ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

F. BRODEAU

Identifications optimales de paramètres pour un système linéaire excité par un bruit gaussien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, n° 2 (1983), p. 123-152

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_2_123_0>

© Gauthier-Villars, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIX, n° 2, 1983, p. 123-152. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Identifications optimales de paramètres pour un système linéaire excité par un bruit gaussien

par

F. BRODEAU

Laboratoire I. M. A. G. UII,
B. P. 53 X, 38041 Grenoble, Cedex

RÉSUMÉ. — On étudie le problème de l'estimation des paramètres pour un système régi par une équation différentielle stochastique linéaire unidimensionnelle excitée par un bruit gaussien en présence de fonctions de commande adaptées à l'état du système. Les paramètres du bruit étant connus, on montre, pour deux fonctions de commande, l'une étagée, l'autre markovienne, que l'on peut estimer les paramètres de dérive par une famille convergente et asymptotiquement normale d'estimateurs du maximum de vraisemblance. Pour ce faire on prouve l'existence de solutions stationnaires de l'équation différentielle. On montre enfin que chaque commande est optimale relativement à une classe de commandes pour un critère lié à la matrice d'information.

ABSTRACT. — This paper is concerned with the problem of parameter estimation in a system modelled by a scalar linear stochastic differential equation excited by Gaussian noise when controls of feedback type are used. Parameters in the noise being known, it is shown, for two controls, a step one, and a markovian one, that the drift parameters are identifiable by a family of maximum likehood estimates which is consistent and asymptotically normally distributed. For that aim existence of stationary solutions of the differential equation is proved. Further it is shown that each control is optimal for large classes of controls with respect to a criterion based on the information matrix.

Annales de l'Institut Henri Poincaré-Section B-Vol. XIX, 0020-2347/1983/123/$ 5,00/
© Gauthier-Villars

NOTATIONS

Pour tout $x > 0$, l_x désigne la mesure de Lebesque de $[0, x]$.

Pour toute mesure μ, μ lim représente la limite au sens de la convergence en mesure relativement à μ.

1. INTRODUCTION

On considère le problème de l'estimation des paramètres φ_1 et φ_2 pour un système dynamique stochastique en temps continu régi par l'équation

$$(1.1) \qquad dX_t = \varphi_1 X_t dt + \varphi_2 Y_t dt + dW_t, \qquad t \geq 0, \qquad X_0 \text{ donné},$$

où X_t représente l'état du système à l'instant t, $\{ Y_t \}$ une fonction de commande, ou stratégie, $\{ W_t \}$ un processus de Wiener standard.

Dans [*1*] ce problème a été traité dans le cas de stratégies non aléatoires. Ici on l'aborde dans le cas de stratégies adaptées à l'état du système.

L'objectif est la résolution des deux problèmes suivants :

(P1) : estimer φ_1 et φ_2 au vu de l'observation d'une trajectoire de l'état du système sur un intervalle de temps $[0, T]$ quand une fonction de commande est choisie.

(P2) : choisir la stratégie de façon à optimiser, sur une classe donnée de stratégies, la qualité de l'estimation.

Deux types de stratégies sont utilisés :

Type I : stratégies étagées relatives à une partition finie de $[0, T]$ en intervalles.

Type II : stratégies adaptées à chaque instant à l'état du système en cet instant.

On fait les hypothèses suivantes

$$H_1 : \varphi_1 < 0, \qquad H_2 : X_0 \in (S),$$

où (S) désigne l'ensemble des variables aléatoires X du second ordre, de loi P_X, telles que $P_X(\{ 0 \}) = 0$, et

$$(1.2) \qquad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{\delta X^2} dP_X(x) < + \infty$$

Au paragraphe 2, après avoir défini une structure statistique, (P_1) est résolu pour une stratégie de type I à l'aide d'un estimateur du maximum de vrai-

semblance. On montre ensuite que cette stratégie est solution de (P_2) relativement à un critère lié à la matrice d'information.

Au paragraphe 3 les mêmes problèmes sont résolus pour une stratégie de type II.

Pour les deux types de stratégies on consacre une place importante à l'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs utilisés. Dans ce but, on établit l'existence de solutions stationnaires de (1.1). H_1 joue un rôle fondamental pour démontrer cette existence.

2. CAS D'UNE STRATÉGIE DE TYPE I

2.1. La structure statistique.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilité sur lequel sont définis un processus de Wiener $\{ W_t \}_{t \geq 0}$ et une variable aléatoire X_0 appartenant à (S) supposés indépendants.

Pour tout élément i de $\mathbb{N}^*$ on désigne par $\mathscr{D}^i$ la suite $\{ t_n^i \}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n^i = \dfrac{n}{2^i}$.

Soit $\alpha > 0$, $T > 0$ donnés. Pour i fixé on considère la stratégie définie sur $[0, T]$ par

$$t_n^i \leq t < t_{n+1}^i, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad Y_i(X_i)(t) = \alpha \text{ signe } (X_i(t_n^i)),$$

où

$$\text{signe } (x) = 1_{[0, +\infty[}(x) - 1_{]-\infty, 0[}(x),$$

la convention concernant la valeur de cette fonction en O étant d'ailleurs arbitraire, et où X_i est la solution de (1.1) correspondant à l'état initial X_0 et à la stratégie $Y_i(X_i)$ notée aussi Y_i.

La définition précédente a un sens puisque l'on a

$$(2.1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_n^i \leq t < t_{n+1}^i$$

$$X_i(t) = X_i(t_n^i) + \int_{t_n^i}^t (\varphi_1 X_i(s) + \varphi_2 \alpha \text{ signe } (X_i(t_n^i)) ds + W_t - W_{t_n^i}$$

d'où l'on déduit

$$(2.2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_n^i \leq t < t_{n+1}^i$$

$$X_i(t) = e^{\varphi_1 t} \left[e^{-\varphi_1 t_n^i} X_i(t_n^i) - \frac{\varphi_2}{\varphi_1} (e^{-\varphi_1 t} - e^{-\varphi_1 t_n^i}) \alpha \text{ signe } (X_i(t_n^i)) + \int_{t_n^i}^t e^{-\varphi_1 s} d W_s \right]$$

On se propose de résoudre (P_1) pour Y_i sur $[0, T]$, où T est supposé appartenir à $\mathscr{D}^i$. On note $C_T(C)$ l'espace des applications continues de $[0, T]$ ($[0, +\infty[$) dans $\mathbb{R}$. C_T est muni de la tribu $\mathscr{C}_T$ engendrée par les applications coordonnées M_s, $0 \leq s \leq T$; $\mathscr{C}$ désigne la tribu engendrée sur C par la famille $\{\mathscr{C}_T\}_{T \geq 0}$. On désigne par $P^T_{\varphi, Y_i}(\nu^T)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, la restriction à $\mathscr{C}_T$ de la loi $P_{\varphi, Y_i}(\nu)$ de $X_i(X_0 + W_t)$.

Le théorème de Girsanov dont l'emploi est justifié par (1.2), et par l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in [-\alpha, +\alpha] \quad |\varphi_1 x + \varphi_2 y| \leq |\varphi_1|(x) + |\varphi_2|\alpha$$

permet de montrer que, pour tout T, P^T_{φ, Y_i} et ν^T sont équivalentes, et que

$$(2.3) \quad \frac{dP^T_{\varphi, Y_i}}{d\nu^T} = \exp\left[\int_0^T (\varphi_1 M_t + \varphi_2 Y_i(M)(t) dM_t - \frac{1}{2}\int_0^T (\varphi_1 M_t + \varphi_2 Y_i(M)(t))^2 dt\right],$$

l'intégrale stochastique étant calculée par rapport à ν^T.

De plus pour P_{φ, Y_i} le processus $\tilde{W}_t$ défini sur $(C, \mathscr{C})$ par

$$\tilde{W}_t = M_t - M_0 - \int_0^t (\varphi_1 M_s + \varphi_2 Y_i(M)(s)) ds$$

est un processus de Wiener.

(2.3) conduit à poser (P_1) dans la structure $(C, \mathscr{C}_T, \{P^T_{\varphi, Y_i}\} ; \varphi_1 < 0)$. Une fonction de Log-vraisemblance est fournie par

$$(2.4) \quad L_T(\varphi) = \int_0^T (\varphi_1 M_t + \varphi_2 Y_i(M)(t)) dM_t - \frac{1}{2}\left[\varphi_1^2 \int_0^T M_t^2 dt + \varphi_2^2 \int_0^T Y_i^2(M)(t) dt + 2\varphi_1\varphi_2 \int_0^T M_t Y_i(M)(t) dt\right]$$

Cette fonction admet des dérivées premières et secondes, $L_T^{(1)}$ et $L_T^{(2)}$, obtenues par dérivation formelle de (2.4) ; relativement à P^T_{φ, Y_i} on a

$$(2.5) \quad L_T^{(1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L_T(\varphi)}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial L_T(\varphi)}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^T M_t d\tilde{W}_t \\ \displaystyle\int_0^T Y_i(M)(t) d\tilde{W}_t \end{pmatrix}$$

$$(2.6) \quad L_T^{(2)}(\varphi) = \left(\left(\frac{\partial^2 L_T(\varphi)}{\partial \varphi_i . \partial \varphi_j}\right)\right)_{i,j=1,2} = -\begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^T M_t^2 dt & \displaystyle\int_0^T M_t Y_i(M)(t) dt \\ \displaystyle\int_0^T M_t Y_i(M)(t) dt & \displaystyle\int_0^T Y_i^2(M)(t) dt \end{pmatrix}$$

Pour résoudre (P_1) on utilise l'estimateur $\hat{\varphi}_T$ du maximum de vraisemblance, solution de $L_T^{(1)}(\varphi) = 0$. Sur le domaine où $L_T^{(2)}$ est inversible, si $\overset{\circ}{\varphi}$ désigne la vraie valeur de φ, on a

$$\overset{\circ}{\varphi} - \hat{\varphi}_T = (L_T^{(2)})^{-1} . L_T^{(1)}(\overset{\circ}{\varphi}). \tag{2.7}$$

L'étude des propriétés asymptotiques de $L_T^{(2)}$ et $L_T^{(1)}$ permet ainsi d'étudier le comportement asymptotique de $\hat{\varphi}_T$.

2.2. **Propriétés asymptotiques de $\hat{\varphi}_T$.**

Si on pose, i étant fixé dans tout ce paragraphe.

$$k_i = e^{\varphi_1 2^{-i}}, \qquad k'_i = \frac{\varphi_2 \alpha}{\varphi_1}(e^{\varphi_1 2^{-i}} - 1), \qquad Z_n^i = \int_{t_n^i}^{t_{n+1}^i} e^{\varphi_1 (t_{n+1}^i - s)} dW_s,$$

la suite $\{ X_i(t_n^i) \}_{n \in \mathbb{N}}$, d'après (2.2), vérifie

$$X_i(t_{n+1}^i) = k_i X_i(t_n^i) + k'_i \operatorname{signe}(X_i(t_n^i)) + Z_n^i. \tag{2.8}$$

On remarque que $\{ Z_n^i \}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires, indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, où $\sigma_i^2 = \dfrac{1}{2\varphi_1}(e^{\varphi_1 2^{-i+1}} - 1)$. La suite $\{ X_i(t_n^i) \}_n$ entre donc dans le cadre de l'étude de [2] à laquelle il sera fait constamment référence.

Il est démontré dans [2] que (2.8) admet une solution fortement stationnaire et transitive notée $\{ X_i^*(t_n^i) \}_n$. On désigne par X_i^* la solution de (2.1) pour la condition initiale $X_i^*(0)$.

LEMME 2.1 :

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (X_i^*(t))^2 dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_i^*(t) . Y_i(X_i^*)(t) dt$$

existent, au sens de la convergence en moyenne quadratique et presque sûre.

Démonstration. — (2.2), écrite pour X_i^*, conduit par un calcul simple à

$$\begin{aligned} S_n^* &= \int_{t_n^i}^{t_{n+1}^i} (X_i^*(t))^2 dt \\ &= a(X_i^*(t_n^i))^2 + b + c X_i^*(t_n^i) + U_n^1 X_i^*(t_n^i) + U_n^2 \operatorname{signe}(X_i^*(t_n^i)) + U_n^3, \end{aligned} \tag{2.9}$$

où a, b, c sont 3 constantes, et $\{ U_n^i \}_n$, $i = 1, 2, 3$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ; de plus, pour tout n, U_n^i, $i = 1, 2$

est indépendante de $X_i^*(t_n^i)$. La suite $\{ X_i^*(t_n^i) \}$ étant fortement stationnaire et transitive, il découle des propriétés de U_n^i, $i = 1, 2, 3$ que les suites de variables aléatoires intervenant dans l'écriture de S_n^* possèdent aussi ces propriétés. Ces variables étant du second ordre on en déduit que, presque sûrement et en moyenne quadratique, $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n^*$ existe. Ce résultat permet d'obtenir immédiatement celui concernant $\frac{1}{T} \int_0^T (X_i^*(t))^2 dt$.

On procède de même pour $\frac{1}{T} \int_0^T X_i^*(t) Y_i(X_i^*)(t) dt$, en remarquant que

$$\int_{t_n^i}^{t_{n+1}^i} X_i^*(t) Y_i(X_i^*)(t) dt = a' \mid X_i^*(t_n^i) \mid + b' + U_n^4 \text{ signe } (X_i^*(t_n^i)),$$

a', b' constantes, U_n^4 possédant des propriétés identiques à celles de U_n^1.

On note $\lambda_i(\lambda_i')$ la limite de $\frac{1}{T} \int_0^T (X_i^*(t))^2 dt \left(\frac{1}{T} \int_0^T X_i^*(t) Y_i(X_i^*)(t) dt \right)$.

LEMME 2.2 :

$$P \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (X_i(t))^2 dt = \lambda_i, \qquad P \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_i(t) Y_i(X_i)(t) dt = \lambda_i'.$$

Démonstration. — Pour p, n entiers on pose

$$S_n = \int_{t_n^i}^{t_{n+1}^i} (X_i(t))^2 dt, \qquad M_{n,n+p}^* = \frac{1}{n+p} \sum_{j=0}^{p} S_{n+j}^*,$$

$$M_{n,n+p} = \frac{1}{n+p} \sum_{j=0}^{p} S_{n+j}.$$

D'après (2.8) et (2.9), éventuellement écrite pour X_i, il existe une application mesurable $\Phi_{p,n}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4p+3}$ telle que

$$M_{n,n+p} = \Phi_{p,n}(X_i(t_n^i), Q_{p,n}), \qquad M_{n,n+p}^* = \Phi_{p,n}(X_i^*(t_n^i), Q_{p,n}),$$

où $Q_{p,n}$ désigne le vecteur aléatoire $((Z_{n+j})_{j=0,1,\ldots,p-1}, (U_{n+k}^i)_{k=0,1,\ldots,p}$, $i = 1, 2, 3)$.

On remarque que $Q_{p,n}$ et $X_i(t_n^i)(X_i^*(t_n^i))$ sont indépendantes pour tout p et tout n.

Si pour toute variable aléatoire X on désigne par P_X sa loi de probabilité, on peut écrire

$$(2.10)\quad \forall x\in\mathbb{R}\ P\{M_{n,n+p}\le x\}=\int_{\mathbb{R}^{4p+3}} P_{X_i(t_n^i)}\{y\mid \Phi_{p,n}(y,q)\le x\}\,dQ_{p,n}(q).$$

Le corollaire 2.1 de [2] permet de montrer que, $\mathscr{B}$ désignant la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, on a la propriété

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \text{tel que}\quad \forall C\in\mathscr{B},\quad \forall n\ge N\quad |P_{X_i(t_n^i)}(C)-P_{X_{0,i}^*}(C)|\le\varepsilon$$

On déduit alors de (2.10) l'inégalité valable pour tout $n\ge N$, tout p, et tout x

$$(2.11)\qquad |P\{M_{n,n+p}\le x\}-P\{M_{n,n+p}^*\le x\}|\le\varepsilon$$

Soit $x<\lambda_i 2^{-i}$ et $n\ge N$. D'après le lemme 2.1 on a

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N'\in\mathbb{N}\quad \text{tel que}\quad \forall p\ge N'\qquad P\{M_{n,n+p}^*\le x\}\le\varepsilon,$$

et d'après (2.11)

$$\forall n\ge N,\qquad \forall p\ge N'\qquad P\{M_{n,n+p}\le x\}\le 2\varepsilon.$$

Sous les conditions imposées à n et p on a donc

$$(2.12)\qquad P\{M_{o,n+p}\le x\}\le P\{M_{n,n+p}\le x\}\le 2\varepsilon$$

Soit $x>\lambda_i 2^{-i}$ et $n\ge N$. Pour tout $\eta>0$ on a

$$(2.13)\quad P\{M_{o,n+p}\le x\}\ge 1-P\left\{\frac{S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}}{n+p}>\eta\right\}-P\{M_{n,n+p}>x-\eta\}.$$

Pour η tel que $x-\eta>\lambda_i 2^{-i}$ on a d'autre part, d'après le lemme 2.1,

$$(2.14)\quad \exists N''\in\mathbb{N}\quad \text{tel que}\quad \forall p\ge N''\quad P\{M_{n,n+p}^*>x-\eta\}\ge 1-\varepsilon.$$

Enfin, comme d'après [2],

$$(2.15)\quad \lim_{n\to+\infty} E(X_i(t_n^i))^2=E|X_i^*(0)|^2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} E(|X_i(t_n^i)|)=E(|X_i^*(0)|)$$

on déduit de (2.9), écrite pour S_n, et du fait que U_n^1 et U_n^2 sont centrées pour tout n, que la suite $\{E(S_n)\}_n$ est bornée; l'inégalité de Markov permet donc d'écrire :

$$(2.16)\quad \exists N'''\in\mathbb{N}\quad \text{tel que}\quad \forall p\ge N'''\quad P\left\{\frac{S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}}{n+p}>\eta\right\}\le\varepsilon$$

(2.11), (2.13), (2.14) et (2.16) entraînent

$$(2.17)\quad \forall n \geq N, \qquad \forall p \geq \mathrm{Max}(N'', N''') \qquad P\{ M_{o,n+p} \leq x \} \geq 1 - 3\varepsilon .$$

(2.12) et (2.17) utilisées avec n fixe et p variable prouvent que $\{ M_{o,k} \}_k$ converge en loi vers $2^{-i}\lambda_i$. Le résultat du lemme concernant $\frac{1}{T}\int_0^T (X_i(t))^2 dt$ s'en déduit de façon immédiate. Un raisonnement analogue s'applique à

$$\frac{1}{T}\int_0^T X_i(t) Y_i(X_i)(t) dt.$$

LEMME 2.3 :

$$(2.18)\qquad P_{\varphi, Y_i} \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{T} L_T^{(2)}(\varphi) \right) = - \begin{pmatrix} \lambda_i & \lambda_i' \\ \lambda_i' & \alpha^2 \end{pmatrix} = - J_i(\varphi) .$$

De plus la matrice $J_i(\varphi)$ est inversible.

Démonstration. — (2.18) est une conséquence évidente de (2.6) et du lemme 2.2. Comme

$$\lambda_i = 2^{-i} E\left(\int_0^{t_1^i} (X_i^*(t))^2 dt \right), \qquad \lambda_i' = 2^{-i} E\left(\int_0^{t_1^i} X_i^*(t) Y_i(X_i^*)(t) dt \right)$$

et que $| Y_i(X_i^*)(t) | = \alpha$, on déduit de l'inégalité de Schwarz que $J_i(\varphi)$ n'est pas inversible si et seulement si il existe une constante λ telle que, $P \otimes l_{t_1^i}$ p. p.,

$$(2.19)\qquad \forall t \in [0, t_1^i] \quad X_i^*(t) = \lambda Y_i(X_i^*)(t) .$$

Compte tenu des propriétés de continuité de $X_i^*(t)$ on déduit de (2.19) que $P \otimes l_{t_1^i}$ p. p. $X_i^*(t)$ est constant sur $[0, t_1^i]$. Ce résultat est en contradiction avec le fait que pour $t > 0$, $X_i^*(t)$ admet une densité. $J_i(\varphi)$ est donc inversible. □

LEMME 2.4. — *Pour la convergence en moyenne quadratique relativement à P_{φ, Y_i}*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} L_T^{(1)}(\varphi) = 0 .$$

Démonstration. — De (2.2) on déduit qu'il existe une constante $d > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall t \in [t_n^i, t_{n+1}^i], \qquad E | X_i(t) |^2 \leq d [E | X_i(t_n^i) |^2 + 1] .$$

D'après (2.15) il existe donc une constante $e > 0$ telle que

$$\forall t \geq 0 \qquad \mathrm{E}\,|\,\mathrm{X}_i(t)\,|^2 \leq e\,. \tag{2.20}$$

Si on remarque que d'après (2.5)

$$\mathrm{E}^{\mathrm{P}_{\varphi,\mathrm{Y}_i}}\,|\,\mathrm{L}_\mathrm{T}^{(1)}(\varphi)\,|^2 = \mathrm{E}^{\mathrm{P}_{\varphi,\mathrm{Y}_i}} \int_0^\mathrm{T} (\mathrm{M}_t)^2 dt + \alpha^2 \mathrm{T},$$

on déduit de (2.20) le résultat.

LEMME 2.5. — *Pour la convergence en loi relativement à* $\mathrm{P}_{\varphi,\mathrm{Y}_i}$ *on a*

$$\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{T}^{1/2}} \mathrm{L}_\mathrm{T}^{(1)}(\varphi) = \nabla(\varphi)\,;$$

où $\nabla(\varphi)$ *est un vecteur aléatoire de loi* $\mathcal{N}(0, \mathrm{J}_i(\varphi))$.

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la formule exponentielle des martingales comme cela est fait dans [3], lemme 3.2, dans le contexte plus général de processus de diffusion avec sauts, si on remarque que $\{\,\mathrm{L}_\mathrm{T}^1\,\}_{\mathrm{T}\geq 0}$ est une martingale et $-\{\,\mathrm{L}_\mathrm{T}^2\,\}_{\mathrm{T}\geq 0}$ son processus croissant pour lequel (2.18) est vérifiée.

C'est un fait remarquable, bien mis en évidence dans [3], que l'étude des propriétés asymptotiques d'estimateurs pour des processus en temps continu est notablement simplifiée par la théorie des martingales si on dispose de propriétés de stationnarité correspondant à l'existence de mesures périodiques, comme c'est ici le cas en considérant la loi de $\{\,\mathrm{X}_i^*(t)\,\}$, ou de mesures invariantes, comme c'est le cas au paragraphe 3.

La proposition suivante donne les propriétés asymptotiques essentielles de l'estimateur $\hat{\varphi}_\mathrm{T}$.

PROPOSITION 2.1. — *La famille* $\{\,\hat{\varphi}_\mathrm{T}\,\}_{\mathrm{T}\geq 0}$ *vérifie, relativement à* $\mathrm{P}_{\mathring{\varphi},\mathrm{Y}_i}$,

1. $\mathrm{P}_{\mathring{\varphi},\mathrm{Y}_i} \lim \hat{\varphi}_\mathrm{T} = \mathring{\varphi}$
2. $\mathrm{T}^{1/2}[\hat{\varphi}_\mathrm{T} - \mathring{\varphi}]$

converge en loi vers un vecteur de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{J}_i^{-1}(\mathring{\varphi}))$.

En effet, le point 1 est une conséquence évidente de (2.7) et des lemmes 2.3 et 2.4.

Le point 2 résulte des lemmes 2.3 et 2.5.

On démontre enfin un caractère optimal de Y_i relativement à la classe C_e^i de stratégies étagées définie de la façon suivante : Y est élément de C_e^i

si il existe une suite $\{ \Psi_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $[-\alpha, +\alpha]$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_n^i \leq t < t_{n+1}^i \qquad Y(t) = \Psi_n(X(t_n^i)),$$

où $X(t)$ est la solution de (1.1) associée à Y, ce qui a un sens comme dans le cas de Y_i. On peut poser (P_1) pour tout élément Y de C_e^i, car on montre comme pour Y_i, l'existence d'une fonction de Log-vraisemblance donnée par (2.4), où Y remplace Y_i. Un calcul élémentaire montre que la matrice d'information de Fisher correspondant à Y est :

$$J_Y^T(\varphi) = E^{P_{\varphi,Y}^T}\begin{pmatrix} \int_0^T M_t^2 dt & \int_0^T M_t Y(M)(t)dt \\ \int_0^T M_t Y(M)(t)dt & \int_0^T Y^2(M)(t)dt \end{pmatrix}$$

où $P_{\varphi,Y}^T$ désigne la loi sur C_T de la solution de (1.1) associée à Y. Comme dans [1], pour T fixé, on choisit pour (P_2) le critère

$$V_Y^T(\varphi) = E^{P_{\varphi,Y}^T}[\mathrm{Tr}\, J_Y^T(\varphi)] = E^{P_{\varphi,Y}^T}\left[\int_0^T (M_t^2 + Y^2(M)(t)dt\right] = E\left[\int_0^T (X^2(t) + Y^2(X)(t))dt\right]$$

PROPOSITION 2.2. — Y_i *est solution de* (P_2) *sur* C_e^i *pour* $V_Y^T(\varphi)$, *quel que soit* $\varphi_2 > 0$.

Démonstration. — De (2.2) écrite pour X et Y on déduit l'existence de 4 constantes A, B, C, D strictement positives telles que

$$V_Y^T(\varphi) = E\left[\sum_{n=0}^{2^iT-1} (AX^2(t_n^i) + BX(t_n^i)Y(X)(t_n^i) + Y^2(X)(t_n^i))\right] + D.$$

Dans [2] il est démontré que Y_i maximise sur C_e^i

$$E\left[\sum_{n=0}^{2^iT-1} X^2(t_n^i)\right] \quad \text{et} \quad E\left[\sum_{n=0}^{2^iT-1} |X(t_n^i)|\right].$$

Comme

$$|E(X(t_n^i)Y(X)(t_n^i))| \leq \alpha E|X(t_n^i)|,$$

il est clair que Y_i maximise sur $C_e^i E\left[\sum_{n=0}^{2^iT-1} X(t_n^i)Y(X)(t_n^i)\right]$.

La proposition se déduit des considérations précédentes en remarquant que Y_i maximise de façon évidente $E\left[\sum_{n=0}^{2^i T-1} Y^2(X)(t_n^i)\right]$.

On peut d'ailleurs montrer que Y_i est solution de (P_2) sur la classe plus vaste, C_a^i, des stratégies qui, pour tout n, sont fonctions mesurables de $\{X(t_k^i)\}_{k=0,1,\ldots,n}$ sur $[t_n^i, t_{n+1}^i[$ et à valeurs dans $[-\alpha, +\alpha]$:

3. CAS D'UNE STRATÉGIE DE TYPE II

L'extension des résultats du paragraphe 2 au cas de la stratégie $\overset{\circ}{Y}$, définie pour tout $t \geq 0$ par $\overset{\circ}{Y}(t) = \alpha$ signe $(X(t))$, est faite en utilisant l'existence d'une solution stationnaire de (1.1) pour $\overset{\circ}{Y}$. A cet effet: on étudie la suite de processus $\{X_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$.

3.1. Étude de la suite $\{X_i^*\}_i$.

LEMME 3.1. — *La suite $\{X_i^*(0)\}_i$ converge en loi vers une variable aléatoire X_0^*. X_0^* est du second ordre, et de plus,*

$$E|X_0^*| = \lim_i \uparrow E|X_i^*(0)|, \qquad E|X_0^*|^2 = \lim_i \uparrow E|X_i^*(0)|.$$

Démonstration. — Dans [2] il est démontré que, pour tout entier i,

$$E|X_i^*(0)| = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t\in\mathscr{D}^i}} E|X_i(t)|, \qquad E|X_i^*(0)|^2 = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t\in\mathscr{D}^i}} E|X_i(t)|^2.$$

A l'aide de (2.8) on en déduit l'inégalité

$$E|X_i^*(0)|^2 \leqslant k_i^2 E|X_i^*(0)|^2 + k_i'^2 + \sigma_i^2 + 2k_i k_i' (E|X_i^*(0)|^2)^{1/2}$$

L'étude du trinôme $(1 - k_i^2)x^2 - 2k_i k_i' x - k_i'^2 - \sigma_i^2$ conduit à

$$E|X_i^*(0)|^2 \leqslant (1 - k_i^2)^{-1}(k_i k_i' + [k_i^2 k_i'^2 + (1 - k_i^2)(k_i'^2 + \sigma_i^2)]^{1/2}).$$

Des expressions de k_i, k_i' et σ_i^2 on déduit, pour tout entier i,

$$(3.1) \qquad E|X_i^*(0)|^2 \leq A = \frac{-\varphi_2\alpha}{\varphi_1} + \left[2\left(\frac{\varphi_2\alpha}{\varphi_1}\right)^2 - \frac{1}{\varphi_1}\right]^{1/2}.$$

Dans toute la suite, pour toute variable aléatoire X, on note G_X et H_X les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G_X(x) = 1_{]-\infty,0[}(x)\ P\{X \leq x\} + 1_{[0,+\infty[}(x)\ (P\{X \leq x\} - 1)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad H_X(x) = G_X(-x) - G_X(x) = P\{X \leq -x\} + P\{X > x\}.$$

Un résultat classique assure que si, pour k entier ≥ 1, $E|X|^k$ existe, $x^{k-1}H_X(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et

$$(3.2) \qquad E|X^k| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k dG_X(x) = k\int_0^{+\infty} x^{k-1}H_X(x)dx\,;$$

La réciproque est par ailleurs vraie.

D'après la remarque de 3.4 on a

$$(3.3) \quad \forall t \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathscr{D}^i, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad H_{X_{i+1}(t)}(x) \geq H_{X_i(t)}(x)\,.$$

Dans [2] on a montré que, relativement à la convergence en loi,

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in \mathscr{D}^i}} X_i(t) = X_i^*(0)\,.$$

Les variables $X_i^*(0)$ admettant pour tout i une densité, qui est d'ailleurs une fonction paire, on a par un passage à la limite dans (3.3)

$$(3.4) \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad H_{X^*_{i+1}(0)}(x) \geq H_{X^*_i(0)}(x)$$

La suite $\{H_{X^*_i(0)}\}_i$ converge donc ponctuellement sur $\mathbb{R}^+$ en croissant vers une limite notée H*.

H* est de même une fonction décroissante.

Soit $U > 0$. On a

$$(3.5) \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \int_0^U x^2 dH_{X^*_i(0)}(x) = U^2 H_{X^*_i(0)}(U) - 2\int_0^U x H_{X^*_i(0)}(x)dx\,.$$

Comme d'autre part,

$$\lim_i \left(U^2 H_{X^*_i(0)}(U) - 2\int_0^U x H_{X^*_i(0)}(x)dx\right) = U^2 H^*(U) - 2\int_0^U x H^*(x)dx\,,$$

on déduit de (3.5) par une intégration par parties, et de (3.1)

$$(3.6) \quad \forall U > 0 \lim_i -\int_0^U x^2 dH_{X^*_i(0)}(x) = \lim_i \int_{-U}^{+U} x^2 dG_{X^*_i(0)}(x)$$
$$= -\int_0^U x^2 dH^*(x) \leq A\,.$$

Enfin, d'après (3.1) et (3.2) on a

$$0 \leq \int_0^U H^*(x)dx = \lim_i \int_0^U H_{X^*_i(0)}(x)dx \leq \lim_i \int_0^{+\infty} H_{X^*_i(0)}(x)dx$$
$$= \lim_i E|X_i^*(0)| \leq A^{1/2}.$$

H* est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \to +\infty} H^*(x) = 0$. On peut donc associer

à H* une variable aléatoire X_0^*, de loi symétrique par rapport à l'origine, telle que $H^* = H_{X_0^*}$. D'après (3.6) X_0^* est du second ordre.

Les deux suites de fonctions $\{ H_{X_i^*(0)}(x) \}$ et $\{ xH_{X_i^*(0)}(x) \}$ convergeant en croissant vers $H_{X_0^*}(x)$ et $xH_{X_0^*}(x)$, on déduit immédiatement de (3.2) la fin du lemme.

LEMME 3.2. — *La suite de processus* $\{ X_i^* \}_i$ *vérifie la relation*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{h \downarrow 0} \overline{\lim_i} \sup_{|t-s|<h} P\{ |X_i^*(t) - X_i^*(s)| > \varepsilon \} = 0 \tag{3.7}$$

Démonstration. — D'après (2.2), écrit pour X_i^*, on a, pour tout i et $t_n^i \leq t < t_{n+1}^i$,

$$E|X_i^*(t)| \leq E|X_i^*(t_n^i)| - \frac{1}{2\varphi_1}\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \alpha\frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

La stationnarité de $\{ X_i^*(t_n^i) \}_n$ entraîne l'existence d'une constante $B > 0$ telle que

$$\forall t \geq 0 \qquad E|X_i^*(t)| \leq B. \tag{3.8}$$

Pour tout i on désigne par $Y_i^*(t)$, $t \geq 0$, le processus défini sur tout intervalle $[t_n^i, t_{n+1}^i[$ par

$$Y_i^*(t) = \alpha \text{ signe } (X_i^*(t_n^i)).$$

On a pour $0 \leq t \leq t'$

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad X_i^*(t') - X_i^*(t) = \varphi_1 \int_t^{t'} X_i^*(s)ds + \varphi_2 \int_t^{t'} Y_i^*(s)ds + W_{t'} - W_t.$$

On en déduit à l'aide de (3.8) l'existence d'une constante $D > 0$ telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad E|X_i^*(t') - X_i^*(t)| \leq D[t' - t + (t' - t)^{1/2}].$$

On a donc l'inégalité suivante qui donne immédiatement le résultat

$$P\{ |X_i^*(t') - X_i^*(t)| > \varepsilon \} \leq \frac{D}{\varepsilon}[t' - t + (t' - t)^{1/2}]. \tag{3.9}$$

LEMME 3.3. — La suite de processus $\{ Y_i^* \}_i$ vérifie (3.7). □

Démonstration. — Dans [2] on démontre que, pour tout i, $X_i^*(0)$ admet une densité bornée. On en déduit, grâce à (3.4), l'existence d'une constante $I > 0$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \forall i \in \mathbb{N}^* \qquad P\{ |X_i^*(0)| \leq \varepsilon \} \leq P\{ X_1^*(0) \leq \varepsilon \} \leq I\varepsilon. \tag{3.10}$$

Soit $h > 0$ et $0 \leq t \leq t' \leq t + h$. Pour i donné soit $t_j^i(t_k^i)$ le plus grand élément de $\mathscr{D}^i$ tel que $t_n^i \leq t(t_n^i \leq t')$. On a $t_k^i - t_j^i \leq h + 2^{-i}$.

Pour $0 < \varepsilon < 2$ et $\varepsilon' > 0$ on a, pour tout i, en utilisant (3.9) et (3.10).

$$\mathrm{P}\{ |\mathrm{Y}_i^*(t') - \mathrm{Y}_i^*(t)| \leq \varepsilon \} = \mathrm{P}\{ |\mathrm{Y}_i^*(t') - \mathrm{Y}_i^*(t)| = 0 \}$$

$$\geq \mathrm{P}\{ \mathrm{X}_i^*(t_j^i) - \mathrm{X}_i^*(t_k^i) > 0 \} \geq 1 - \mathrm{P}\{ |\mathrm{X}_i^*(t_j^i)| \leq \varepsilon' \} - \mathrm{P}\left\{ |\mathrm{X}_i^*(t_j^i) - \mathrm{X}_i^*(t_k^i)| > \frac{\varepsilon'}{2} \right\}$$

$$\geq 1 - \varepsilon' \mathrm{I} - \frac{2\mathrm{D}}{\varepsilon'} [h + 2^{-i} + (h + 2^{-i})^{1/2}]$$

Soit $\eta > 0$. En choisissant $\varepsilon' = \dfrac{\eta}{2\mathrm{I}}$, puis h tel que $2h + (2h)^{1/2} \leq \dfrac{\eta\varepsilon'}{4D}$, et enfin un entier i_0 tel que $2^{-i_0} \leq h$, on déduit de l'inégalité précédente

$$\forall i \geq i_0 \qquad \mathrm{P}\{ |\mathrm{Y}_i^*(t') - \mathrm{Y}_i^*(t)| \leq \varepsilon \} \geq 1 - \eta .$$

Cette inégalité entraîne de façon immédiate le résultat du lemme. □

(3.8) permet d'obtenir de façon évidente le lemme suivant :

LEMME 3.4. — *La suite de processus* $\{ \mathrm{X}_i^* \}_i$ *vérifie la relation*

(3.11) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{C}_0 > 0$ tel que $\forall \mathrm{C} \geq \mathrm{C}_0, \qquad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0$

$$\mathrm{P}\{ |\mathrm{X}_i^*(t)| > \mathrm{C} \} \leq \varepsilon .$$

La suite $\{ \mathrm{Y}_i^* \}_i$ vérifie aussi (3.11). La suite de processus vectoriels $\{ \mathrm{Z}_i \}_i = \{ (\mathrm{X}_i^*, \mathrm{Y}_i^*, \mathrm{W}) \}_i$ est donc telle que, quels que soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ éléments de $\mathbb{R}^+$ $\{ \mathrm{Z}_i(t_1), \mathrm{Z}_i(t_2), \ldots, \mathrm{Z}_i(t_n) \}_i$ est une famille étroite. On peut en déduire comme dans [4] que pour une sous-suite $\{ i' \}$ de $\mathbb{N}$, quels que soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$, $\{ \mathrm{Z}_{i'}(t_1), \mathrm{Z}_{i'}(t_2), \ldots, \mathrm{Z}_{i'}(t_n) \}_{i'}$ converge en loi. $\{ \mathrm{X}_i^* \}$ et $\{ \mathrm{Y}_i^* \}$ vérifiant (3.7) on peut alors appliquer le théorème du paragraphe 6, chapitre 1 de [4]. La seule modification réside dans le fait que t n'est pas ici limité à un intervalle borné. Toutefois, le théorème reste valable en vertu du lemme fondamental qui est utilisé dans sa démonstration.

Il existe donc un espace probabilisé $(\Omega', \mathscr{A}', \mathrm{P}')$, une sous-suite $\{ i'' \}$ de $\{ i' \}$, une suite de processus vectoriels $\{ \overline{\mathrm{Z}}_{i''} \}_{i''} = \{ \overline{\mathrm{X}}_{i''}^*, \overline{\mathrm{Y}}_{i''}^*, \overline{\mathrm{W}} \}_{i''}$ et deux processus $\overline{\mathrm{X}}^*$ et $\overline{\mathrm{Y}}^*$ définis sur cet espace tels que, pour tout i'', $\overline{\mathrm{Z}}_{i''}$ et $\mathrm{Z}_{i''}$ sont équivalents, $\overline{\mathrm{X}}^*$ et $\overline{\mathrm{Y}}^*$ sont continus en probabilité, et

$$(3.12) \forall t \geq 0 \quad \mathrm{P}' \lim_{i'' \to +\infty} \overline{\mathrm{X}}_{i''}^*(t) = \overline{\mathrm{X}}^*(t), \qquad \mathrm{P}' \lim_{i'' \to +\infty} \overline{\mathrm{Y}}_{i''}^*(t) = \overline{\mathrm{Y}}^*(t) .$$

On montre ensuite, en utilisant la technique de [4] pour démontrer l'existence de solutions d'équations différentielles stochastiques à l'aide

d'une discrétisation, que $\overline{W}$ peut être interprété comme un mouvement brownien, et que $\overline{X}_{i''}$ est solution de (2.1) sur $(\Omega', \mathscr{A}', P')$ relativement à $\overline{W}$ et à un état initial de même loi que $X^*_{i''}(0)$, pour tout i'' ; enfin, on peut confondre, si $t_n^{i''} \leq t < t_{n+1}^{i''}$, $\overline{Y}_{i''}(t)$ et α signe $(\overline{X}_{i''}(t_n^{i''}))$.

Dans toute la suite, on confond $(\Omega', \mathscr{A}', P')$ avec $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, $\{ i'' \}$ avec $\mathbb{N}$, $\overline{Z}_i$ avec Z, $\overline{X}^*$ et $\overline{Y}^*$ avec deux processus X^* et Y^* définis sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ continus en probabilité et vérifiant (3.12). On suppose avoir choisi des modifications séparables et mesurables de X^* et Y^*.

On montre que X^* est solution de (1.1) pour Y^*. Soit $t > 0$ fixé.

LEMME 3.5. — *Au sens de la convergence* L^1 *on a*

$$\lim_{i \to +\infty} \int_0^t Y_i^*(s)ds = \int_0^t Y^*(s)ds$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$(P \otimes l_t) \{ (s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mid | Y_i^*(s, \omega) - Y^*(s, \omega) | > \varepsilon \} = \int_0^t P \{ | Y_i^*(s) - Y^*(s) | > \varepsilon \} ds.$$

D'après (3.12) on a pour tout s, $\lim_{i \to +\infty} P \{ | Y_i^*(s) - Y^*(s) | > \varepsilon \} ds = 0$. D'où, grâce au théorème de Lebesgue :

$$\lim_{i \to +\infty} (P \otimes l_t) \{ (s, \omega) \mid | Y_i^*(s, \omega) - Y^*(s, \omega) | > \varepsilon \} = 0 . \tag{3.13}$$

Comme, pour tout s et tout ω $| Y_i^*(s, \omega) - Y^*(s, \omega) | \leq 2\alpha$, (3.13) et le théorème de Lebesgue entraînent le résultat suivant, d'où on déduit immédiatement le lemme,

$$\lim_{i \to +\infty} E \int_0^t | Y_i^*(s) - Y^*(s) | ds = 0 \quad \square$$

LEMME 3.6. — *On a*

$$P \lim_{i \to +\infty} \int_0^t X_i^*(s)ds = \int_0^t X^*(s)ds .$$

Démonstration. — La suite de processus $\{ X_i^*(s) \}_i$, $0 \leq s \leq t$, en tant que solution de (1.1) vérifie, en particulier d'après (3.1), les conditions du théorème 3.10 de [5]. Si, pour tout i, P_i désigne la loi sur $(C_t, \mathscr{C}_t)$ de $X_i^*(s)$, $0 \leq s \leq t$, la famille $\{ P_i \}_i$ est étroite, et une sous-suite extraite $\{ P_j \}_j$ converge donc faiblement vers une mesure P^*.

D'autre part, quels que soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ éléments de $[0, t]$,

$$\mathrm{P} \lim_{i \to +\infty} (\mathrm{X}_i^*(t_1), \mathrm{X}_i^*(t_2), \ldots, \mathrm{X}_i^*(t_n)) = (\mathrm{X}^*(t_1), \mathrm{X}^*(t_2), \ldots, \mathrm{X}^*(t_n)).$$

La loi de $\mathrm{X}^*(s)$, $0 \leq s \leq t$, et P^* possèdent par conséquent les mêmes distributions finies. D'après le théorème 9.2 de [6] $\mathrm{X}^*(s)$, $0 \leq s \leq t$, est donc presque sûrement à trajectoires continues, P^* représente donc la loi de ce processus sur $(\mathrm{C}_t, \mathscr{C}_t)$.

L'application de C_t dans $\mathbb{C}$ définie par : $x \rightsquigarrow \exp\left[iu \int_0^t x_s ds\right]$, étant continue et bornée pour tout réel u, on déduit de la convergence de $\{\mathrm{P}_j\}_j$ vers P^* que

$$\lim_{j \to +\infty} \int_0^t \mathrm{X}_j^*(s) ds = \int_0^t \mathrm{X}^*(s) ds, \qquad \text{au sens de la convergence en loi.}$$

Comme $\mathrm{P} \lim_i \mathrm{X}_i^*(0) = \mathrm{X}^*(0)$, $\mathrm{P} \lim_i \mathrm{X}_i^*(t) = \mathrm{X}^*(t)$ on déduit du lemme 3.5 et du fait que X_i^* est solution de (1.1), par passage à la limite sur i, que $\mathrm{P} \lim_i \int_0^t \mathrm{X}_i^*(s) ds$ existe. D'après ce qui précède cette limite est donc $\int_0^t \mathrm{X}^*(s) ds$.

LEMME 3.7 :

$$\forall t \geq 0 \quad \mathrm{P} \lim_{i \to +\infty} \operatorname{signe}(\mathrm{X}_i^*(t)) = \operatorname{signe}(\mathrm{X}^*(t))$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. D'après (3.10), on a

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall s \in \mathscr{D}^i \qquad \mathrm{P}\{|\mathrm{X}_i^*(s)| \leq \varepsilon\} \leq \varepsilon \mathrm{I}.$$

Pour i et s fixés on a pour ε' tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$,

$$\mathrm{P}\{|\mathrm{X}_i^*(s)| > \varepsilon\} \leq \mathrm{P}\{|\mathrm{X}_i^*(s) - \mathrm{X}^*(s)| > \varepsilon'\} + \mathrm{P}\{|\mathrm{X}^*(s)| > \varepsilon - \varepsilon'\}.$$

D'où

$$\mathrm{P}\{|\mathrm{X}^*(s)| > \varepsilon - \varepsilon'\} \geq \mathrm{P}\{|\mathrm{X}_i^*(s)| > \varepsilon\} - \mathrm{P}\{|\mathrm{X}_i^*(s) - \mathrm{X}^*(s)| > \varepsilon'\}$$
$$\mathrm{P}\{|\mathrm{X}^*(s)| > \varepsilon - \varepsilon'\} \geq 1 - \varepsilon \mathrm{I} - \mathrm{P}\{|\mathrm{X}_i^*(s) - \mathrm{X}^*(s)| > \varepsilon'\}.$$

On en déduit, après passage à la limite sur i, que pour tout s appartenant à $\mathscr{D} = \bigcup_i \mathscr{D}^i$

$$\mathrm{P}\{|\mathrm{X}^*(s)| > \varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon \mathrm{I}.$$

Cette inégalité, en tenant compte des propriétés de continuité de X^*, s'étend à tout s.

On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$.

$$(3.14) \qquad \forall s \geq 0 \qquad P\{ |X^*(s)| \leq \varepsilon \} \leq \varepsilon I .$$

Soit $\varepsilon < 2$ et $\varepsilon' > 0$. On a, en utilisant (3.14)

$$P\{ |\operatorname{signe}(X_i^*(t)) - \operatorname{signe}(X^*(t))| \leq \varepsilon \} = P\{ \operatorname{signe}(X_i^*(t)) = \operatorname{signe}(X^*(t)) \}$$
$$\geq P\{ X_i^*(t).X^*(t) > 0 \} \geq P\left\{ (|X^*(t)| > \varepsilon') \cap \left(|X_i^*(t) - X^*(t)| \leq \frac{\varepsilon'}{2} \right) \right\}$$
$$\geq 1 - \varepsilon' I - P\left\{ |X_i^*(t) - X^*(t)| > \frac{\varepsilon'}{2} \right\}.$$

Soit $\eta > 0$, $\varepsilon' = \dfrac{\eta}{2I}$, et i_0 entier tel que pour $i \geq i_0$,

$$P\left\{ |X_i^*(t) - X^*(t)| \leq \frac{\varepsilon'}{2} \right\} \leq \frac{\eta}{2}.$$

De l'inégalité précédente on déduit l'inégalité suivante, qui permet de conclure,

$$P\{ |\operatorname{signe}(X_i^*(t)) - \operatorname{signe}(X^*(t))| \leq \varepsilon \} \geq 1 - \eta . \quad \square$$

LEMME 3.8. — *Le processus* Y^* *est continu en probabilité.*

Démonstration. — Au lemme 3.3 on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists h > 0, \quad \exists i_0 \in \mathbb{N}^*$$

tels que

$$i \geq i_0, \quad |s' - s| \leq h \Rightarrow P\{ |Y_i^*(s') - Y_i^*(s)| \leq \varepsilon \} \geq 1 - \eta .$$

On en déduit immédiatement le lemme grâce à l'inégalité suivante

$$(3.15) \quad P\{ |Y^*(s') - Y^*(s)| > \varepsilon \} \leq P\left\{ |Y^*(s') - Y_i^*(s')| > \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$
$$+ P\left\{ |Y_i^*(s') - Y_i^*(s)| > \frac{\varepsilon}{3} \right\} + P\left\{ |Y_i^*(s) - Y^*(s)| > \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

LEMME 3.9. — *Le processus* signe (X^*) *est continu en probabilité.*

Démonstration. — (3.15) écrite pour X^* et X_i^*, et (3.9) permettent d'obtenir l'inégalité

$$(3.16) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall h > 0 \sup_{|s-s'|<h} P\{ |X^*(s) - X^*(s')| > \varepsilon \} \leq \frac{D}{\varepsilon} h + h^{1/2} .$$

Pour $\varepsilon < 2$, $\varepsilon' > 0$, on déduit de (3.14) et (3.16), pour tout $s \geq 0$ et $s' \geq 0$ tels que $| s - s' | < h$,

$$P\{ | \text{signe } X^*(s) - \text{signe } X^*(s') | \leq \varepsilon \} \geq P\{ X^*(s).X^*(s') > 0 \}$$
$$\geq P\left\{ (| X^*(s) | > \varepsilon') \cap (| X^*(s) - X^*(s') | \leq \frac{\varepsilon'}{2} \right\} \geq 1 - \varepsilon' I - \frac{2D}{\varepsilon'}(h + h^{1/2}).$$

Soit $\eta > 0$, $\varepsilon' = \dfrac{D}{2I}$, h tel que $\dfrac{2D}{\varepsilon'}(h + h^{1/2}) \leq \dfrac{\eta}{2}$. L'inégalité précédente conduit à l'inégalité suivante, qui constitue le résultat du lemme,

$$P\{ | \text{signe } X^*(s) - \text{signe } X^*(s') | \} \geq 1 - \eta. \quad \square$$

PROPOSITION 3.1. — *Pour tout $t \geq 0$ on a P presque sûrement,*

$$Y^*(t) = \alpha \text{ signe } (X^*(t)) \tag{3.17}$$

$$X^*(t) = X^*(0) + \varphi_1 \int_0^t X^*(s)ds + \varphi_2 \alpha \int_0^t \text{signe } (X^*(s))ds + W_t \tag{3.18}$$

Démonstration. — Si t appartient à $\mathscr{D}$, pour i suffisamment grand on a $Y_i^*(t) = \alpha \text{ signe } (X_i^*(t))$.

Dans ce cas, (3.17) est une conséquence immédiate du lemme 3.7 et de la convergence de $Y_i^*(t)$ vers $Y^*(t)$ en probabilité.

Si t n'appartient pas à $\mathscr{D}$ il existe une suite $\{ t_k \}_k$ d'éléments de $\mathscr{D}$ convergent vers t.

On a pour tout k, $Y^*(t_k) = \alpha \text{ signe } (X^*(t_k))$, et (3.17) découle alors des lemmes 3.8 et 3.9.

Pour tout $t \geq 0$ on a donc, en utilisant (3.17),

$$E\left| \int_0^t Y^*(s)ds - \int_0^t \alpha \text{ signe } (X^*(s))ds \right| \leq \int_0^t E | Y^*(s) - \alpha \text{ signe } (X^*(s)) | \, ds = 0.$$

D'où

$$P \text{ p. s.} \int_0^t Y^*(s)ds = \int_0^t \alpha \text{ signe } (X^*(s))ds$$

En utilisant le fait que X_i^* est solution de (1.1) pour Y_i^*, on en déduit facilement (3.18), à l'aide des lemmes 3.5 et 3.6. $\square$

X^* est donc solution de (1.1) pour la stratégie Y^* que l'on peut confondre avec $\overset{\circ}{Y}$. On remarque que $X^*(0)$ et X_0^* ont même loi.

On montre enfin que X^* possède le caractère stationnaire espéré.

PROPOSITION 3.2. — *X^*est un processus fortement stationnaire et transitif.*

Démonstration. — Si t et t' sont éléments de $\mathscr{D}$, pour i suffisamment grand $X_i^*(t)$ et $X_i^*(t')$ ont même loi. De $P\lim_i X_i^*(t) = X^*(t)$ et $P\lim_i X_i^*(t') = X^*(t')$ on en déduit que $X^*(t)$ et $X^*(t')$ ont même loi. Le résultat s'étend au cas où t et t' sont quelconques en utilisant le fait que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$, et les propriétés de continuité de X^*. La propriété de forte stationnarité est alors une conséquence simple du fait que X en tant que solution de (1.1) est un processus de Markov homogène.

Pour la propriété de transitivité on utilise une extension immédiate au cas d'un processus de Markov fortement stationnaire d'un résultat de [7] concernant les processus de même nature, mais étudiés en temps discret. Ce résultat entraîne que pour X^* les ensembles invariants appartiennent à $\{ X^*(0)^{-1}(C) \mid C \in \mathscr{B} \}$. $X_0^{-1}(C)$ est donc invariant si et seulement si, pour tout $t > 0$, $X^*(0)^{-1}(C)$ et $X^*(t)^{-1}(C)$ ne diffèrent que pour un ensemble de probabilité nulle.

Si $P(x, t, B) = P\{ X^*(t) \in B \mid X^*(0) = x \}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $B \in \mathscr{B}$, on montre en utilisant une technique de [8] que $P(x, t, .)$ admet une densité de la forme

$$p(x, t, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t} \right] \Phi(x, t, y), \qquad \text{où} \qquad \Phi(x, t, y) > 0 .$$

On a donc $p(x, t, y) > 0$ quels que soient x, t et y. On en déduit immédiatement que les seuls invariants sont de probabilité 0 ou 1.

3.2. Étude de la suite $\{X_i\}_i$.

On montre en utilisant la même méthode, mais des techniques de démonstration différentes, que la suite de processus $\{ X_i \}_i$ converge vers un processus X solution de (1.1). On compare ensuite X^* et X.

On démontre à l'aide de résultats de [2] que pour tout i et tout n, on a, pour $t \geq 0$,

$$H_{X^i_{t_{n+1}}}(t) = \int_0^{+\infty} H_{X^i_{t_n}}(u) . K_i(t, u) du + \Psi_i(-t) - \Psi_i(t) \tag{3.19}$$

où

$$\Psi_i(t) = (\sigma_i \sqrt{2\pi})^{-1} 1_{]-\infty, 0[}(t) \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{(y - k_i')^2}{2\sigma_i^2} \right] dy + 1_{[0, +\infty[}(t) (\sigma_i \sqrt{2\pi})^{-1} \int_t^{+\infty} \exp\left[-\frac{(y - k_i')^2}{2\sigma_i^2} \right] dy$$

$$(K_i(t, u)) = k_i (\sigma_i \sqrt{2\pi})^{-1} \left[\exp -\frac{(t - k_i u - k_i')^2}{2\sigma_i^2} \right] - \exp\left[-\frac{(t + k_i u - k_i')^2}{2\sigma_i^2} \right].$$

La démonstration de la proposition qui suit repose en grande partie sur le fait que (3.19) établit une correspondance affine entre $H_{X_{t_n^i}}$ et $H_{X_{t_{n+1}^i}}$ pour laquelle $K_i(t, u) \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$, et que $\Psi_i(-t) - \Psi_i(t) = H_{U_i}(t)$, où U_i suit la loi $\mathcal{N}(k_i', \sigma_i^2)$.

PROPOSITION 3.3. — *Il existe une constante* $K > 0$ *telle que*

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \geq 0 \quad E\,|X_i(t)| \leq K \tag{3.20}$$

Démonstration. — On remarque préalablement que toutes les variables aléatoires introduites sont du second ordre.

1. On traite d'abord le cas où existe un entier i_0 tel que $H_{X_0} \leq H_{X^*_{i_0}(0)}$.

Comme d'après (3.4)

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad H_{X^*_i(0)} \leq H_{X^*_{i+1}(0)} \leq H_{X^*_0},$$

on a

$$\forall i \geq i_0 \qquad H_{X_0} \leq H_{X^*_i(0)} \leq H_{X^*_0}. \tag{3.21}$$

On déduit de (3.19), puis de (3.2) que

$$\forall i \geq i_0 \qquad \forall t \in \mathscr{D}^i \qquad H_{x_i(t)} \leq H_{X^*_i(0)}, \qquad E\,|X_i(t)| \leq E\,|X_i^*(0)|.$$

Donc d'après (3.21),

$$\forall i \geq i_0, \qquad \forall t \in \mathscr{D}^i, \qquad E\,|X_i(t)| \leq E\,|X_0^*|.$$

Ce résultat s'étend à $i \leq i_0$ à l'aide de (3.3). (3.20) découle alors de l'inégalité suivante :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [t_n^j, t_{n+1}^j[\quad E\,|X_j(t)| \leq E\,|X_j(t_n^j)| - \frac{1}{2\varphi_1}\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{\alpha\varphi_2}{\varphi_1}.$$

2. Cas où X_0 est un élément quelconque de (S).

On utilise les deux lemmes suivants :

LEMME 3.10. — *Si il existe un réel* a, $0 < a < 1$, X_0' *élément de* (S) *pour lequel* (3.20) *est vraie, et un entier* $i_0 > 0$, *tels que*

$$aH_{X_0'} + (1 - a)H_{X_0} \leq H_{X^*_{i_0}(0)},$$

alors (3.20) *est vraie pour* X_0.

LEMME 3.11. — *Si* (3.20) *est vraie, pour* X_0', *elle est vraie pour tout* X_0 *tel que* $H_{X_0} \leq H_{X_0'}$.

Ces deux lemmes sont des conséquences simples de remarques faites

sur la correspondance définie par (3.19) ; dans le cas du lemme 3.11, il suffit d'introduire un état initial X_0'' tel que

$$H_{X_0''} = aH_{X_0'} + (1-a)H_{X_0}, \qquad \text{et d'utiliser le point 1.}$$

Pour l'extension de la proposition on utilise un X_0' tel que $H_{X_0'}$ soit de la forme

$$H_{X_0'}(u) = 1_{[0,\beta]}(u)\left(1 - \frac{u}{\beta}\right) + 1_{[\beta,+\infty[}(u).0, \qquad \beta \text{ constante} > 0.$$

De (3.19) on déduit que si, pour tout i, on utilise U_i pour état initial,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad H_{X_i(t_n^i)} \geq H_{U_i}$$

On a donc

$$H_{X_i^*(0)} \geq H_{U_i}.$$

Une étude élémentaire de H_{U_i} prouve que si $\beta \leq \sigma_i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, alors $H_{X_0'} \leq H_{U_i}$. Comme $\sigma_i \leq \sqrt{\frac{-1}{2\varphi_1}}$, si $\beta < \beta_0 = \sqrt{\frac{-\pi}{4\varphi_1}}$, on est assuré que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+ \quad H_{X_0'}(u) \leq 1_{[0,\beta_0]}(u)\left(1 - \frac{u}{\beta_0}\right) + 1_{[\beta_0,+\infty[}(u).0 \leq H_{X_i^*(0)}.$$

Le principe de l'extension est alors, sans développer les calculs qui sont élémentaires, le suivant. Le lemme 3.10 appliqué à X_0' pour $\beta < \beta_0$ et à un i_0 quelconque, permet d'affirmer que (3.20) est vraie pour tout X_0 tel que

$$H_{X_0} = \frac{1}{1-a}H_{X_{i_0}^*(0)} - \frac{a}{1-a}H_{X_0'}.$$

(3.20) s'étend ainsi, en répétant éventuellement le procédé, à tout X_0 vérifiant $H_{X_0} \geq H_{X_{i_0}^*(0)}$. Le lemme 3.11 permet alors l'extension à tout X_0. □

LEMME 3.12. — *Il existe $\varepsilon' > 0$ tel que pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$ il existe une constante $\lambda > 0$ telle que*

$$(3.22) \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall t \in \mathscr{D}^i, \qquad P\{|X_i(t)| \leq \varepsilon\} \leq \varepsilon\lambda$$

Démonstration. — Cette démonstration est calquée sur celle de la proposition 3.3, mais cette fois le cas simple correspond à un état initial X_0 tel que $H_{X_0} \geq H_{X_0^*}$. Si cette condition est vérifiée on a, pour tout i, $H_{X_0} \geq H_{X_i^*(0)}$. On obtient ainsi :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall t \in \mathscr{D}^i, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^+,$$

$$H_{X_i(t)}(u) \geq H_{X_i^*(0)}(u) \geq 1_{[0,\beta_0]}(u)\left(1 - \frac{u}{\beta_0}\right) + 1_{[\beta_0+\infty[}(u).0$$

Donc si $\varepsilon \leq \beta_0$ on en déduit

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall t \in \mathscr{D}^i \qquad P\{ |X_i(t)| \leq \varepsilon \} = 1 - H_{X_i(t)}(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{\beta_0}.$$

(3.22) est ainsi vérifiée pour un tel X_0. L'extension à un élément X_0 quelconque de (S) se fait comme pour la proposition 3.3 à l'aide, d'une part de l'analogue du lemme 3.10, où on choisit X'_0 tel que $aH_{X'_0} + (1-a)H_{X_0} \geq H_{X_0^*}$, ce qui permet d'étendre (3.22) à tout X_0 pour lequel $H_{X_0} \leq H_{X_0^*}$, d'autre part de l'analogue du lemme 3.11, pour X'_0 tel que $H_{X_0} \geq H_{X'_0}$. □

La proposition 3.3 et le lemme 3.12 permettent de montrer, respectivement, comme pour les lemmes 3.2 et 3.3 que les suites de processus $\{X_i\}_i$ et $\{Y_i\}_i$ vérifient (3.7). De plus $\{X_i\}_i$ satisfait (3.11). On peut donc appliquer à $\{(X_i, Y_i, W)\}_i$ le même raisonnement qu'à $\{(X_i^*, Y_i^*, W)\}_i$. Sur le même espace $(\Omega', \mathscr{A}', P')$, confondu dans ce cas aussi avec $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et pour une sous-suite, confondue aussi avec $\mathbb{N}$, il existe un processus X_t, $t \geq 0$, solution de (1.1) pour un état initial de loi P_{X_0} et la stratégie $\overset{\circ}{Y}$. De plus

$$\forall t \geq 0 \qquad P \lim_{i \to +\infty} X_i(t) = X(t).$$

On peut alors comparer les deux solutions de (1.1) que sont X et X* pour la même stratégie $\overset{\circ}{Y}$.

PROPOSITION 3.4. — $\{H_{X(T)}\}_{T \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $H_{X_0^*}$ *lorsque* T *tend vers* $+\infty$.

Démonstration. — On emploie de nouveau la méthode de la proposition 3.3.

1. On suppose qu'il existe un entier $i_0 > 0$ tel que $H_{X_0} \leq H_{X_{i_0}^*(0)}$.

X_0^* admettant une densité, $H_{X_0^*}$ est une fonction continue. La suite $\{H_{X_i^*(0)}\}_i$ converge uniformément vers $H_{X_0^*}$. Soit $\varepsilon > 0$. On a donc

$$(3.23) \qquad \exists i_1 \geq i_0 \qquad \text{tel que} \qquad H_{X_0^*} - \varepsilon \leq H_{X_{i_1}^*(0)} \leq H_{X_0^*}.$$

On a de même, i_1 étant fixé,

$$(3.24) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall t \geq N, \quad t \in \mathscr{D}^{i_1}, \quad H_{X_{i_1}^*(0)} \leq H_{X_{i_1}(t)} \leq H_{X_{i_1}^*(0)}.$$

(3.23) et (3.24) entraînent

$$(3.25) \qquad \forall t \geq N, \qquad t \in \mathscr{D}^{i_1} \qquad H_{X_0^*} - 2\varepsilon \leq H_{X_{i_1}(t)} \leq H_{X_0^*}.$$

On a d'autre part

$$\forall i \geq i_0, \qquad \forall t \in \mathscr{D}^i \qquad H_{X_i}(t) \leq H_{X_i^*(0)} \leq H_{X_0^*},$$

d'où l'inégalité suivante, impliquant que (3.25) est satisfaite pour $i \geq i_1$,

$$\forall i \geq i_1 \qquad \forall t \in \mathscr{D}^i \qquad H_{X_{i_1}(t)} \leq H_{X_i(t)} \leq H_{X_0^*}.$$

En se limitant à des éléments t de $\mathbb{N}$ et en effectuant un passage à la limite sur i dans (3.25), on obtient la propriété.

2. Dans le cas où X_0 est un élément quelconque de (S) on raisonne comme pour la proposition 3.3 à l'aide d'une part d'un résultat identique au lemme 3.10, et d'autre part du fait, facile à établir, que si la proposition est vraie pour X_0' et X_0'' tels que $H_{X_0'} \leq H_{X_0''}$, alors elle est vraie pour tout X_0 vérifiant $H_{X_0'} \leq H_{X_0} \leq H_{X_0''}$. □

Le processus X^* étant fortement stationnaire, transitif, et du second ordre, on sait que

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (X^*(t))^2 dt = E(X_0^*)^2, \qquad \lim_{T \to +\infty} \int_0^T |X^*(t)|\, dt = E|X_0^*|,$$

les limites étant calculées au sens de la convergence p. s., ou moyenne quadratique.

On démontre que X possède les mêmes propriétés.

Pour A et T entiers, x réel, $u \geq 0$ on définit

$$\Psi_{T,A}^x(u) = P\left\{ \frac{1}{T+A} \int_A^{A+T} (X(t))^2 dt \leq x \,|\, X(A) = u \right\}$$

LEMME 3.13. — $\Psi_{T,A}^x(.)$ *est une fonction paire, décroissante sur* $\mathbb{R}^+$.

Démonstration. — On utilise le fait, démontré dans [2], que pour tout i et N éléments de $\mathbb{N}^*$, $P\left\{ \sum_{n=0}^{N} (X_i(t_n^i))^2 \leq x \,|\, X_0 = u \right\}$ est une fonction paire de u, décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Soit X_i' le processus défini, pour i entier, par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall t \in [t_n^i, t_{n+1}^i[\qquad X_i'(t) = X_i(t_n^i).$$

On a, en utilisant (3.20) et la technique du lemme 3.3 une inégalité de la forme

$$E|X_i'(t) - X_i'(t')| \leq D'[h + 2^{-i} + (h + 2^{-i})^{1/2}], \qquad |t' - t| < h,$$

où D' est une constante indépendante de i. On en déduit, pour $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{|t-t'|<h} P\{ |X_i'(t) - X_i'(t')| > \varepsilon \} \leq \frac{B}{\varepsilon} [h + 2^{-i} + (h + 2^{-i})^{1/2}],$$

ce qui permet immédiatement de montrer que $\{ X'_i \}$ vérifie (3.7). Comme $\{ X_i \}$ vérifie (3.11), $\{ X'_i \}$ vérifie aussi cette relation. On peut donc, comme pour $\{ X^*_i \}$ et $\{ X'_i \}$, et avec les mêmes conventions, conclure à l'existence d'un processus X′ tel que

$$\forall t \geq 0 \qquad P \lim_{i \to +\infty} X'_i(t) = X'(t). \tag{3.26}$$

On a donc, pour tout t, p. s. $X(t) = X'(t)$. D'autre part, on a

$$| X_i(t) | \leq | X_0 | + | \varphi_1 | \int_0^t | X_i(s) | \, ds + \varphi_2 \alpha t + \sup_{S \in [0,t]} | W_S |,$$

d'où l'on déduit par le lemme de Gronwall

et
$$| X_i(t) | \leq [| X_0 | + \varphi_2 \alpha t + \sup_{S \in [0,t]} | W_S | \, e^{|\varphi_1| t},$$
$$| X_i(t) |^2 \leq 4 [| X_0 |^2 + \varphi_2^2 \alpha^2 t^2 + \sup_{S \in [0,t]} | W_S |^2] e^{2|\varphi_1| t} = H(t).$$

On a donc, pour $0 \leq t \leq T$, et quel que soit i, $| X'_i(t) |^2 \leq H(T)$.

H(T) étant intégrable d'après l'inégalité de Doob, on peut, avec la méthode du lemme 3.5, montrer à partir de (3.26) que

$$P \lim_{i \to +\infty} \int_0^T | X'_i(t) |^2 dt = \int_0^T | X(t) |^2 dt.$$

On en déduit immédiatement le lemme puisque

$$\int_0^T | X'_i(t) |^2 dt = 2^{-i} \sum_{n=0}^{2^i T - 1} | X_i(t^i_n) |^2,$$

et qu'il suffit de le démontrer pour $\Psi^x_{T,0}$. □

PROPOSITION 3.5. — *Au sens de la convergence en loi*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (X(t))^2 dt = E(X^*_0)^2, \qquad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T | X(t) | \, dt = E | X^*_0 |.$$

Démonstration. — Un calcul élémentaire montre que, $\Psi^x_{T,A}$ étant paire.

$$\Phi^x_{T,A} = P \left\{ \frac{1}{T+A} \int_A^{A+T} (X(t))^2 dt \leq x \right\} - P \left\{ \frac{1}{T+A} \int_A^{A+T} (X^*(t))^2 dt \leq x \right\}$$
$$= - \int_0^{+\infty} \Psi^x_{T,A}(u) (d H_{X(A)}(u) - d H_{X^*(A)}(u))$$

La deuxième formule de la moyenne, justifiée par le lemme 3.13, entraîne, pour $B > 0$,

$$\left| -\int_0^B \Psi^x_{T,A}(u)(dH_{X(A)}(u) - dH_{X^*(A)}(u)) \right| = |\Psi^x_{T,A}(0)(H_{X^*(A)}(\xi) - H_{X(A)}(\xi))|, \quad 0 \le \xi \le B.$$

D'où :

$$\left| \int_0^B \Psi^x_{T,A}(u)(dH_{X(A)}(u) - dH_{X^*(A)}(u)) \right| \le \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} |H_{X^*(A)}(\xi) - H_{X(A)}(\xi)|.$$

On en déduit, grâce à la proposition 3.4, indépendamment de x et T, que

$$(3.27) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad |\Phi^x_{T,A}| \le \varepsilon.$$

Dans la suite de la démonstration A est fixé, satisfaisant (3.27).
Soit $x < E(X_0^*)^2$, et T_0 entier tel que

$$\forall T \ge T_0, \qquad T \in \mathbb{N}, \qquad P\left\{ \frac{1}{T+A} \int_A^{A+T} (X^*(t))^2 dt \le x \right\} \le \varepsilon.$$

Dans ces conditions, d'après 3.27, on a

$$P\left\{ \frac{1}{T+A} \int_0^{A+T} (X(t))^2 dt \le x \right\} \le P\left\{ \frac{1}{T+A} \int_A^{A+T} (X(t))^2 dt \le x \right\} \le 2\varepsilon.$$

D'où

$$(3.28) \qquad \lim_{\substack{N \to +\infty \\ N \in \mathbb{N}}} P\left\{ \frac{1}{N} \int_0^N (X(t))^2 dt \le x \right\} = 0.$$

Soit $x > E(X_0^*)^2$, $\eta > 0$ tel que $x - \eta > E(X_0^*)^2$, et T_1 entier tel que

$$(3.29) \quad \forall T \ge T_1, T \in \mathbb{N}, \qquad P\left\{ \frac{1}{T+A} \int_A^{A+T} (X^*(t))^2 dt \le x \right\} \ge 1 - \varepsilon.$$

On peut d'autre part démontrer, en utilisant le fait que $X(t)$ est solution de (1.1), qu'à tout A correspond une constante D_A telle que

$$\forall t \in [0, A] \qquad E(X(t))^2 \le D_A.$$

On en déduit, grâce à l'inégalité de Markov, qu'il existe un entier T_2 tel que

$$(3.30) \quad \forall T \ge T_2 \quad P\left\{ \frac{1}{T+A} \int_0^A (X(t))^2 dt > \eta \right\} \le \frac{1}{\eta(T+A)} \int_0^A E(X(t))^2 dt \le \frac{A.D_A}{\eta(T+A)} \le \varepsilon.$$

(3.27), (3.29) et (3.30) permettent d'écrire, pour $T \geq \max(T_1, T_2)$,

$$P\left\{\frac{1}{T+A}\int_0^{A}(X(t))^2dt \leq x\right\} \geq 1-P\left\{\frac{1}{T+A}\int_A^{A+T}(X(t))^2dt > x-\eta\right\}$$
$$-P\left\{\frac{1}{T+A}\int_0^{A}(X(t))^2dt > \eta\right\} \geq 1-3\varepsilon.$$

On a donc :

$$\lim_{\substack{N\to+\infty \\ N\in\mathbb{N}}} P\left\{\frac{1}{N}\int_0^{N}(X(t))^2dt \leq x\right\} = 1. \tag{3.31}$$

(3.28) et (3.31) donnent la première partie de la proposition lorsque T est entier.

L'extension à T quelconque se fait alors de façon classique par encadrement de T entre deux entiers consécutifs. La deuxième partie de la proposition se démontre de la même façon en utilisant le fait que

$$P\left\{\sum_{n=0}^{N}|X_i(t_n^i)| \leq x \,|\, X_i(0) = u\right\}$$

est une fonction décroissante de u, pour x fixé.

3.3. Extension de la proposition 2.1 à la fonction de contrôle $\overset{\circ}{Y}$.

L'équation (1.1) admet pour la stratégie $\overset{\circ}{Y}$ une solution forte unique X que l'on peut donc confondre avec le processus X défini en 3.2. Dans le cas où $X_0 = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, ce résultat est démontré dans [9]. Dans le cas où X_0 est une variable aléatoire quelconque du second ordre on peut le démontrer directement, [10], en s'inspirant de la méthode utilisée dans [11], § 3.10.

Si $P^T_{\varphi,Y}$ désigne la restriction de la loi $P_{\varphi,Y}$ de X à $\mathscr{C}_T$, on montre que dans ce cas on a aussi

$$\frac{dP^T_{\varphi,Y}}{dv^T}(M) = \exp\left[\int_0^{T}(\varphi_1 M_t + \varphi_2\alpha \text{ signe } (M_t))dM_t\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^{T}(\varphi_1 M_t + \varphi_2\alpha \text{ signe } (M_t))^2dt\right]. \tag{3.32}$$

On donne ainsi un sens au problème de l'estimation de φ_1 et φ_2 dans la structure $(C, \mathscr{C}_T, \{P^T_{\varphi,\overset{\circ}{Y}}\})$ avec une fonction de log-vraisemblance définie à l'aide de (3.32) et un estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\varphi}_T$ défini comme en 2.1.

Comme d'après la proposition 3.5 et l'unicité de la solution de (1.1) pour $\overset{\circ}{Y}$, on a, pour la convergence en loi relativement à $P_{\varphi,\overset{\circ}{Y}}$,

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T M_t^2 dt = E\,|X_0^*|^2, \qquad \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |M_t|\,dt = E\,|X_0^*|,$$

on peut reprendre le raisonnement qui conduit à la proposition 2.1. Si on remarque que la matrice $J(\varphi) = \begin{pmatrix} E\,|X_0^*|^2 & \alpha E\,|X_0^*| \\ \alpha E\,|X_0^*| & \alpha^2 \end{pmatrix}$ est inversible, pour la même raison que $J_i(\varphi)$, on obtient un résultat identique à la proposition 2.1.

PROPOSITION 3.6. — *La famille* $\{\varphi_T\}_{T\geq 0}$ *; vérifie relativement à* $P_{\overset{\circ}{\varphi},Y}$,

1. $P_{\overset{\circ}{\varphi},Y}$ lim $\hat{\varphi}_T = \overset{\circ}{\varphi}$
2. $T^{1/2}[\hat{\varphi}_T - \overset{\circ}{\varphi}]$ *converge en loi vers un vecteur de loi* $\mathcal{N}(0, J^{-1}(\overset{\circ}{\varphi}))$.

3.4. **Propriétés d'optimalité de** $\overset{\circ}{Y}$.

Pour la structure statistique définie en 3.3 la matrice d'information de Fisher relative à $\overset{\circ}{Y}$ est donnée par une expression identique à celle de $J_Y^T(\varphi)$. On est ainsi conduit à poser (P_2) pour un critère identique à $v_Y^T(\varphi)$. La classe de stratégies utilisée est définie de la façon suivante.

On raisonne sur une base de processus $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_t\}_{0\leq t\leq T}, P)$, T fixé, pour laquelle sont définis un mouvement brownien W et une variable aléatoire X_0 mesurable par rapport à $\mathcal{A}_0$, et indépendante de W. On désigne par C_0 l'ensemble des processus mesurables définis sur cette base, adaptés à $\{\mathcal{A}_t\}$, et à valeurs dans $[-\alpha, +\alpha]$, et par C_0^i, i entier, le sous-ensemble de C_0 constitué des éléments Y tels que, pour $t_n^i \leq t < t_{n+1}^i$, $Y(t) = Y(t_n^i)$.

X_0 étant donné, pour tout élément Y de C_0 (1.1) admet une solution unique notée X^Y. On peut ainsi définir v_Y^T par

$$v_Y^T = E\int_0^T [(X^Y(t))^2 + (Y(t))^2]dt\,.$$

On montre que $\overset{\circ}{Y}$ maximise v_Y^T sur la classe C_0. L'emploi de C_0, dite classe des stratégies généralisées, permet en fait une simplification de l'étude.

Comme la classe des stratégies de type II, à valeurs dans $[-\alpha, +\alpha]$, est en fait un sous-ensemble de C_0, à condition évidemment que (1.1) possède une solution pour de telles stratégies, le résultat est tout à fait satisfaisant en ce qui concerne $\overset{\circ}{Y}$. On utilise pour la démonstration un

certain nombre de lemmes, le premier justifiant d'ailleurs la définition de v_Y^T.

LEMME 3.14. — *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$\forall Y \in C_0, \qquad \forall t \in [0, T], \qquad E\,|X^Y(t)|^2 \leq M.$$

Ce lemme élémentaire est une conséquence immédiate du lemme de Gronwall et du fait que les éléments de C_0 sont à valeurs dans $[-\alpha, +\alpha]$.

LEMME 3.15. — *Soit* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* C_0 *convergeant au sens de la mesure* $P \otimes l_T$ *vers un élément* Y *de* C_0. *Alors*

$$\forall t \in [0, T], \qquad P \lim_{n\to+\infty} X^{Y_n}(t) = X^Y(t).$$

La démonstration de ce lemme est dans [5], théorème 3.16.

LEMME 3.16. — *Si*

$$C_e = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} C_0^i,$$

$$\sup_{Y\in C_0} v_Y^T = \sup_{Y\in C_e} v_Y^T.$$

Démonstration. — On adapte la démonstration du lemme 3.10 de [5].

Soit Y élément de C_0. Il existe une suite $\{Y_n\}$ d'éléments de C_e convergeant, on mesure $P \otimes l_T$, vers Y. D'après le lemme 3.15, on a, comme au lemme 3.5,

$$(P \otimes l_T) \lim_{n\to+\infty} |X^{Y_n}(t,\omega) - X^Y(t,\omega)| = 0$$

Le lemme 3.14 justifiant l'emploi du théorème de Lebesque, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} E \int_0^T |X^{Y_n}(t) - X^Y(t)|^2 dt = 0 \tag{3.33}$$

D'autre part on a

$$|v_Y^T - v_{Y_n}^T| \leq \left(E\int_0^T |X^{Y_n}(t) - X^Y(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(E\int_0^T |X^{Y_n}(t) + X^Y(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$+ \left(E\int_0^T |Y_n(t) - Y(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(E\int_0^T |Y_n(t) + Y(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

Du lemme 3.14, de (3.33) et de la relation analogue vérifiée pour $\{Y_n\}$ et Y, on déduit $\lim_{n\to+\infty} |v_Y^T - v_{Y_n}^T| = 0$. Le résultat du lemme en découle de façon évidente.

LEMME 3.17 :

$$v_Y^T = \lim_{i\to+\infty} \uparrow v_{Y_i}^T.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0, C > 0$. D'après (3.20) et le lemme 3.14, on a

$$\begin{aligned} &P\{|(X_i(t))^2 - (X(t))^2| > \varepsilon\} \\ &\quad \leq P\left\{|X_i(t) - X(t)| > \frac{\varepsilon}{2C}\right\} + P\{|X_i(t)| > C\} + P\{|X(t)| > C\} \\ &\quad \leq P\left\{|X_i(t) - X(t)| > \frac{\varepsilon}{2C}\right\} + \frac{K}{C} + \frac{M}{C} \end{aligned}$$

La propriété de convergence en probabilité de $\{X_i(t)\}_i$ vers $X(t)$ permet de montrer, après un choix préalable de C, que

$$\forall t \in [0, T] \qquad P \lim_{i \to +\infty} (X_i(t))^2 = (X(t))^2 .$$

On a donc

$$(P \otimes l_T) \lim (X_i(t, \omega))^2 = (X(t, \omega))^2 .$$

La majoration $(X_i(t))^2 \leq H(T)$, établie au lemme 3.13, justifie l'emploi du théorème de Lebesque, et entraîne

$$\lim_{i \to +\infty} E \int_0^T (X_i(t))^2 dt = E \int_0^T (X(t))^2 dt .$$

Comme $(Y_i(t))^2 = (\overset{\circ}{Y}(t))^2 = \alpha^2$ pour tout i et tout n, on a donc

$$\lim_{i \to +\infty} v_{Y_i}^T = v_{\overset{\circ}{Y}}$$

La propriété de monotonie résulte de ce que, pour tout i,

$$C_a^i \subset C_a^{i+1} \qquad \text{et} \qquad C_a^i \subset C_0^i .$$

Comme on a déjà remarqué que Y_i réalise le maximum de v_Y^T sur C_a^i (consulter [5] par exemple), on a donc $v_{Y_i}^T \leq v_{Y_{i+1}}^T$.

Une étude plus fine permet de montrer qu'il y a en fait croissante stricte.

La propriété de convergence dans le lemme n'est démontrée que pour une sous-suite puisque seule une sous-suite de $\{X_i\}_i$ possède en fait la propriété de convergence vers X. Mais, de façon évidente, la propriété de monotonie, qui est vraie sans restriction, permet de conclure en toute généralité.

Remarque. — De la même façon on montre, grâce à [2], que Y_i maximise sur C_a^i, pour t fixé, $t \in \mathscr{D}^i$, et $x \geq 0$ donné, $H_{X(t)}(x)$. On a donc

$$H_{X_i(t)}(x) \leq H_{X_{i+1}(t)}(x) .$$

PROPOSITION 3.7 :

$$v_{\hat{Y}}^T = \sup_{Y \in C_0} v_Y^T .$$

Démonstration. — Soit $Z = \sup_{Y \in C_0} v_Y^T$ et $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 3.16, pour un entier i il existe un élément $\hat{Y}$ de C_0^i tel que $Z - \varepsilon \leq v_{\hat{Y}}^T \leq Z$. Comme, d'après [5], Y_i réalise le maximum de v_Y^T aussi sur C_0^i, on en déduit

$$Z - \varepsilon \leq v_{\hat{Y}}^T \leq v_{Y_i} \leq Z.$$

Le lemme 3.17 permet alors de conclure.

Commentaire: (P2) tel qu'il a été défini à l'aide de la trace de la matrice d'information admet donc $\overset{\circ}{Y}$ comme solution dans le cas de stratégies de type II. Il est évident que cette stratégie est sans intérêt dans une optique de commande optimale. Il serait intéressant en conséquence d'utiliser un critère qui soit un compromis entre ces deux points de vue. L'étude d'un tel problème semble malheureusement difficile.

RÉFÉRENCES

[1] F. BRODEAU et A. LE BRETON, Identification de paramètres pour un système excité par des bruits gaussien et poissonien. *Ann. Inst. Poincaré*, t. **XV**, n° 1, 1979, p. 1-23, section B.

[2] F. BRODEAU, *Étude d'une chaîne de Markov associée à un problème de contrôle optimal stochastique.* Rapport de Recherche 241, Maths. Appli. et Infor. U. S. M. G., 1981.

[3] F. DELEBECQUE et J. P. QUADRAT, *Sur l'estimation des caractéristiques locales d'un processus de diffusion avec sauts.* Rapport de Recherche I. R. I. A. n° 311, juin 1978.

[4] A. V. SKOROHOD, *Studies in the Theory of Random Processes.* Addison-Wesley, 1965.

[5] I. I. GIHMAN and A. V. SKOROHOD, *Controlled Stochastic Processes.* Springer Verlag, 1979.

[6] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability measures.* J. Wiley, 1968.

[7] J. L. DOOB, *Stochastic Processes.* J. Wiley, Fourth Edition 1962.

[8] I. I. GIHMAN and A. V. SKOROHOD, *Stochastic Differential Equations.* Springer, 1972.

[9] A. Yu. VERETENNIKOV, On the strong solutions of Stochastic Differential Equations. *Th. of Prob. and its Appl.*, t. XXIV, n° 2, 1979, p. 354-366.

[10] F. BRODEAU, *Étude des solutions d'une équation différentielle stochastique linéaire en vue d'identifications optimales des paramètres de dérive.* Rapport de Recherche, Maths. Appli. et Info., U. S. M. G. 269, 1981.

[11] H. P. MC. KEAN Jr, *Stochastics Integrals.* Academic Press, 1969.

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1981, sous forme définitive le 5 mars 1982)