Annales de l'I. H. P., section B

J. M. Reinhard

Identités du type Baxter-Spitzer pour une classe de promenades aléatoires semi-markoviennes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 18, nº 4 (1982), p. 319-333
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_4_319_0>

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :

Vol. XVIII, n° 4, 1982, p. 319-333. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Identités du type Baxter-Spitzer pour une classe de promenades aléatoires semi-markoviennes

par

J. M. REINHARD
Université libre de Bruxelles, 140, avenue Moeremans,
1710 Dilbeek-Belgique

RÉSUMÉ. — On étend un résultat de Stone [*8*] à une classe de processus semi-markoviens. Ensuite, à l'aide d'un théorème de dualité [*4*], on obtient pour la classe de processus considérée dans [*4*] des généralisations d'identités bien connues en théorie des promenades aléatoires classiques.

SUMMARY. — A result of Stone [*8*] is extended to a class of semi-Markov processes. Then, using a duality theorem [*4*], we obtain for the class of processes considered in [*4*] generalizations of well known identities in the classical random walks theory.

1. INTRODUCTION

Soit (Ω, $\propto$, P) un espace de probabilité complet sur lequel toutes les variables aléatoires introduites ci-dessous sont définies. Soient J_n ($n \in N$) des variables aléatoires (v. a.) à valeurs dans $J = \{ 1, \ldots, m \}$ où $m \in N_0$, Y_n ($n \in N$) des v. a. à valeurs dans R^+ et S_n ($n \in N$) des v. a. à valeurs dans Z. Nous supposons que le processus $\{ (J_n, Y_n, S_n), n \in N \}$ est une chaîne de Markov (espace d'états $J \times R^+ \times Z$) dont les probabilités de transition sont du type

$$P[J_{n+1} = j, Y_{n+1} \leqslant t, S_{n+1} = s \mid (J_k, Y_k, S_k), k = 0, \ldots, n; J_n = i, S_n = r] = Q_{ij}(r, s; t) \qquad (i, j \in J; r, s \in Z; t \geqslant 0; n \in N) \quad (1)$$

© Gauthier-Villars

où

i) les fonctions $Q_{ij}(r, s\,;\,.)$ sont positives, continues à droite et non décroissantes sur R^+,

$$ii)\ \forall i \in J,\ \forall r \in Z : \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q_{ij}(r, s\,;\,\infty) = 1.$$

Nous noterons

$$Q_{ij}(r, s) = Q_{ij}(r, s\,;\,\infty) \tag{2}$$

$$H_{ij}(r\,;\,t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q_{ij}(r, s\,;\,t) \tag{3}$$

$$H_i(r\,;\,t) = \sum_{j=1}^{m} H_{ij}(r\,;\,t)\,. \tag{4}$$

On voit facilement que $\{ (J_n, S_n), n \in N \}$ est une chaîne de Markov à espace d'états $J \times Z$ dont les probabilités de transition sont définies par (2). Nous supposerons toujours qu'il existe une fonction de répartition H telle que $H(0+) = 0$ et vérifiant les inégalités

$$H_i(r\,;\,t) \leqslant H(t) \qquad \forall i \in J\,;\, r \in Z\,;\, t \geqslant 0\,. \tag{5}$$

On peut interpréter les variables aléatoires J_n, Y_n et S_n de la manière suivante : considérons un système évoluant aléatoirement dans le temps et caractérisé par m états possibles notés $1, \ldots, m$; J_0 désigne l'état du système à l'instant initial, J_n l'état du système après sa $n^{\text{ème}}$ transition, Y_n l'intervalle de temps séparant la $(n-1)^{\text{ème}}$ transition de la $n^{\text{ème}}$ (une transition fictive, la « $0^{\text{ème}}$ », ayant lieu à l'instant initial), S_n une valeur réelle, par exemple un revenu ou un coût, associée à la $n^{\text{ème}}$ transition.

Définissons

$$U_0 = 0\,, \qquad U_{n+1} = U_n + Y_{n+1} \qquad (n \in N)\,; \tag{6}$$

$$N(t) = \sup \{ n \in N : U_n \leqslant t \} \qquad (t \geqslant 0)\,; \tag{7}$$

$$J(t) = J_{N(t)} \qquad (t \geqslant 0)\,; \tag{8}$$

$$S(t) = S_{N(t)} \qquad (t \geqslant 0)\,; \tag{9}$$

$$M_{ij}(u, v\,;\,t) = P\big[\max_{0 \leqslant n \leqslant N(t)} S_n = v,\ J(t) = j \mid J_0 = i,\ S_0 = u\big] \qquad (i, j \in J\,;\, u, v \in Z\,;\, t \geqslant 0)\,. \tag{10}$$

Il est clair que $\{ (J(t), S(t))\,;\, t \geqslant 0 \}$ est un processus semi-markovien, à espace d'états $J \times Z$, tel que défini par Pyke (1961). On montre facilement que l'hypothèse (5) implique que ce processus est régulier, c'est-à-dire que les variables N(t) sont presque sûrement finies $\forall t \geqslant 0$. Les trajectoires des processus N(t) et J(t) sont presque sûrement continues à droite.

Au § 2, nous montrerons comment on peut généraliser un résultat de Stone [*8*] et obtenir ainsi des expressions explicites pour les transformées des distributions $\mathrm{M}_{ij}(u, v; t)$. Nous rappellerons au § 3 les résultats de dualité obtenus dans [*4*]. Ces résultats seront utilisés au § 4 pour obtenir des identités du type Baxter-Spitzer relatives aux processus (J − Y − X) étudiés dans [*4*].

2. EXTENSION D'UN RÉSULTAT DE STONE

2.1.

Définissons les matrices suivantes

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(u, v; t) &= (\mathrm{M}_{ij}(u, v; t)), \\ \mathrm{G}(u; t) &= (\delta_{ij}\mathrm{H}_i(u; t)), \\ \mathrm{Q}(u, v; t) &= (\mathrm{Q}_{ij}(u, v; t)), \qquad u, v \in \mathrm{Z},\ t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Si l'on définit le produit de convolution de deux matrices par

$$[\mathrm{A}(t) * \mathrm{B}(t)]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{B}_{kj}(t-u) d_u \mathrm{A}_{ik}(u),$$

on obtient aisément le

THÉORÈME 1. — Pour $t \geqslant 0$, on a

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathrm{M}(u, v; t) = 0 \qquad \text{si} \quad v < u, \\ & \mathrm{M}(u, v; t) = \sum_{w=-\infty}^{v} \mathrm{Q}(u, w; t) * \mathrm{M}(w, v; t) \qquad \text{si} \quad v > u, \\ & \mathrm{M}(u, u; t) = \mathrm{I} - \mathrm{G}(u; t) + \sum_{w=-\infty}^{u} \sum_{r=-\infty}^{u} \mathrm{Q}(u, w; t) * \mathrm{M}(w, r; t). \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des matrices réelles de dimensions infinies dont les éléments sont eux-mêmes des matrices carrées $m \times m$; si $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$, on notera

$$\mathcal{A} = (\mathrm{A}(u, v))_{u,v \in \mathrm{Z}} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{A}(u, v) = (\mathrm{A}_{ij}(u, v)) \in \mathrm{R}^{m \times m}.$$

Notons $\mathcal{R}$ le sous-espace des matrices $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ telles que

$$\| \mathcal{A} \| = \sup_{i \in \mathrm{J}} \sup_{u \in \mathrm{Z}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{v=-\infty}^{\infty} | \mathrm{A}_{ij}(u, v) | < \infty .$$

$\| \quad \|$ définit une norme sur $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}$ est un espace de Banach. Définissons sur $\mathscr{R}$ l'opérateur

$$\sigma : \mathscr{R} \to \mathscr{R} : \mathscr{A} = (\mathrm{A}(u, v)) \to \mathscr{A}^\sigma = (\mathrm{A}^\sigma(u, v))$$

où

$$\mathrm{A}^\sigma(u, v) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad v < u\,, \\ \mathrm{A}(u, v) \quad \text{si} \quad v > u\,, \\ \displaystyle\sum_{w=-\infty}^{u} \mathrm{A}(u, w) \quad \text{si} \quad u = v \qquad (u, v \in \mathrm{Z})\,. \end{cases} \tag{12}$$

L'opérateur τ sur $\mathscr{R}$ est alors défini par $\mathscr{A}^\tau = \mathscr{A} - \mathscr{A}^\sigma$. Lorsque $m = 1$, on retrouve les opérateurs définis par Stone [*8*] ; leurs propriétés s'étendent d'ailleurs ici :

$$\begin{array}{ll} (\mathscr{A}^\sigma)^\sigma = \mathscr{A}^\sigma & (\mathscr{A}^\tau)^\tau = \mathscr{A}^\tau \\ (\mathscr{A}^\sigma)^\tau = 0 & (\mathscr{A}^\tau)^\sigma = 0 \\ (\mathscr{A}^\sigma\mathscr{B}^\sigma)^\sigma = \mathscr{A}^\sigma\mathscr{B}^\sigma & (\mathscr{A}^\tau\mathscr{B}^\tau)^\tau = \mathscr{A}^\tau\mathscr{B}^\tau \end{array}$$
$$(\delta_{ij}\delta_{uv})^\sigma = (\delta_{ij}\delta_{uv}),\ (\delta_{ij}\delta_{uv})^\tau = 0$$

Si l'on introduit les matrices de $\mathscr{R}$ définies par

$$\begin{array}{ll} \mathscr{I} = (\delta_{ij}\delta_{uv})\,, & \mathscr{M}(t) = (\mathrm{M}(u, v\,; t))\,, \\ \mathscr{Q}(t) = (\mathrm{Q}(u, v\,; t))\,, & \mathscr{G}(t) = (\delta_{uv}\mathrm{G}(u\,; t))\,, \end{array}$$

le système (11) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathscr{M}(t) = \mathscr{I} - \mathscr{G}(t) + (\mathscr{Q}(t) * \mathscr{M}(t))^\sigma \qquad (t \geqslant 0)\,, \tag{13}$$

où la loi $*$ dans $\mathscr{R}$ est définie par

$$(\mathscr{Q}(t) * \mathscr{M}(t))(u, v) = \sum_{w=-\infty}^{\infty} \mathrm{Q}(u, w\,; t) * \mathrm{M}(w, v\,; t)\,.$$

Nous nous proposons d'écrire (13) en termes de transformées de Laplace-Stieltjes. A cette fin nous établissons d'abord le

LEMME 1. — $\forall i, j \in \mathrm{J}$ et $\forall u, v \in \mathrm{Z}$, $\mathrm{M}_{ij}(u, v\,; t)$ est une fonction de t à variation bornée et continue à droite.

Démonstration. — On a

$$\mathrm{M}_{ij}(u, v\,; t) = \overline{\mathrm{M}}_{ij}(u, v\,; t) - \overline{\mathrm{M}}_{ij}(u, v + 1\,; t)$$

où

$$\overline{\mathrm{M}}_{ij}(u, v\,; t) = \mathrm{P}[\max_{0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}(t)} \mathrm{S}_k \geqslant v,\ \mathrm{J}(t) = j \mid \mathrm{J}_0 = i,\ \mathrm{S}_0 = u]\,.$$

Si 1_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A ($1_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon), on peut montrer que

$$\overline{M}_{ij}(u, v ; t) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ P\left[\max_{0 \leqslant k \leqslant N(t)} S_k \geqslant v, \sum_{k=0}^{N(t)} 1_{[J_k = j]} > r \mid J_0 = i, S_0 = u \right] \right.$$
$$\left. - P\left[\max_{0 \leqslant k \leqslant N(t)} S_k \geqslant v, \sum_{k=0}^{N(t)-1} 1_{[J_k = j]} > r \mid J_0 = i, S_0 = u \right] \right\}, \quad (14)$$

où par convention :

$$\left[\sum_{k=0}^{-1} 1_{[J_k = j]} > r \right] = \emptyset \qquad (r \in N).$$

Les deux termes de la différence entre accolades dans (14) sont des fonctions non décroissantes de t ; les deux séries formées au moyen de ces termes convergent puisque

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\left[\sum_{k=0}^{N(t)} 1_{[J_k = j]} > r \mid J_0 = i, S_0 = u \right] \leqslant \sum_{r=0}^{\infty} P[N(t) > r \mid J_0 = i, S_0 = u]$$
$$= E[N(t) \mid J_0 = i, S_0 = u],$$

cette dernière quantité étant finie en raison de l'hypothèse (5). $\overline{M}_{ij}(u, v ; t)$ est donc une fonction à variation bornée de t. $M_{ij}(u, v ; t)$, différence de deux fonctions à variation bornée, est également à variation bornée et possède donc des limites à gauche et à droite en tout point. Pour établir la continuité à droite, il suffit de remarquer que

$$| M_{ij}(u, v ; t + \Delta t) - M_{ij}(u, v ; t) | \leqslant P[A_t \Delta A_{t+\Delta t} \mid J_0 = i, S_0 = u]$$

où

$$A_t = [\max_{0 \leqslant k \leqslant N(t)} S_k = v, J(t) = j].$$

Comme

$$A_t \Delta A_{t+\Delta t} \subset [N(t + \Delta t) - N(t) > 0]$$

et que les probabilités conditionnelles du membre de droite de cette relation tendent vers 0 lorsque $\Delta t \searrow 0$, le lemme est démontré.

Il résulte du lemme 1 que les fonctions $M_{ij}(u, v ; t)$ sont caractérisées par leurs transformées de Laplace-Stieltjes. Soient $m(s)$, $\gamma(s)$ et $q(s)$ les matrices de $\mathscr{R}$ obtenues en prenant les transformées de Laplace-Stieltjes des éléments de respectivement $\mathscr{M}(t)$, $\mathscr{G}(t)$ et $\mathscr{Q}(t)$; on a par exemple :

$$\gamma_{ij}(u, v ; s) = \delta_{ij} \delta_{uv} h_i(u ; s)$$

où

$$h_i(u\,;\,s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} d_t \mathrm{H}_i(u\,;\,t) \qquad (s \geqslant 0)\,.$$

En prenant les transformées de Laplace-Stieltjes des deux membres de (13), on obtient :

$$m(s) = \mathscr{I} - \gamma(s) + (q(s)m(s))^\sigma \qquad (s > 0)\,. \tag{15}$$

Par une adaptation simple de la démonstration donnée par Stone dans le cas $m = 1$, on obtient alors le théorème suivant qui, sous la condition restrictive (17), généralise l'identité de Spitzer.

THÉORÈME 2. — Sous les conditions (5),

$$\mathrm{H}_i(u,\,t) = \mathrm{H}_i(t) \qquad (i \in \mathrm{J},\, u \in \mathrm{Z},\, t \geqslant 0)\,, \tag{16}$$

et

$$(q^k(s))^\sigma q(s) = q(s)(q^k(s))^\sigma \qquad (k \in \mathrm{N},\, s > 0)\,, \tag{17}$$

l'équation (15) a pour unique solution bornée

$$m(s) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (q^k(s))^\sigma \right\} [\mathscr{I} - \gamma(s)] \qquad (s > 0)\,. \tag{18}$$

Démonstration. — Notons d'abord que les hypothèses (5) et (16) entraînent que $h_i(s) < 1$ $\forall i \in \mathrm{J}$ et $\forall s > 0$. On en déduit que $\| q(s) \| < 1$, $\forall s > 0$. Soit alors $m(s)$ une solution bornée de (15). En itérant l'équation (15), il vient $\forall n \in \mathrm{N}$:

$$m(s) = m_0(s) + m_1(s) + \ldots + m_n(s) + \mathrm{L}_n(s) \qquad (s > 0)$$

où

$$\begin{aligned} m_0(s) &= \mathscr{I} - \gamma(s)\,, & m_{n+1}(s) &= (q(s)m_n(s))^\sigma \qquad (n \in \mathrm{N})\,, \\ \mathrm{L}_0(s) &= (q(s)m(s))^\sigma\,, & \mathrm{L}_{n+1}(s) &= (q(s)\mathrm{L}_n(s))^\sigma \qquad (n \in \mathrm{N})\,. \end{aligned}$$

On vérifie facilement les inégalités

$$\begin{aligned} &\| m_n(s) \| \leqslant \| q(s) \|^n \| m_0(s) \| \\ &\| \mathrm{L}_n(s) \| \leqslant \| q(s) \|^{n+1} \| m(s) \| \qquad (s > 0)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent la série $\sum_{n=0}^{\infty} m_n(s)$ converge dans $\mathscr{R}$ et $\| \mathrm{L}_n(s) \| \to 0$ pour $n \to \infty$ $(s > 0)$. $\sum_{n=0}^{\infty} m_n(s)$ est donc l'unique solution bornée de (15).

L'hypothèse (17) permet d'écrire pour $s > 0$:

$$\mathscr{I} - q(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} q^k(s)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (q^k(s))^\tau\right) . \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (q^k(s))^\sigma\right).$$

En utilisant alors le fait que $(\exp \mathscr{A}^\tau)^\sigma = \mathscr{I} \ \forall \mathscr{A} \in \mathscr{R}$ et le fait que la matrice γ a tous ses blocs diagonaux égaux, on vérifie que (18) définit une solution bornée de (15) et donc l'unique solution bornée de (15).

2.2. **Cas particulier : les processus spatialement homogènes.**

Nous dirons que la chaîne $\{ (J_n, Y_n, S_n) ; n \in N \}$ est spatialement homogène si $\forall i, j \in J$, $u, v \in Z$, $t \geqslant 0$:

$$Q_{ij}(u, v ; t) = Q_{ij}(v - u, t) \tag{19}$$

où les matrices $Q(., .)$ définissent le noyau d'un processus $(J - Y - X)$ (voir [*4*]). On montre facilement que dans ce cas le processus $\{ J_n ; n \in N \}$ est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont données par

$$P_{ij} = P[J_{n+1} = j \mid J_n = i] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} Q_{ij}(r, \infty) . \tag{20}$$

Les probabilités $M_{ij}(u, v ; t)$ et $H_i(u ; t)$ sont alors toujours de la forme

$$\begin{gathered} M_{ij}(u, v ; t) = M_{ij}(v - u, t) \\ H_i(u ; t) = H_i(t) . \end{gathered} \tag{21}$$

Pour $s > 0$ et $y \in Z$, nous définissons les matrices

$$q^{(0)}(y, s) = \delta_{0y} I_m,\ q^{(1)}(y, s) = q(y, s) = \left(\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} d_t Q_{ij}(y, t)\right), \tag{22}$$

et, récursivement pour $\forall k \in N$:

$$q^{(k+1)}(y, s) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} q(z, s) q^{(k)}(y - z, s) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} q^{(k)}(z, s) q(y - z, s) . \tag{23}$$

Il est clair que

$$q_{ij}^{(k)}(y, s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} d_t Q_{ij}^{(k)}(y, t)$$

où

$$Q_{ij}^{(k)}(y, t) = P[J_k = j, U_k \leqslant t, S_k = u + y \mid J_0 = i, S_0 = u] \qquad \forall u \in Z.$$

On montre d'ailleurs facilement que $\forall u \in Z$:

$$q^{(k)}(y, s) = q^k(u, u + y ; s) \qquad (k \in N, y \in Z, s > 0). \tag{24}$$

En utilisant les égalités

$$\sum_{y=1}^{\infty} q(v-u-y, s)q^{(k)}(y, s) = q^{(k+1)}(v-u, s) - \sum_{y=-\infty}^{0} q(v-u-y, s)q^{(k)}(y, s)$$

$$\sum_{y=1}^{\infty} q^{(k)}(y, s)q(v-u-y, s) = q^{(k+1)}(v-u, s) - \sum_{y=-\infty}^{0} q^{(k)}(y, s)q(v-u-y, s),$$

on peut montrer que la condition (17) est équivalente à la suivante :

$$\sum_{y=-\infty}^{0} [q(z, s) - q(z-y, s)]q^{(k)}(y, s) = \sum_{y=-\infty}^{0} q^{(k)}(y, s)[q(z, s) - q(z-y, s)] \qquad (z \in Z, s > 0, k \in N). \tag{25}$$

Il est dès lors évident que les processus spatialement homogènes satisfaisant

$$q(r, s)q(u, s) = q(u, s)q(r, s), \qquad \forall r, u \in Z, \forall s > 0, \tag{26}$$

vérifient toujours (17). Dans le cas $m = 1$, on en déduit que, comme l'a montré Stone [*8*], tout processus spatialement homogène satisfait (17). Il n'en est évidemment plus ainsi lorsque $m > 1$.

On peut vérifier qu'un processus spatialement homogène satisfait la condition (26), et donc la condition (17), si son noyau a l'une des formes particulières suivantes :

$$Q_{ij}(r, t) = q_r H_{ij}(t) \tag{27}$$

$$Q_{ij}(r, t) = Q_{iTj}(r, t) \tag{28}$$

où H est le noyau d'un processus de renouvellement markovien, $\{ q_r ; r \in Z \}$ une distribution de probabilité sur Z, $iTj = (j - i)$ modulo-m, et où les fonctions $Q_k(r, t)$ $(k = 0, \ldots, m-1 ; r \in Z ; t \geqslant 0)$ sont positives, continues à droite, non décroissantes en t et satisfont :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} Q_k(r, \infty) = 1.$$

Définissons la matrice

$$g(s) = (\delta_{ij} h_i(s)) \qquad (s \geqslant 0).$$

Le théorème suivant établit pour les processus spatialement homogènes une version partielle du théorème 2 que nous utiliserons dans la suite.

THÉORÈME 3. — Si $\{ (J_n, Y_n, S_n) ; n \in N \}$ est une chaîne spatialement homogène dont le noyau satisfait les relations (25) et

$$h_i(s) < 1 \qquad \forall i \in J, \qquad \forall s > 0, \tag{29}$$

on a pour $s > 0$:

$$m(0, s) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} q^{(k)}(u, s) \right\} . (I - g(s)). \tag{30}$$

Démonstration. — La relation (21) entraîne

$$m(z, z ; s) = m(0, s) \qquad \forall z \in Z, \qquad \forall s > 0.$$

On déduit alors de l'identité (18) :

$$m(o, s) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (q^k(s))^\sigma \right\} (o, o) . [I - g(s)] \qquad (s > 0).$$

On vérifie par ailleurs que pour toute matrice $\mathscr{A} \in \mathscr{R}$:

$$(\exp \mathscr{A}^\sigma)(u, u) = \exp (\mathscr{A}^\sigma(u, u)) \qquad (u \in Z).$$

On obtient alors

$$m(o, s) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} q^k(o, u ; s) \right) . (I - g(s)) \qquad (s > 0),$$

et (30) suit en utilisant (24).

3. DUALITÉ

Soit $\{ (J_n, Y_n, X_n) ; n \in N \}$ une chaîne de Markov à espace d'états $J \times R^+ \times Z$ dont les probabilités de transition sont données par

$$Q_{ij}(r, t) = P [J_{n+1} = j, Y_{n+1} \leqslant t, X_{n+1} = r \mid (J_k, Y_k, X_k), k = o, \dots, n ; J_n = i]$$
$$(i, j \in J ; r \in Z ; t \geqslant 0 ; n \in N). \tag{31}$$

Ces processus s'identifient aux processus $(J - Y - X)$ étudiés dans [*4*] pour lesquels les variables X_n sont entières. Nous supposons que la chaîne

$\{ J_n ; n \in N \}$ est irréductible et apériodique (et donc récurrente positive, puisqu'elle est finie), et que pour tout $i \in J$:

$$H_i(0) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r \in Z} Q_{ij}(r, o) = 0 . \tag{32}$$

Nous introduisons les variables suivantes :

$$\begin{aligned}
&U_0 = 0, \quad U_{n+1} = U_n + Y_{n+1} \quad (n \in N),\\
&S_0 = 0, \quad S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \quad (n \in N), \quad S(t) = S_{N(t)} \quad (t \geqslant 0),\\
&W_0 = 0, \quad W_{n+1} = [W_n + X_{n+1}]^+ \quad (n \in N), \quad W(t) = W_{N(t)} \quad (t \geqslant 0),\\
&M_n = \max \{ S_0, \dots, S_n \} \quad (n \in N), \quad M(t) = M_{N(t)} \quad (t \geqslant 0),\\
&J(t) = J_{N(t)} \quad (t \geqslant 0),
\end{aligned} \tag{33}$$

où l'on a adopté la notation $x^+ = \max \{ 0, x \}$. La chaîne $\{ (J_n, Y_n, S_n), n \in N \}$ est alors une chaîne spatialement homogène du type étudié au § 2.2 :

$$\begin{aligned}
P [J_{n+1} = j, Y_{n+1} \leqslant t, S_{n+1} = v \mid (J_k, Y_k, S_k), k = o, \dots, n ; J_n = i, S_n = u]\\
= Q_{ij}(v - u, t) \qquad (i, j \in J ; u, v \in Z ; t \geqslant 0) .
\end{aligned} \tag{34}$$

Nous conserverons de façon systématique les notations introduites aux paragraphes précédents. Définissons de plus les probabilités

$$P_{ij}(r, t) = P [J(t) = j, W(t) = r \mid J_0 = i] \tag{35}$$

dont les transformées de Laplace-Stieltjes seront notées $p_{ij}(r, s)$ $(s > 0)$.

Soit $(\pi_1, \dots, \pi_m)$ l'unique distribution de probabilité stationnaire pour la chaîne $\{ J_n ; n \in N \}$. On peut alors montrer [*4*] qu'au noyau semi-markovien Q défini par (31) est associé un noyau semi-markovien $\tilde{Q}$ appelé noyau dual de Q :

$$\tilde{Q}_{ij}(r, t) = \frac{\pi_j}{\pi_i} Q_{ji}(r, t) \qquad (i, j \in J ; r \in Z ; t \geqslant 0) . \tag{36}$$

On vérifie facilement que le noyau dual satisfait également (32) et que le passage au noyau dual est une opération involutive : $\tilde{\tilde{Q}} = Q$. Nous adoptons pour toutes les quantités relatives au noyau dual $\tilde{Q}$ les mêmes notations que pour les quantités analogues relatives au noyau Q mais surmontées d'un $\tilde{}$. Le théorème suivant a été établi dans [*4*] :

THÉORÈME 4 (théorème de dualité). — $\forall i, j \in J$, $\forall r \in Z$ et $\forall s > 0$, on a :

$$\pi_i [1 - \tilde{h}_i(s)] p_{ij}(r, s) = \pi_j [1 - h_j(s)] \tilde{m}_{ji}(r, s) \tag{37}$$

$$\pi_i [1 - \tilde{h}_i(s)] m_{ij}(r, s) = \pi_j [1 - h_j(s)] \tilde{p}_{ji}(r, s) . \tag{38}$$

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, nous établissons le

LEMME 2. — Si le noyau semi-markovien Q satisfait la condition (25), le noyau dual $\tilde{Q}$ satisfait également cette condition.

Démonstration. — Si $\Pi = (\delta_{ij}\,\pi_i)$, on obtient $\forall z \in Z$, $k \in N$, $s > 0$:

$$\sum_{y=-\infty}^{0} [\tilde{q}(z, s) - \tilde{q}(z - y, s)]\tilde{q}^{(k)}(y, s) = \Pi^{-1}\left\{ \sum_{y=-\infty}^{0} q^{(k)}(y, s)[q(z, s) - q(z - y, s)] \right\}^{t} \Pi \quad (39)$$

et

$$\sum_{y=-\infty}^{0} \tilde{q}^{(k)}(y, s)[\tilde{q}(z, s) - \tilde{q}(z - y, s)] = \Pi^{-1}\left\{ \sum_{y=-\infty}^{0} [q(z, s) - q(z - y, s)]q^{(k)}(y, s) \right\}^{t} \Pi. \quad (40)$$

Les membres de droite de (39) et (40) sont égaux puisque le noyau Q satisfait (25) ; les membres de gauche sont donc également égaux et le noyau $\tilde{Q}$ satisfait aussi (25).

Soient :

$$p(r, s) = (p_{ij}(r, s)), \qquad m(r, s) = (m_{ij}(r, s)), \qquad r \in N, \quad s > 0;$$
$$g(s) = (\delta_{ij}h_i(s)), \qquad s > 0.$$

THÉORÈME 5. — Sous la condition (25) on a pour $s > 0$:

$$m(o, s) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} q^{(k)}(u, s) \right\} [I - g(s)], \quad (41)$$

$$\tilde{m}(o, s) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} \tilde{q}^{(k)}(u, s) \right\} [I - \tilde{g}(s)], \quad (42)$$

$$p(o, s) = m(o, s), \quad (43)$$

$$\tilde{p}(o, s) = \tilde{m}(o, s). \quad (44)$$

Démonstration. — L'identité (41) est connue (théorème 3) ; l'identité (42) suit grâce au lemme 2. Il suffit donc de démontrer les identités (43) et (44). Les matrices diagonales Π et $I - g(s)$ commutant, le théorème de dualité donne la relation

$$p(o, s) = \Pi^{-1}[I - \tilde{g}(s)]^{-1}[\tilde{m}(o, s)]^{t}[I - g(s)]\Pi \qquad (s > 0).$$

Comme on vérifie facilement que

$$[q^{(k)}(u, s)]^t = q^{t(k)}(u, s) \qquad (u \in \mathrm{Z},\ k \in \mathrm{N}_0,\ s > 0),$$

il vient en utilisant (42) :

$$p(o, s) = \Pi^{-1} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} \tilde{q}^{t(k)}(u, s) \right\} [\mathrm{I} - g(s)]\Pi .$$

On peut vérifier que

$$\tilde{q}(u, s) = \Pi^{-1} q^t(u, s)\Pi \Rightarrow \tilde{q}^{t(k)}(u, s) = \Pi q^{(k)}(u, s)\Pi^{-1} \qquad (u \in \mathrm{Z},\ k \in \mathrm{N}_0,\ s > 0).$$

On obtient alors

$$p(o, s) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} q^{(k)}(u, s) \right\} [\mathrm{I} - g(s)] \qquad (s > 0),$$

c'est-à-dire (43). L'identité analogue pour le noyau dual, (44), s'établit de la même façon.

4. IDENTITÉS DU TYPE BAXTER-SPITZER

Nous considérons un processus (J – Y – X) à variables X_n discrètes dont les probabilités de transition sont données par (31). Nous supposons que la chaîne de Markov $\{ \mathrm{J}_n \}$ est irréductible et apériodique et que la condition (32) est satisfaite. Nous conservons les notations utilisées au § 3.

4.1. Temps de premier retour à l'origine du processus $\{ \mathrm{W}(t) ; t \geqslant 0 \}$.

Soient

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \inf \{ n > 0 : \mathrm{W}_n = 0 \} = \inf \{ n > 0 : \mathrm{S}_n \leqslant 0 \}, \\ \mathrm{R}_{ij}(t) &= \mathrm{P}[\mathrm{J_R} = j,\ \mathrm{U_R} \leqslant t \mid \mathrm{J}_0 = i] \qquad (i, j \in \mathrm{J} ;\ t \geqslant 0), \\ r_{ij}(s) &= \int_{0-}^{\infty} e^{-st} d_t \mathrm{R}_{ij}(t) \qquad (i, j \in \mathrm{J} ;\ s > 0), \\ r(s) &= (r_{ij}(s)) \qquad (s > 0). \end{aligned}$$

THÉORÈME 6. — Sous la condition (25), on a $\forall s > 0$:

$$\mathrm{I} - r(s) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} q^{(k)}(u, s) \right\}. \tag{45}$$

Démonstration. — On établit facilement les équations

$$P_{ij}(o, t) = \delta_{ij}[1 - H_i(t)] + \sum_{k=1}^{m} \int_{0-}^{t} P_{kj}(o, t-u) d_u R_{ik}(u), \tag{46}$$

ou, en termes de transformées de Laplace-Stieltjes :

$$p(o, s) = I - g(s) + r(s)p(o, s) \qquad (s > 0). \tag{47}$$

Il résulte de (32) que la matrice $I - g(s)$ est régulière pour $s > 0$; les matrices $I - r(s)$ et $p(o, s)$ le sont donc également et (47) peut s'écrire sous la forme :

$$I - r(s) = [I - g(s)]p(o, s)^{-1} \qquad (s > 0).$$

(45) suit en utilisant le théorème 5.

4.2. **Cas particulier : promenades aléatoires définies sur une chaîne de Markov.**

Si les variables aléatoires Y_n sont dégénérées : $P[Y_n = 1] = 1$ $(\forall n \in N_0)$, la chaîne $\{(J_n, S_n);\ n \in N\}$ s'identifie à une promenade aléatoire définie sur une chaîne de Markov finie de noyau

$$Q_{ij}(r) = Q_{ij}(r, \infty) = P[J_{n+1} = j, X_{n+1} = r \mid J_n = i] \tag{48}$$

(voir [*3*] [*5*] [*6*]). Soit

$$Q^{(0)}(r) = \delta_{0r} I$$

et définissons récursivement pour $n \in N_0$

$$Q^{(n)}(r) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} Q^{(n-1)}(u) Q(r-u) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} Q(u) Q^{(n-1)}(r-u) \qquad (r \in Z).$$

L'interprétation de ces matrices est évidente :

$$Q_{ij}^{(n)}(r) = P[J_n = j, S_n = r \mid J_0 = i].$$

La variable R définie ci-dessus étant maintenant discrète, posons

$$\overline{R}_{ij}(k) = P[J_R = j, R = k \mid J_0 = i],$$

$$\overline{r}_{ij}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{R}_{ij}(k) z^k, \qquad \overline{r}(z) = (\overline{r}_{ij}(z)) \qquad (|z| \leqslant 1).$$

Comme on vérifie facilement que

$$q_{ij}^{(k)}(u, s) = e^{-sk} Q_{ij}^{(k)}(u) \qquad (i, j \in J\,;\ k \in N\,;\ u \in Z\,;\ s > 0),$$

le théorème 6 donne pour $z = e^{-s}$ $(s > 0)$ le

THÉORÈME 7. — Si $\forall r \in Z$ et $\forall k \in N$, on a

$$\sum_{u=-\infty}^{0} [Q(r) - Q(r-u)] Q^{(k)}(u) = \sum_{u=-\infty}^{0} Q^{(k)}(u) [Q(r) - Q(r-u)], \quad (49)$$

alors pour $|z| < 1$, on a :

$$I - \overline{r}(z) = \exp\left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} Q^{(k)}(u) \right\}. \quad (50)$$

Si $m = 1$, on retrouve les promenades aléatoires classiques à espace d'états discret (Z). La condition (49) est alors toujours satisfaite et (50) se réduit à la formule bien connue (voir [*2*], chapitre XVIII) :

$$1 - \overline{r}(z) = \exp\left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} P[S_k \leqslant 0] \right\} \qquad (|z| < 1). \quad (51)$$

4.3. **Temps de récurrence du processus** $\{ (J(t), W(t))\,;\ t \geqslant 0 \}$.

Soit

$$T_i = \inf \{ n > 0 : W_n = 0, J_n = i \} \qquad (i \in J),$$

et définissons

$$F_i(t) = P[U_{T_i} \leqslant t \mid J_0 = i] \qquad (i \in J,\ t \geqslant 0),$$

$$f_i(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} d_t F_i(t) \qquad (i \in J,\ s > 0).$$

Pour $A \in R^{m \times m}$, nous noterons

$$\exp_{ii} A = (\exp A)_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A^n)_{ii}.$$

THÉORÈME 8. — Sous la condition (25) on a pour $s > 0$ et $i \in J$:

$$1 - f_i(s) = \left[\exp_{ii} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} q^{(k)}(u, s) \right) \right]^{-1}. \quad (52)$$

Démonstration. — On obtient facilement les relations

$$\mathrm{P}_{ii}(0, t) = 1 - \mathrm{H}_i(t) + \int_{0^-}^{t} \mathrm{P}_{ii}(0, t - u)d_u\mathrm{F}_i(u) \qquad (i \in \mathrm{J},\ t \geqslant 0)$$

et, par passage aux transformées de Laplace-Stieltjes :

$$[1 - f_i(s)]p_{ii}(0, s) = 1 - h_i(s) \qquad (i \in \mathrm{J},\ s > 0). \tag{53}$$

Comme $g(s) = (\delta_{ij}h_i(s))$, le théorème 5 donne

$$p_{ii}(0, s) = \exp_{ii}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{u=-\infty}^{0} q^{(k)}(u, s)\right\}.\ [1 - h_i(s)].$$

L'introduction de cette relation dans (53) permet d'écrire (52).

Pour $m = 1$, les identités (45) et (52) s'identifient à l'identité obtenue par Chéong et Teugels ([*1*], théorème 2.1).

REFERENCES

[*1*] C. K. CHEONG et J. L. TEUGELS, On a semi-Markov generalization of the Random Walk. *Stoch. Proc. and their Appl.*, t. **1**, 1973, p. 53-66.

[*2*] W. FELLER, *An introduction to Probability Theory and its Applications*, t. **2**, 1971, Wiley, New York.

[*3*] J. JANSSEN, Les Processus (J-X). *Cahiers du C. E. R. O.*, t. **11**, 1969, p. 181-214.

J. JANSSEN, Sur une généralisation du concept de promenade aléatoire sur la droite réelle. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **A6**, 1970, p. 249-269.

J. JANSSEN, Some duality results in semi-Markov chain theory. *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, t. **21**, 1976, p. 429-441.

[*4*] J. JANSSEN et J. M. REINHARD, *Duality results for a class of multivariate semi-Markov processes* (à paraître dans *J. Appl. Prob.*, mars 1982).

[*5*] H. D. MILLER, A matrix factorization problem in the theory of random variables defined on a semi-Markov chain, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, t. **58**, 1962, p. 286-298.

[*6*] M. NEWBOULD, A classification of a random walk defined on a finite Markov chain. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **26**, 1973, p. 95-104.

[*7*] R. PYKE, Markov renewal processes: definitions and preliminary properties. *Ann. Math. Stat.*, t. **32**, 1961, p. 1231-1242;

R. PYKE, Markov renewal processes with finitely many states. *Ann. Math. Stat.*, t. **32**, 1961, p. 1243-1259.

[*8*] L. D. STONE, On the distribution of the maximum of a semi-Markov process. *Ann. Math. Stat.*, . t. **39**, 1968, p. 947-956.

(Manuscrit reçu le 17 novembre 1981)