

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CAMILLE DUBY

ALAIN ROUAULT

**Estimation non paramétrique de l'espérance  
et de la variance de la loi de reproduction d'un  
processus de ramification**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 18, n° 2 (1982), p. 149-163

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1982\\_\\_18\\_2\\_149\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_2_149_0)

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Estimation non paramétrique de l'espérance et de la variance de la loi de reproduction d'un processus de ramification**

par

**Camille DUBY**

Laboratoire de Biométrie, I. N. R. A., 78000 Versailles

et

**Alain ROUAULT**

Mathématiques, Bât. 425, E. R. A.-C. N. R. S. 532,  
Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex

---

**RÉSUMÉ.** — On étudie l'estimation conjointe de la moyenne  $m$  et de la variance  $\sigma^2$  de la loi de reproduction d'un processus de Galton-Watson dans le cas  $m > 1$ ,  $p_0 = 0$ , quand les observations sont les tailles successives des générations,  $Z_0 = z, Z_1, \dots, Z_n$ . Quand  $n$  et  $z$  tendent vers l'infini, on approche la log-vraisemblance. Le problème devient paramétrique. On montre la normalité asymptotique et l'optimalité du couple  $(\hat{m}, \hat{\sigma}^2)$  ainsi déduit.

**SUMMARY.** — The estimations of the mean  $m$  and variance  $\sigma^2$  of the offspring distribution of a Galton-Watson process are studied jointly in the case  $m > 1$ ,  $p_0 = 0$ . Observations are sizes of generations,  $Z_0 = z, Z_1, \dots, Z_n$ . For  $z$  and  $n \rightarrow \infty$  the log-likelihood is approximated. The problem becomes a parametric one and it is shown that the pair  $(\hat{m}, \hat{\sigma}^2)$  is asymptotically normal and optimal.

---

## 1. INTRODUCTION

On étudie, pour les processus de Galton-Watson, l'estimation de l'espérance  $m$  et de la variance  $\sigma^2$  du nombre  $Y$  de descendants d'un individu dans le cas où  $m = EY > 1$ ,  $p_0 = P(Y = 0) = 0$  et où l'échantillon est constitué des tailles des générations successives  $Z_0 = z, Z_1, \dots, Z_n$ .

En présentant les résultats connus sur ces estimations, Dion et Keiding [5] examinent deux passages à la limite : en  $n$  et/ou en  $z$ . L'estimateur de Harris

$\hat{m} = \sum_{k=1}^n Z_k / \sum_{k=1}^n Z_{k-1}$  maximise la vraisemblance dans le modèle complète-

ment général, indexé par  $\{p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}, \sum p_k = 1\}$ , ou encore dans le modèle « conditionnellement exponentiel » à un paramètre. A  $z$  fixé et  $n \rightarrow \infty$ , il est consistant et asymptotiquement normal, mais avec une normalisation aléatoire. Dans le modèle paramétrique cité, il est optimal (Heyde [9]). Si  $z$  et  $n \rightarrow \infty$ ,  $\hat{m}$  est consistant et asymptotiquement normal, avec normalisation déterministe. Il existe des modèles paramétriques pour lesquels  $\hat{m}$  n'est pas l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Vu la propriété  $Z_{n+1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_1^{Z_n} \xi_{j,n}$  (où les  $\xi_{j,n}$  sont des v. a. indépendantes, de même loi, la loi de reproduction), un estimateur naturel de la variance à  $m$  inconnu est  $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{k=1}^n (Z_k - \hat{m}Z_{k-1})^2 (Z_{k-1})^{-1}$ . On sait qu'il est convergent et asymptotiquement normal à  $z$  fixé quand  $n \rightarrow \infty$ .

On a cherché ici à aborder l'estimation de  $m$  et  $\sigma^2$  conjointement, sans modèle paramétrique souvent difficile à justifier dans les applications.

On part de l'écriture

$$(1.1) \quad Z_{n+1} = mZ_n + \sigma\sqrt{Z_n}\varepsilon_{n+1}$$

La normalité asymptotique des  $\varepsilon_n$  (Heyde-Brown [11]) suggère d'approcher la log-vraisemblance  $L$  de l'échantillon par

$$(1.2) \quad \hat{L} = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \log Z_{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Z_k - mZ_{k-1})^2 \sigma^{-2} (Z_{k-1})^{-1}$$

$m$  et  $\sigma^2$  sont les seuls paramètres qui subsistent et il se trouve que  $\hat{L}$  est maximisé par  $\hat{m}$  et  $\hat{\sigma}^2$ . Ces deux estimateurs ont des vitesses de convergence très différentes (l'une en  $\sqrt{m^n z}$ , l'autre en  $\sqrt{n}$ ) ce qui rend difficile une étude conjointe. C'est à l'aide de  $\hat{L}$  qu'on a pu étudier leurs propriétés asymptotiques, normalité et efficacité. Ceci exige une évaluation assez fine de  $L - \hat{L}$ . Si seul  $n \rightarrow \infty$  l'approximation est trop grossière pour pouvoir déduire les propriétés habituelles des estimateurs du maximum de vraisemblance. Il est nécessaire d'avoir à la fois  $n$  et  $z \rightarrow \infty$ , ce qui signifie que l'information utile du processus est contenue dans ses générations éloignées, information s'exprimant à travers les seuls paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ . Le cas où seul  $z \rightarrow \infty$  donne une bonne approximation mais  $\hat{\sigma}^2$  ne converge plus.

Après avoir défini les notations dans la 2<sup>e</sup> partie, on étudie dans la 3<sup>e</sup> partie l'approximation de la vraisemblance  $\hat{L}$  et l'évaluation du reste  $L - \hat{L}$ . Dans la 4<sup>e</sup> partie, à l'aide de  $\hat{L}$  on montre la normalité (et l'indépendance) asymptotique du couple  $(\hat{m}, \hat{\sigma}^2)$  et dans la 5<sup>e</sup> partie son efficacité asymptotique au sens de Weiss et Wolfowitz.

Ces résultats ont été annoncés dans [6].

## 2. NOTATIONS

Soit  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ,  $b = (b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  deux suites de nombres positifs non tous nuls telles que

$$(2.1) \quad \forall k \ a_k \leq b_k \sum_1^\infty k^4 b_k < \infty \sum_1^x k a_k > 1$$

$$(2.2) \quad \text{PGCD} \{ k \mid a_k \neq 0 \} = 1$$

$$(2.3) \quad \mathcal{P} = \left\{ p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \mid \forall k \ a_k \leq p_k \leq b_k, \sum_1^\infty p_k = 1 \right\} \neq \emptyset$$

Notons pour  $p \in \mathcal{P}$  :

$$(2.4) \quad m = \sum_1^\infty k p_k, \quad \sigma^2 = \sum_1^\infty (k - m)^2 p_k$$

$$\theta = (m, \sigma^2), \quad \mu^3 = \sum_1^\infty |k - m|^3 p_k$$

$$\Omega = \prod_{i,j=1}^x \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{F} = \bigotimes_{i,j=1}^x \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \quad P = \bigotimes_{i,j=1}^x p$$

$Y(i, j)$  la  $(i, j)$ <sup>ième</sup> coordonnée et pour tout  $i$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} Z_0^i &= 1, & Z_1^i &= Y(i, 1), & Z_2^i &= Y(i, 2) + \dots + Y(i, 1 + Z_1^i), \dots \\ Z_n^i &= Y(i, 2 + Z_1^i + \dots + Z_{n-2}^i) + \dots + Y(i, 1 + Z_1^i + \dots + Z_{n-1}^i) \\ Z_{k,z} &= \sum_{i=1}^z Z_k^i, & \mathcal{F}_n^i &= \sigma(Z_k^i, 0 \leq k \leq n), & \mathcal{F}_{n,z} &= \sigma(\mathcal{F}_n^i, 1 \leq i \leq z). \end{aligned}$$

On pose aussi :

$$(2.6) \quad \varepsilon_{n,z} = (Z_{n,z} - mZ_{n-1,z})\sigma^{-1}(Z_{n-1,z})^{-1}$$

Dans ces conditions, le processus  $(Z_{n,z})_{n \in \mathbb{N}}$  est un processus de Galton-Watson avec  $z$  ancêtres de loi de reproduction  $p$ , supercritique, avec explosion presque sûre. De plus pour  $p \in \mathcal{P}$ ,  $m, \sigma^2, \mu_3$  sont uniformément majorés et minorés.

### 3. APPROXIMATION DE LA VRAISEMBLANCE

Le processus étant markovien, la log-vraisemblance de l'échantillon est

$$(3.1) \quad L_{n,z} = \sum_{k=1}^n \log P(Z_{k,z} | Z_{k-1,z})$$

En utilisant la loi limite des  $\varepsilon$  (cf. [11]), on l'approche par

$$(3.2) \quad \hat{L}_{n,z} = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \log Z_{k-1,z} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{k,z})^2$$

et on pose :

$$(3.3) \quad h_{n,z} = L_{n,z} - \hat{L}_{n,z}$$

**PROPOSITION 1.** — Pour toute  $g$  telle que  $g(z) \rightarrow +\infty$  quand  $z \rightarrow \infty$ ,  $h_{n,z}$  est un  $o_P(g(z)z^{-\frac{1}{2}})$  quand  $n, z \rightarrow \infty$  et ceci uniformément dans  $\mathcal{P}$ .

On a

$$(3.4) \quad h_{n,z} = \sum_{k=1}^n \log \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Delta_{k,z} \exp \frac{1}{2} (\varepsilon_{k,z})^2 \right]$$

où

$$(3.5) \quad \Delta_{k,z} = 2\pi\sigma(Z_{k-1,z})^{\frac{1}{2}} \left[ P(Z_{k,z} | Z_{k-1,z}) - \sigma^{-1}(2\pi Z_{k-1,z})^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}(\varepsilon_{k,z})^2 \right]$$

Pour évaluer  $h_{n,z}$  on contrôle  $\Delta_{k,z}$  en adaptant un théorème limite local (Petrov [15]) pour obtenir une majoration uniforme dans  $\mathcal{P}$ .

PROPOSITION 2. — Il existe A positif, tel que pour tout  $p$  de  $\mathcal{P}$  et  $a, b, k, z$  de  $\mathbb{N}^*$

$$(3.6) \quad \left| P(Z_{k,z} = b | Z_{k-1,z} = a) - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(b - ma)^2}{a\sigma^2}\right) \right| \leq \frac{A}{a}$$

Admettons-la pour l'instant.

Démonstration de la proposition 1. — Compte tenu de (3.6), il suffit de montrer le même résultat sur

$$(3.7) \quad \tilde{h}_{n,z} = \sum_{k=1}^n (Z_{k-1,z})^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{2}(\varepsilon_{k,z})^2$$

On utilise alors une méthode du genre « logarithme itéré ». Pour  $\delta > 0$  fixé on pose

$$(3.8) \quad A_{k,z} = \{ |\varepsilon_{k,z}| > \sqrt{2(1 + \delta) \log \lambda_{k,z}} \} \quad \text{et} \quad R_{n,z} = \bigcup_{k=1}^n A_{k,z}$$

où  $\lambda_{k,z}$  sera fixé plus tard. On a alors pour tout  $\varepsilon > 0$

$$(3.9) \quad P(\tilde{h}_{n,z} > \varepsilon g(z)z^{-\frac{1}{2}}) \leq P(\{ \tilde{h}_{n,z} > \varepsilon g(z)z^{-\frac{1}{2}} \} \cap \bar{R}_{n,z}) + P(R_{n,z})$$

Appliquant le résultat de Heyde [10] sur la borne de Berry-Esséen on a

$$(3.10) \quad P(R_{n,z}) \leq \sum_{k=1}^n 2\phi(-\sqrt{2(1 + \delta) \log \lambda_{k,z}}) + C\mu_3\sigma^{-3}E(Z_{k-1,z})^{-\frac{1}{2}}$$

avec  $\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq (|x| \sqrt{2\pi})^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x < 0.$

En remarquant que :

$$\gamma = \sum_1^{\infty} k^{-1} p_k \leq 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) a_k = \gamma_0$$

la formule 4 du théorème 2 de [11] devient

$$(3.11) \quad \mathbb{E}(Z_{k-1,z})^{-\frac{1}{2}} \leq \gamma_0^{\frac{k-1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}$$

Choisissant  $\lambda_{k,z} = k + f(z)$  avec  $f(z) \rightarrow \infty$  on écrit

$$(3.12) \quad \mathbb{P}(\mathbf{R}_{n,z}) \leq [4\pi\delta^2(1+\delta)]^{-\frac{1}{2}} f(z)^{-\delta} [\log f(z)]^{-\frac{1}{2}} + C\mu_3\sigma^{-3}(1-\sqrt{\gamma_0})^{-1} z^{-\frac{1}{2}}$$

et donc quand  $n, z \rightarrow \infty$ ,  $\mathbb{P}(\mathbf{R}_{n,z}) \rightarrow 0$  uniformément dans  $\mathcal{P}$ .

De plus

$$(3.13) \quad \mathbb{P}(\{\tilde{h}_{n,z} > \varepsilon g(z)z^{-\frac{1}{2}}\} \cap \bar{\mathbf{R}}_{n,z}) \leq \sigma z^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{-1} g(z)^{-1} \sum_{k=1}^n [k + f(z)]^{1+\delta} \mathbb{E}(Z_{k-1,z})^{-\frac{1}{2}} \\ \leq 2^\delta \sigma \varepsilon^{-1} g(z)^{-1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{1+\delta} \gamma_0^{\frac{k-1}{2}} \right) (1 + f(z)^{1+\delta})$$

si on choisit  $\delta$  et  $f$  tels que  $f(z)^{1+\delta} g(z)^{-1} \rightarrow 0$ , on obtient le résultat.

**COROLLAIRE 1.** — Soient  $c_1, c_2 > 0$  et  $m'_{n,z}, \sigma'_{n,z}$  vérifiant

$$(3.14) \quad |m'_{n,z} - m| \leq c_1 \sqrt{\frac{m-1}{(m^n-1)z}}, \quad |\sigma'_{n,z}{}^2 - \sigma^2| \leq c_2 \sqrt{\frac{2\sigma^4}{n}}$$

alors  $h'_{n,z}$  obtenu en remplaçant  $m$  et  $\sigma^2$  par  $m'_{n,z}$  et  $\sigma'_{n,z}{}^2$  dans  $h_{n,z}$  est encore un  $o_{\mathbb{P}}(g(z)z^{-\frac{1}{2}})$ .

*Démonstration.* — Soit  $\mathbf{B}_{k,z}$  obtenu en remplaçant  $m$  et  $\sigma^2$  dans  $\mathbf{A}_{k,z}$  et

$$(3.15) \quad \mathbf{C}_{k,z} = \left\{ |\varepsilon_{k,z}| > \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \sigma'_{n,z} \sqrt{2 \log \lambda_{k,z}} \right\} \\ \mathbf{D}_{k,z} = \left\{ |m'_{n,z} - m| (Z_{k-1,z})^{\frac{1}{2}} > \frac{\delta}{2} \sigma'_{n,z} \sqrt{2 \log \lambda_{k,z}} \right\}$$

On raisonne sur  $\mathbf{C}_{k,z}$  comme précédemment. De plus

$$\mathbb{P}(\mathbf{D}_{k,z}) \leq \frac{c_1^2(m-1)m^{k-1}}{2\sigma'_{n,z}{}^2(m^n-1)\log f(z)\delta^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\mathbf{D}_{k,z}) \leq \frac{c_1^2(m-1)}{2\delta^2\sigma'_{n,z}{}^2\log f(z)}.$$

Ce corollaire sera utile dans la 5<sup>e</sup> partie.

*Démonstration de la proposition 2.* — Soit  $\varphi$  la fonction caractéristique de  $p$  et

$$\psi_a(t) = \exp\left(-\frac{it ma}{\sigma\sqrt{a}}\right) \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{a}}\right)\right]^a.$$

On a  $|\Delta_{k,z}| \leq J_1 + J_2 + J_3$  où

$$J_1 = \int_{|t| \leq \frac{\sigma^3\sqrt{a}}{4\mu_3}} |\psi_a(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| dt$$

$$J_2 = \int_{\frac{\sigma^3\sqrt{a}}{4\mu_3} \leq |t| \leq \pi\sigma\sqrt{a}} |\psi_a(t)| dt \quad \text{et} \quad J_3 = \int_{|t| > \frac{\sigma^3\sqrt{a}}{4\mu_3}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Or Petrov [15] a montré que :

$$(3.16) \quad J_1 \leq \frac{16\mu_3}{\sigma^3\sqrt{a}} \int |t|^3 e^{-\frac{t^2}{3}} dt \quad \text{et} \quad J_3 \leq \frac{8\mu_3}{\sigma^3\sqrt{a}}$$

qui donnent des majorations uniformes dans  $\mathcal{P}$ . De plus

$$J_2 = \sigma\sqrt{a} \int_{\frac{\sigma^2}{4\mu_3} < |t| < \pi} |\varphi(t)|^a dt.$$

Mais

$$|\varphi(t)|^2 = 1 - 2 \sum_{k \neq j} p_j p_k \left(\sin \frac{(k-j)t}{2}\right)^2 \leq 1 - 2 \sum_{k \neq j} a_j a_k \left(\sin \frac{(k-j)t}{2}\right)^2$$

$$\leq 1 - s^2(1 - |\varphi_0(t)|^2)$$

où on a posé  $s = \Sigma a_k$  et  $\varphi_0(t) = \Sigma \frac{a_k}{s} e^{ikt}$ .

Or (2.2) entraîne que pour  $t \neq 0 \pmod{2\pi}$   $|\varphi_0(t)| < 1$ . Donc si on pose

$$0 < r_0 = \inf_{p \in \mathcal{P}} \frac{\sigma^2}{4\mu_3} \quad \text{et} \quad 0 < K = \min_{r_0 \leq t \leq \pi} -2 \log [1 - s^2(1 - |\varphi_0(t)|^2)]$$

on a

$$J_2 \leq 2\pi\sigma\sqrt{a}e^{-Ka}$$

ce qui conduit au résultat annoncé.



#### 4. ESTIMATEURS ISSUS DE $\hat{L}$ : CONSISTANCE ET NORMALITÉ CONJOINTE

On a d'après la formule (3.2)

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}_{n,z}}{\partial m} &= \sigma^{-2} \sum_{k=1}^n (Z_{k,z} - mZ_{k-1,z}) \\ \frac{\partial \hat{L}_{n,z}}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{k=1}^n (Z_{k,z} - mZ_{k-1,z})^2 (Z_{k-1,z})^{-1} \end{aligned}$$

En annulant on retrouve les estimateurs cités dans l'introduction :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \hat{m}_{n,z} &= \left( \sum_{k=1}^n Z_{k,z} \right) \left( \sum_{k=1}^n Z_{k-1,z} \right)^{-1} \\ \hat{\sigma}_{n,z}^2 &= n^{-1} \sum_{k=1}^n (Z_{k,z} - \hat{m}_{n,z} Z_{k-1,z})^2 (Z_{k-1,z})^{-1} \end{aligned}$$

On notera aussi

$$\tilde{\sigma}_{n,z}^2 = n^{-1} \sum_{k=1}^n (Z_{k,z} - mZ_{k-1,z})^2 (Z_{k-1,z})^{-1}$$

qui estime  $\sigma^2$  sans biais à  $m$  connu.

##### 4.1. Consistance.

On sait que  $\hat{m}_{n,z} \xrightarrow{P} m$  quand  $n, z \rightarrow \infty$  ([18]). On a besoin de montrer le même type de convergence pour  $\hat{\sigma}_{n,z}^2$ .

**PROPOSITION 3.**

$$(4.3) \quad \hat{\sigma}_{n,z}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 \quad \text{quand} \quad n, z \rightarrow \infty$$

*Démonstration.* — On sait que le résultat est vrai à  $z$  fixé ([4])

$$(4.4) \quad \tilde{\sigma}_{n,z}^2 - \hat{\sigma}_{n,z}^2 = n^{-1} \left( \sum_{k=1}^n Z_{k-1,z} \right) (\hat{m}_{n,z} - m)^2$$

$$\text{et} \quad (\hat{m}_{n,z} - m)^2 = \left( \sum_{k=1}^n Z_{k-1,z} \right)^{-2} \left[ \sum_{i,j} (Y(i,j) - m) \right]^2$$

où la sommation s'effectue pour  $1 \leq j \leq 1 + Z_1^i + \dots + Z_{n-1}^i$  et  $1 \leq i \leq z$ .

Or ([18])

$$(4.5) \quad \frac{m-1}{(m^n-1)z} \sum_{k=1}^n Z_{k-1,z} \xrightarrow{P} 1 \quad n, z \rightarrow \infty$$

et  $E \left[ \sum_{i,j} (Y(i,j) - m) \right]^2 = \sigma^2 \frac{m^n - 1}{(m-1)z}$  entraînent

$$(4.6) \quad \tilde{\sigma}_{n,z}^2 - \hat{\sigma}_{n,z}^2 = O_P(n^{-1}) \quad n, z \rightarrow \infty$$

Mais ([4])

$$\text{Var } \tilde{\sigma}_{n,z}^2 = n^{-1} \left[ 2\sigma^4 + n^{-1} [E(Y-m)^4 - 3\sigma^4] \left( \sum_{k=0}^n E(Z_{k,z})^{-1} \right) \right]$$

c'est-à-dire que quand  $n$  et  $z \rightarrow \infty$

$$\text{Var } \tilde{\sigma}_{n,z}^2 = O(n^{-1}), \quad \tilde{\sigma}_{n,z}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 \quad \text{et donc} \quad \hat{\sigma}_{n,z}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

#### 4.2. Normalité asymptotique de $\hat{\theta}_{n,z} = (\hat{m}_{n,z}, \hat{\sigma}_{n,z}^2)$ .

(4.1) s'écrit :

$$(4.7) \quad \frac{\partial \hat{L}_{n,z}}{\partial m} = \sigma^{-2} \left( \sum_{k=1}^n Z_{k-1,z} \right) (\hat{m}_{n,z} - m) \quad \frac{\partial \hat{L}_{n,z}}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^4} (\tilde{\sigma}_{n,z}^2 - \sigma^2)$$

A  $z$  fixé, le processus  $\left( \frac{\partial \hat{L}_{n,z}}{\partial m}, \frac{\partial \hat{L}_{n,z}}{\partial \sigma^2} \right)$  est une martingale par rapport aux  $\mathcal{F}_{n,z}$ . Les théorèmes centraux limites de Scott [16] et Brown [1] rendent bien compte de la normalité asymptotique des marginales à  $z$  fixé mais les normalisations très différentes ( $\sqrt{m^n z}$  et  $\sqrt{n}$ ) rendent difficile une étude conjointe par le même type de méthodes.

On va plutôt utiliser  $\hat{L}$ .

PROPOSITION 4. — Si on pose  $M_{n,z} = \sigma^{-1} \left[ \frac{(m^n - 1)}{m - 1} z \right]^{\frac{1}{2}} (\hat{m}_{n,z} - m)$  et  $S_{n,z} = \left( \frac{n}{2\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} (\tilde{\sigma}_{n,z}^2 - \sigma^2)$  alors

$$(4.8) \quad (M_{n,z}, S_{n,z}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I_2) \quad \text{quand} \quad n, z \rightarrow \infty$$

*Démonstration.* — On sait déjà (Yanev [18]) que  $M_{n,z} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $n, z \rightarrow \infty$ . On va montrer que pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathbb{R}^-$  fixés :

$$(4.9) \quad \Phi_{n,z}(t, u) = E \exp(it M_{n,z} + u S_{n,z}) \rightarrow \exp \frac{u^2 - t^2}{2}$$

Pour cela, on construit un nouveau processus de ramification dont la loi de reproduction a même espérance  $m$  que celui qu'on étudie et dont la variance est  $\sigma^{*2} = \sigma^2 \left(1 - \frac{2u}{\sqrt{2n}}\right)^{-1} < \sigma^2$ . Par exemple, soit  $k \geq 1$  tel que  $p_k p_{k+2} \neq 0$  (possible car  $p \in \mathcal{P}$ ), on définit

$$(4.10) \quad \begin{aligned} q_i &= p_i & \text{si } i &\neq k, k+1, k+2 \\ q_k &= p_k - \frac{1}{2}(\sigma^2 - \sigma^{*2}) & q_{k+1} &= p_{k+1} + (\sigma^2 - \sigma^{*2}) \\ q_{k+2} &= p_{k+2} - \frac{1}{2}(\sigma^2 - \sigma^{*2}). \end{aligned}$$

Pour  $n$  assez grand,  $q \in \mathcal{P}$ . Soit  $P^* = \bigotimes_{i,j=1}^{\infty} q$  (cf. § 2) et  $h_{n,z}^*$  le reste de la vraisemblance approchée du processus correspondant, et enfin  $H_{n,z} = h_{n,z} - h_{n,z}^*$

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \Phi_{n,z}(t, u) &= E^* \left[ \exp(it M_{n,z} + u S_{n,z}) \frac{P}{P^*}(Z_{0,z}, Z_{1,z}, \dots, Z_{n,z}) \right] \\ P(Z_{0,z}, \dots, Z_{n-1,z}) &= (\sigma \sqrt{2\pi})^{-n} (Z_{0,z} \dots Z_{n-1,z})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} n \frac{\tilde{\sigma}_{n,z}^2}{\sigma^2} + h_{n,z}\right) \\ P^*(Z_{0,z}, \dots, Z_{n-1,z}) &= (\sigma^* \sqrt{2\pi})^{-n} (Z_{0,z} \dots Z_{n-1,z})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} n \frac{\tilde{\sigma}_{n,z}^2}{\sigma^{*2}} + h_{n,z}^*\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi_{n,z}(t, u) = V_n E^* \exp(it M_{n,z} + H_{n,z})$$

où on a posé  $V_n = \left(1 - \frac{2u}{\sqrt{2n}}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp - u \sqrt{\frac{n}{2}}$  qui tend vers  $e^{\frac{u^2}{2}}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Si  $E_1 = E^*[\exp(it M_{n,z} + H_{n,z})]$  on a

$$(4.12) \quad |E_1 - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leq |E^*(\exp it M_{n,z}) - e^{-\frac{t^2}{2}}| + |E^*(\exp H_{n,z}) - 1|$$

Mais pour  $\alpha > 0$ , on peut écrire

$$(4.13) \quad E^* |1 - \exp H_{n,z}| \leq e^\alpha - 1 + E^*[(\exp H_{n,z}) 1_{|H_{n,z}| > \alpha}] + P^*(|H_{n,z}| > \alpha)$$

et

$$(4.14) \quad \begin{aligned} E^*[(\exp H_{n,z}) 1_{|H_{n,z}| > \alpha}] &\leq \left( E^* \left[ (\exp 2H_{n,z}) \frac{P^*}{P}(Z_{0,z}, \dots, Z_{n,z}) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( E^* \left[ 1_{|H_{n,z}| > \alpha} \frac{P}{P^*}(Z_{0,z}, \dots, Z_{n,z}) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \leq V_n^{-1} (E(\exp 2u S_{n,z}))^{\frac{1}{2}} P(|H_{n,z}| > \alpha)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'après [8],  $S_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . La démonstration s'adapte très facilement au cas  $S_{n,z}$ ,  $n, z \rightarrow \infty$ , donc  $(E(\exp 2uS_{n,z}))^{\frac{1}{2}} \rightarrow e^{u^2}$  quand  $n, z \rightarrow \infty$ . De plus pour tout  $\alpha$ ,  $P(|H_{n,z}| > \alpha)$  et  $P^*(|H_{n,z}| > \alpha)$  tendent vers 0 (cf. § 3), d'où

$$(4.15) \quad \overline{\lim}_{n,z} |E_1 - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leq \overline{\lim}_{n,z} |E^*(\exp it M_{n,z}) - e^{-\frac{t^2}{2}}|$$

ce qui, en utilisant [18] qui reste vrai sous  $P^*$  permet de conclure.

**COROLLAIRE 2.** — Si on remplace  $m$  par  $\hat{m}_{n,z}$  dans  $S_{n,z}$ , le résultat précédent reste vrai.

*Démonstration.* — Ceci résulte de  $(\tilde{\sigma}_{n,z}^2 - \hat{\sigma}_{n,z}^2) = O_P(n^{-1})$ ,  $n, z \rightarrow \infty$  (prop. 3).

## 5. EFFICACITÉ ASYMPTOTIQUE DE $\hat{\theta}_{n,z}$

Dans les processus stochastiques dépendant d'un seul paramètre (fonction de  $m$  pour un Galton-Watson), à vraisemblance assez régulière, Heyde [9] a montré l'existence d'un estimateur du maximum de vraisemblance et étudié ses propriétés d'efficacité. On utilisera ici les mêmes outils mais pour la vraisemblance approchée  $\hat{L}$  et pour le paramètre  $\theta = (m, \sigma^2)$ . Posons :

$$u_{k,z}^1 = \frac{\partial \hat{L}_{k,z}}{\partial m} - \frac{\partial \hat{L}_{k-1,z}}{\partial m}, \quad u_{k,z}^2 = \frac{\partial \hat{L}_{k,z}}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial \hat{L}_{k-1,z}}{\partial \sigma^2}$$

$$K_{k,z}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{k,z}^1}{\partial m} & \frac{\partial u_{k,z}^1}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial u_{k,z}^2}{\partial m} & \frac{\partial u_{k,z}^2}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix}$$

$$(5.1) \quad J_{n,z}(\theta) = \sum_{k=1}^n K_{k,z}(\theta)$$

$$(5.2) \quad I_{n,z}(\theta) = - \sum_{k=1}^n E[K_{k,z}(\theta) | \mathcal{F}_{k-1,z}] = \begin{pmatrix} \sigma^{-2} \sum_{k=1}^n Z_{k-1,z} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$I_{n,z}(\theta)$  joue le rôle d'information de Fisher, mais il est à remarquer que

$$I_{n,z}(\theta) \neq \left( \sum_{k=1}^n E(u_{k,z}^i u_{k,z}^j \mid \mathcal{F}_{k-1,z}) \right)_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}}$$

car  $\hat{L}$  n'est pas une véritable vraisemblance.

On a

$$EI_{n,z}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{z(m^n - 1)}{\sigma^2(m - 1)} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

LEMME 1.

$$(5.3) \quad I_{n,z}(\theta) [EI_{n,z}(\theta)]^{-1} \xrightarrow{P} I_2, \quad n, z \rightarrow \infty$$

c'est une conséquence triviale de [18]. Au contraire à  $z$  fixé la limite est aléatoire [9];  $z \rightarrow \infty$  fait jouer la loi des grands nombres.

PROPOSITION 5. — Soit  $C = (c_1, c_2)$  avec  $c_1, c_2$  fixés  $> 0$ . Soit  $p^{n,z} \in \mathcal{P}$  tel que le  $\theta$  associé soit  $\theta_{n,z} = \theta + 2C[EI_{n,z}(\theta)]^{-\frac{1}{2}}$ ,  $P^{n,z} = \bigotimes_{i,j=1}^{\infty} p^{n,z}$  et soit  $\Gamma = [-c_1, c_1] \times [-c_2, c_2]$ , alors

$$i) \lim_{n,z} \{ P[(\hat{\theta}_{n,z} - \theta)[EI_{n,z}(\theta)]^{\frac{1}{2}} \in \Gamma'] - P^{n,z}[(\hat{\theta}_{n,z} - \theta_{n,z})[EI_{n,z}(\theta)]^{\frac{1}{2}} \in \Gamma] \} = 0.$$

ii) Si  $T_{n,z}$  est un autre estimateur de  $\theta$  vérifiant i) alors

$$\overline{\lim}_{n,z} P[(T_{n,z} - \theta)[EI_{n,z}(\theta)]^{\frac{1}{2}} \in \Gamma] \leq \lim_{n,z} P[(\hat{\theta}_{n,z} - \theta)[EI_{n,z}(\theta)]^{\frac{1}{2}} \in \Gamma].$$

iii) Si  $T_{n,z}$  en plus de i) est tel que

$$(T_{n,z} - \theta)[EI_{n,z}(\theta)]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma)$$

alors  $\gamma \geq I_2$  au sens de l'ordre sur les matrices symétriques.

Démonstration. — i) Le corollaire 2 entraîne

$$P[(\hat{\theta}_{n,z} - \theta)[EI_{n,z}(\theta)]^{\frac{1}{2}} \in \Gamma] \rightarrow \int_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{2\pi} dx dy.$$

De plus vu la définition de  $\mathcal{P}$ , ceci est vrai uniformément et

$$(5.4) \quad [EI_{n,z}(\theta)]^{-1} E^{n,z} I_{n,z}(\theta_{n,z}) \rightarrow I_2 \quad n, z \rightarrow \infty.$$

ii) On reprend le raisonnement de Weiss-Wolfowitz [13] pour un paramètre de  $\mathbb{R}^2$  mais avec les vraisemblances approchées.

Si on pose

$$(5.5) \quad \Lambda_{n,z} = \log \frac{P^{n,z}}{P}(Z_{0,z}, \dots, Z_{n,z})$$

on a

$$\Lambda_{n,z} = \hat{\Lambda}_{n,z} + H_{n,z}$$

avec  $\hat{\Lambda}_{n,z} = \hat{L}_{n,z}(\theta_{n,z}) - \hat{L}_{n,z}(\theta)$  et  $H_{n,z} = o_p\left(\frac{g(z)}{\sqrt{z}}\right)$  (prop. 2 et cor. 1). Mais

$$(5.6) \quad \hat{\Lambda}_{n,z} = \left( \sum_{k=1}^n u_{k,z}(\theta) \right) (\theta_{n,z} - \theta)' + \frac{1}{2} (\theta_{n,z} - \theta) J_n(\theta_{n,z}^*) (\theta_{n,z} - \theta)'$$

avec

$$\theta_{n,z}^* = (m + \lambda_1^*(m_{n,z} - m), \sigma^2 + \lambda_2^*(\sigma_{n,z}^2 - \sigma^2)) \quad \lambda_1^*, \lambda_2^* \in [0, 1].$$

De plus pour tout  $\bar{\theta}$

$$(5.7) \quad \frac{d}{d\bar{\theta}} \hat{L}_{n,z}(\bar{\theta}) = \sum_1^n u_{k,z}(\bar{\theta}) = \sum_{k=1}^n u_{k,z}(\theta) + (\bar{\theta} - \theta) J_{n,z}(\theta^{**})$$

avec  $\theta^{**} = (m + \lambda_1^{**}(\bar{m} - m), \sigma^2 + \lambda_2^{**}(\bar{\sigma}^2 - \sigma^2))$ ,  $\lambda_1^{**}, \lambda_2^{**} \in [0, 1]$ .

Faisant  $\bar{\theta} = \hat{\theta}_{n,z}$ , (5.7) entraîne

$$(5.8) \quad \hat{\Lambda}_{n,z} = -(\hat{\theta}_{n,z} - \theta) J_{n,z}(\theta^{**}) (\theta_{n,z} - \theta)' + \frac{1}{2} (\theta_{n,z} - \theta) J_{n,z}(\theta_{n,z}^*) (\theta_{n,z} - \theta)'$$

$$= -2(\hat{\theta}_{n,z} - \theta) J_{n,z}(\theta^{**}) [E I_{n,z}(\theta)]^{-\frac{1}{2}} C' + 2C [E I_{n,z}(\theta)]^{-\frac{1}{2}} J_{n,z}(\theta_{n,z}^*) [E I_{n,z}(\theta)]^{-\frac{1}{2}} C'$$

A ce stade nous avons besoin du lemme de calcul suivant (admis)

LEMME 2. — 1)

$$(5.9) \quad [E I_{n,z}(\theta)]^{-\frac{1}{2}} J_{n,z}(\theta) [E I_{n,z}(\theta)]^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{P} -I_2 \quad n, z \rightarrow \infty$$

2) Si  $\bar{\theta}_{n,z} = \theta + D_{n,z} [E I_{n,z}(\theta)]^{-\frac{1}{2}}$  avec  $D_{n,z}$  vecteur borné ( $n, z \rightarrow \infty$ ) alors

$$(5.10) \quad E [I_{n,z}(\theta)]^{-\frac{1}{2}} [J_{n,z}(\bar{\theta}_{n,z}) - J_{n,z}(\theta)] [E I_{n,z}(\theta)]^{-\frac{1}{2}} = O_p(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Ceci entraîne :

$$(5.11) \quad \hat{\Lambda}_{n,z} = -2CC' + 2(\hat{\theta}_{n,z} - \theta) [E I_{n,z}(\theta)]^{\frac{1}{2}} C' + O_p(n^{-\frac{1}{2}})$$

et donc

$$(5.12) \quad \Lambda_{n,z} = -2CC' + 2(\hat{\theta}_{n,z} - \theta)[E I_{n,z}(\theta)]^{\frac{1}{2}}C' + O_p(n^{-\frac{1}{2}}) + o_p\left(\frac{g(z)}{\sqrt{z}}\right)$$

La suite est classique (Weiss-Wolfowitz [17]).

iii) est une conséquence de ii) lorsque  $T_{n,z}$  est un compétiteur asymptotiquement normal.

*Remarques.* — 1) Ayant terminé ce travail, nous avons eu connaissance de Eschenbach-Winkler ([7]). Ils proposent la même approximation de la vraisemblance mais n'en n'évaluent pas la précision.

2) N. Keiding nous a signalé une analogie avec l'estimation dans les processus de ramification-diffusion ([2]) :

$$\text{soit} \quad \theta_z = (1 + \beta z^{-1}, \sigma^2), \quad \beta > 0 \quad \text{et} \quad X_{t,z} = z^{-1}Z_{[tz],z}$$

alors quand  $z \rightarrow \infty$ ,  $X_{t,z} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_t$  où  $X_t$  vérifie

$$dX_t = \beta X_t dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, \quad X_0 = 1$$

( $W_t$  brownien standard).

Cette équation est l'analogie de (1.1) mais le problème théorique de l'estimation de  $(\beta, \sigma)$  au vue de  $X$  est un peu différent. La méthode naturelle consiste à estimer d'abord  $\sigma^2$  par variation quadratique puis  $\beta$  par

$$(X_t - 1) \left[ \int_0^t X_s ds \right]^{-1}.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. M. BROWN, Martingale central limit theorems, *Ann. Math. Stat.*, t. **42**, 1971, p. 59-66.
- [2] B. M. BROWN, J. I. HEWITT, Inference for the diffusion branching process, *J. A. P.*, t. **12**, 1975, p. 588-594.
- [3] J. P. DION, *Estimation des probabilités initiales et de la moyenne d'un processus de Galton-Watson*. Thèse, Montréal, 1972.
- [4] J. P. DION, Estimation of the variance of a branching process. *Ann. Stat.*, t. **3**, 1975, p. 1183-1187.
- [5] J. DION, N. KEIDING, Statistical inférence in branching processes, In *Branching Processes* edited by Joffe and Ney. *Advances in Probability and Related Topics*, t. **5**, 1978, M. Dekker.
- [6] C. DUBY, A. ROUAULT, *C. R. A. S.*, t. **290**, 1980, p. 339-341.
- [7] W. ESCHENBACH, W. WINKLER, Maximum-likelihood-shätzungen beim Verzweigungsprozess von Galton-Watson. *Math. Operationsforsch. u. Stat.*, t. **6**, 1975, p. 213-224.
- [8] C. C. HEYDE, On estimating the variance of the offspring distribution in a simple branching process, *Adv. in Appl. Prob.*, t. **6**, 1974, p. 421-433.

- [9] C. C. HEYDE, On an optimal asymptotic property of the maximum likelihood estimator of a parameter from a stochastic process. *Stochastic Processes and their applications*, t. **8**, 1978, p. 1-9.
- [10] C. C. HEYDE, Some almost sure convergence theorems for branching processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **20**, 1971, p. 189-192.
- [11] C. C. HEYDE, B. M. BROWN, An invariance principle and some convergence rate results for branching processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **20**, 1971, p. 271-278.
- [12] C. C. HEYDE, P. D. FEIGIN, On efficiency and exponential families in stochastic process estimation. In : *Statistical distributions in scientific work* (ed. G. P. Patil, S. Kotz, J. K. Ord), Reidel, Dordrecht, t. **1**, 1975, p. 227-240.
- [13] P. JAGERS, *Branching processes with biological applications*, Wiley, 1975.
- [14] N. KEIDING, S. LAURITZEN, Marginal maximum likelihood estimates and estimation of the offspring mean in a branching process. *Scand. J. Statist.*, t. **5**, 1978.
- [15] PETROV, *Sums of independent random variables*, Springer-Verlag, 1975.
- [16] SCOTT, A central limit theorem for martingales and an application to branching processes. *Stochastic Processes and Their Applications*, t. **6**, 1978, p. 241-252.
- [17] L. WEISS, J. WOLFOWITZ, Generalized maximum likelihood estimators. *Theory of Prob. and its Appl.*, vol. **XI**, 1966, p. 58-80.
- [18] N. M. YANEV, On the statistics of branching processes. *Theory of Prob. and its appl.*, t. **20**, 1975, p. 612-622.

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1981)