre 1983)