ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GEORGE HAIMAN

Valeurs extrémales de suites stationnaires de variables aléatoires m-dépendantes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, n° 3 (1981), p. 309-330

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_3_309_0>

© Gauthier-Villars, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 3-1981, p. 309-330. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Valeurs extrémales de suites stationnaires de variables aléatoires *m*-dépendantes

par

M. George HAIMAN

12, Avenue Jean-Moulin, 93100 Montreuil

INTRODUCTION

La présente étude concerne les lois de probabilité des valeurs extrémales de suites stationnaires de variables aléatoires *m*-dépendantes.

Ce type de suite a été étudié, dans le cadre de la théorie asymptotique des valeurs extrémales, comme un cas particulier de certaines suites mélangeantes (voir [*1*], p. 156).

Dans la première partie nous développons une technique adaptée aux suites concernées, conduisant à l'établissement de la formule :

Pour tout x suffisamment grand et inférieur à $\omega(F)$, en notant par F la fonction de répartition commune des variables aléatoires et par $\omega(F)$ la valeur définie comme $\omega(F) = \sup \{ y : F(y) < 1 \}$, on a :

$$P \{ \max (X_1, \ldots, X_n) < x \} \sim K(x)\mu^n(x) \qquad \text{lorsque} \quad n \to \infty$$

μ étant en général différente de F.

De cette formule, et en particulier du développement de $\mu(x)$ au voisinage de $\omega(F)$ nous déduisons directement les résultats connus, exposés dans [*1*], relatifs à l'existence de lois limites pour les valeurs extrémales des suites *m*-dépendantes comme des conséquences des résultats similaires démontrés pour les suites de variables aléatoires indépendantes équidistribuées.

Dans la deuxième partie nous appliquons ces résultats à l'étude des sommes :

$$S_n = X_1 + \text{Inf}(X_1, X_2) + \ldots + \text{Inf}(X_1, \ldots, X_n)$$

Annales de l'Institut Henri Poincaré-Section B-Vol. XVII, 0020-2347/1981/309/$ 5,00/
© Gauthier-Villars

relatives à une suite $\{ X_n \}_{n \geq 1}$ stationnaire de variables aléatoires m-dépendantes, à support [0, A].

Nous montrons, en utilisant des techniques introduites dans [2] et [3] qui traitent le cas d'une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées que :

si au voisinage de O :

$$P(X_1 < u) - f_0 u = O(u^{1+\nu}), \qquad \nu > 0$$

et s'il existe $\beta > 0$ tel que $\forall 1 < i \leqslant m$:

$$\limsup_{\sup(x,z) \to 0} \frac{P(X_1 < x, X_i \in [y, z])}{[\sup(x, z)]^{\beta}(z - y)} < + \infty$$

alors :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{\text{Log } n} = \frac{1}{f_0} \qquad \text{presque sûrement.}$$

Ce type de problème a été abordé notamment dans [2] [3] et [4].

CHAPITRE I

DÉFINITION. — Soit $\{ X_n \}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Soit m un entier > 0. La suite $\{ X_n \}_{n \geq 1}$ est dite vérifier la propriété d'indépendance à l'ordre m, ou être m-dépendante si :

pour tout choix d'entiers : $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_t < j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, les vecteurs $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t})$ et $(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k})$ sont indépendants, lorsque $j_1 - i_t \geqslant m$.

PROPOSITION 1. — *Soit $\{ X_n \}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires stationnaire, ne prenant que les valeurs 0 et 1, et vérifiant la propriété d'indépendance à l'ordre 2. Soit p_n la suite définie pour $n \geqslant 1$ comme :*

$$p_n = P\{ X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_n = 0 \}$$

La loi de probabilité de la suite $\{ X_n \}_{n \geq 1}$ est entièrement déterminée par les p_n ou de manière équivalente par les q_n définis comme :

$$q_n = P\{ X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_n = 1 \}$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer que la probabilité de tout événement élémentaire :

$$e_n = \{ X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2, \ldots, X_n = \varepsilon_n \} = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \} \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1$$

s'exprime en fonction des p_k, $k \leqslant n$.

Pour cela on effectue une récurrence sur n et sur le nombre de ε_j de e_n valant 1.

En effet, soit $n \geqslant 3$ et soit e_n un événement élémentaire admettant l'écriture binaire :

$$e_n = \{ e_{m_1}, 1, e_{m_2} \}, \qquad m_1 + m_2 = n - 1$$

D'après les hypothèses :

$$P(e_n) = P(e_{m_1})P(e_{m_2}) - P\{ e_{m_1}, 0, e_{m_2} \}$$

ce qui permet la récurrence. ▲

PROPOSITION 2. — *Posons $p_0 = q_0 = 1$ et soient, avec les notations de la proposition 1, les séries entières :*

$$A(Z) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n p_n Z^n \qquad \text{et} \qquad B(Z) = \sum_{n \geqslant 0} q_n Z^n, \qquad Z \in \mathbb{C}.$$

Pour les valeurs de Z pour lesquelles A et $\dfrac{1}{1 - ZA}$ ont un sens, on a :

$$B = \frac{A}{1 - ZA}$$

Démonstration. — De la relation entre événements :

$$\begin{aligned} \{ X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0 \} \\ = \{ X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0 \} \\ - \{ X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 0, \ldots, X_n = 0 \} \end{aligned}$$

et des hypothèses, on déduit, en notant pour n fixé U_k la probabilité de l'événement figurant au premier membre, la relation de récurrence définie pour $K \leqslant n$:

$$U_k = q_{k-1} p_{n-k} - U_{k-1}, \qquad U_0 = p_n$$

Comme $U_n = q_n$, en posant $\alpha_n = (-1)^n p_n$ cette relation entraîne l'équation de convolution :

$$q_n = (q * \alpha)_{n-1} + \alpha_n \tag{1}$$

qui est équivalente, au niveau des séries entières, à l'équation annoncée. ▲

De (1) on déduit l'expression des q_n en fonction des p_n :

PROPOSITION 3. — *Avec les notations de la proposition 1 et en posant* $p_0 = q_0 = 1$, $\alpha_n = (-1)^n p_n$, *on a :*

$$q_n = \alpha_n + \alpha_{n-1}^{*2} + \alpha_{n-2}^{*3} + \ldots + \alpha_1^{*(n-1)} + 1 .$$

Nous supposons dans la suite les p_n données et $p_2 < p_1$, car $p_2 = p_1$ correspond au cas trivial $p_1 = 0$ ou $p_1 = 1$.

PROPOSITION 4. — *Avec les hypothèses de la proposition 1, pour* p_1 *suffisamment petit, il existe* μ *et* $K > 0$ *tels que lorsque n tend vers l'infini :*

$$q_n \sim K\mu^n$$

Lorsque p_1 *tend vers zéro, on a :*

$$\mu = 1 - p_1 + p_2 + O(p_1^2), \qquad K = 1 + O(p_1)$$

et il existe une suite $\{\rho_n\}$ *de nombres positifs tendant vers zéro lorsque n tend vers l'infini telle que* $\forall n \geqslant n_0$ *:*

$$|q_n - K\mu^n| \leqslant K\mu^n[\rho_n(1 - \sqrt{p_1})^n] .$$

Démonstration. — On démontre d'abord deux lemmes :

LEMME 1. — *Soit* $C(Z)$ *la série entière :*

$$C(Z) = 1 - ZA(Z) = 1 - Z + p_1 Z^2 - p_2 Z^3 \ldots$$

et soit C_n *le coefficient d'ordre n de la série entière associée à* $\dfrac{1}{C(Z)}$. *On a :*

$$q_n = C_{n+1}$$

Démonstration du lemme 1. — Il suffit de remarquer que

$$B(Z) = \sum_{n \geqslant 0} q_n Z^n = \frac{1}{Z}\left(\frac{1}{C(Z)} - 1\right).$$

LEMME 2. — *Soit r un nombre positif donné. Pour* p_1 *suffisamment petit* $C(Z)$ *admet un zéro et un seul, réel,* λ, *dont l'ordre de multiplicité est un, dans le disque* $|z| \leqslant 1 + r\sqrt{p_1}$.

Démonstration du lemme 2. — On remarque, du fait que par l'indépendance à l'ordre deux $p_n \leqslant (\sqrt{p_1})^n$, la série $C(Z)$ est normalement convergente pour $|Z| < \dfrac{1}{\sqrt{p_1}}$.

On déduit, si $|Z| < \frac{1}{\sqrt{p_1}}$, les majorations :

$$|C(Z) - (1 - Z + p_1Z^2 - p_2Z^3)| \leqslant p_1^2\left[|Z|^4 + \frac{|Z|^5}{1 - \sqrt{p_1}|Z|}\right] \quad (2)$$

$$|C'(Z) + 1| \leqslant p_1\left[2|Z| + \frac{|Z|^2(3 - 2|Z|\sqrt{p_1})}{(1 - \sqrt{p_1}|Z|)^2}\right] \quad (3)$$

Montrons que pour p_1 suffisamment petit C(Z) admet un zéro et un seul, λ, simple, sur le segment $[0, 1 + r\sqrt{p_1}]$.

Comme $p_1 > p_2$, si $x \in [0, 1]$, $C(x) > 0$ et en particulier $C(1) > 0$.

D'autre part, de (2) on déduit :

$$C(1 + r\sqrt{p_1}) = -r\sqrt{p_1} + o(\sqrt{p_1})$$

qui est négatif pour p_1 suffisamment petit.

Par conséquent, si p_1 est suffisamment petit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, C s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]1, 1 + r\sqrt{p_1}]$.

Comme, d'après (3), pour p_1 suffisamment petit C' ne s'annule pas dans $]1, 1 + r\sqrt{p_1}]$ l'unicité du zéro et le fait qu'il soit simple découlent du théorème de Rolle.

Montrons, en raisonnant par l'absurde, que pour p_1 suffisamment petit il ne peut y avoir d'autre zéro complexe dans le disque $|Z| < 1 + r\sqrt{p_1}$.

Considérons pour cela une suite de processus à laquelle est associée, par la proposition 1, dont ils sont supposés vérifier les hypothèses, une suite $\{p_1(n)\}_{n=1,\ldots,}$ telle que $\lim_{n\to\infty} p_1(n) = 0$.

Soit $Z_n = \lambda_n e^{i\theta_n}$ un des zéros complexes associés à $p_1(n)$ vérifiant

$0 < \theta_n \leqslant \Pi$ (si Z_n est un zéro $\overline{Z_n}$ est aussi un zéro)

$0 < \lambda_n \leqslant 1 + r\sqrt{p_1}(n)$, λ_n minimum.

Soit

$$\text{Re}\,[C_n(Z_n)] = 0 = 1 - \lambda_n \cos\theta_n + \underbrace{\lambda_n^2 p_1(n)\cos 2\theta_n - \lambda_n^3 p_2(n)\cos 3\theta_n \ldots}_{S_n(Z_n)}$$

On a :

$$|S_n(Z_n)| \leqslant \sqrt{p_1(n)}\,\frac{[1 + r\sqrt{p_1(n)}]^2}{1 - (1 + r\sqrt{p_1(n)})\sqrt{p_1(n)}} \quad \text{pour } n \text{ assez grand} \quad (4)$$

Comme $\lim_{n\to\infty} |S_n(Z_n)| = 0$, nécessairement :

— pour $n \geqslant n_0$, $0 < \theta_n \leqslant \frac{\Pi}{2}$
— $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$
— $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$.

Soient alors les fonctions $I_n(t)$ définies pour $t \in [-1, +1]$ comme :

$$I_n(t) = \text{Im}\{C_n[Z_n(t)]\}, \qquad Z_n(t) = \lambda_n e^{it\theta_n}$$

$I_n(-1) = I_n(1) = 0$ et :

$$I'_n(t) = -\lambda_n\theta_n(\cos t\theta_n - \underbrace{2p_1(n)\lambda_n \cos 2t\theta_n + 3p_2(n)\lambda_n^2 \cos 3t\theta_n \ldots)}_{L_n(t)}$$

Comme pour (4), pour n suffisamment grand $L_n(t)$ est majorée uniformément par une suite $\{1_n\}_{n\geqslant 1}$, $\lim_{n\to\infty} 1_n = 0$.

D'autre part $\lim_{n\to\infty} \cos(t\theta_n) = 1$ uniformément en t, et $\forall n$, $\theta_n \times \lambda_n > 0$.

Par conséquent, pour n suffisamment grand, $I'_n(t)$ ne s'annule pas dans $[-1, +1]$. Ceci contredit le théorème de Rolle et achève la démonstration du lemme 2.

Démonstration de la proposition 4. — Soient r, p_1 et λ satisfaisant au lemme 2. Pour $|Z| < \lambda$, $\frac{1}{C(Z)}$ peut s'écrire :

$$\frac{1}{C(Z)} = -\frac{1}{C'(\lambda)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^n} Z^n + R(Z) \tag{5}$$

la série entière associée à $R(Z)$ admettant un rayon de convergence s tel que $s > 1 + r\sqrt{p_1}$.

Donc, si r_n désigne le coefficient d'ordre n de cette série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |r_n| \lambda^n < +\infty \qquad \text{ce qui entraîne} \quad \lim_{n\to\infty} r_n\lambda^n = 0.$$

Le coefficient d'ordre n de $\frac{1}{C(Z)}$, C_n, vérifie donc :

$$C_n \sim \frac{-1}{C'(\lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda^n}$$

ce qui entraîne, en vertu du lemme 1, en prenant $K = \frac{-1}{C'(\lambda).\lambda}$ et $\mu = \frac{1}{\lambda}$, la première formule de la proposition.

Des formules (2) et (3) on déduit pour p_1 suffisamment petit :

$$C(1) = p_1 - p_2 + O(p_1^2), \quad C'(u) = -1 + O(p_1), \quad u \in [1, 1 + r\sqrt{p_1}]$$

En écrivant la formule des accroissements finis :

$$C(\lambda) - C(1) = (\lambda - 1)C'(u) = -C(1)$$

on obtient $\lambda = 1 + p_1 - p_2 + O(p_1^2)$ d'où les expressions de K et de μ recherchées.

Enfin, soit $r_n = q_n - k\mu^n$. On a :

$$\frac{r_n}{\mu_n} = [r_n(1 + \sqrt{p_1})^n] \frac{\lambda^n}{(1 + \sqrt{p_1})^n}$$

D'après le lemme 2, avec $r = 1$, pour p_1 suffisamment petit

$$\lim_{n \to \infty} r_n(1 + \sqrt{p_1})^n = 0$$

car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |r_n| (1 + \sqrt{p_1})^n < +\infty$$

La dernière formule de la proposition résulte alors de l'expression de λ précédente. ▲

THÉORÈME 1. — *Soit* $\{X_n\}_{n \geq 1}$ *une suite stationnaire de variables aléatoires m-dépendantes. On suppose* $m \geq 2$.

Soit $F(x)$ *la fonction de répartition des* X_i *et soit* $\omega(F) = \sup \{ y : F(y) < 1 \}$. *Posons :*

$$S_1(x) = 1 - F(x)$$

et, pour $2 \leq K \leq m$ *:*

$$S_k(x) = \sum_{1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k < m} P(X_1 \geq x, X_{i_2} \geq x, \ldots, X_{i_k} \geq x)$$

Il existe $u < \omega(F)$ *et des fonctions* K *et* μ *telles que si* $x \in [u, \omega(F)]$, *lorsque* $n \to \infty$ *:*

$$P\left(\sup_{i=1,\ldots,n} X_i < x\right) \sim K(x)\mu(x)^n$$

Au voisinage de $\omega(F)$, *on peut écrire*

$$P\left(\sup_{i=1,\ldots,n} X_i < x\right) = [1 + O(S_1(x))]\mu(x)^n,$$

où

$$\mu(x) = 1 - S_1(x) + S_2(x) \ldots + (-1)^n S_m(x) + O[S_1(x)^2]$$

Démonstration. — On considère la suite stationnaire et vérifiant la propriété d'indépendance à l'ordre 2 :

$$Y_n = \sup_{i \in \{(n-1)m+1,\ldots,n.m\}} X_i$$

Démonstrons d'abord, en appliquant la proposition 4 à Y_n, le lemme :

LEMME 3. — *Pour* x *assez voisin de* $\omega(F)$, *lorsque* $n \to \infty$:

$$P\left\{\sup_{i=1,\ldots,n} Y_i < x\right\}$$
$$\sim (1 + O[S_1(x)])\left\{[1 - m(S_1(x) - S_2(x) \ldots (-1)^{m-1} S_m(x))] + O\left[S_1^2(x)\right]\right\}^n$$

Démonstration du lemme. — Posons :

$$P_1(x) = P\left(\sup_{i=1,\ldots,n} X_i \geqslant x\right)$$

$$P_2(x) = P\left(\sup_{i=1,\ldots,m} X_i \geqslant x, \sup_{i=m+1,2m} X_i \geqslant x\right)$$

On a alors :

$$P_1(x) - P_2(x) = P\left(\sup_{i=1,\ldots,m} X_i < x\right) - P\left(\sup_{i=1,\ldots,2m} X_i < x\right)$$

Soient, pour $1 \leqslant K \leqslant n$:

$$S_{k,n}(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_k \leqslant n} P(X_{i_1} \geqslant x, \ldots, X_{i_k} \geqslant x)$$

D'après le théorème 1.4.1 de [*1*] on a :

$$P\left(\sup_{i=1,\ldots,m} X_i < x\right) = 1 - S_{1,m} + S_{2,m} \ldots + (-1)^m S_{m,n}$$

et

$$P\left(\sup_{i=1,\ldots,2m} X_i < x\right) = 1 - S_{1,2m} + S_{2,2m} \ldots + S_{2m,2m}$$

En appliquant l'hypothèse d'indépendance à l'ordre m on voit que :

$$\sum_{k=m+1}^{2m} (-1)^k S_{k,2m} = O(S_1^2)$$

et que pour $1 \leqslant K \leqslant m$:

$$S_{k,2m} - S_{k,m} = mS_k + O(S_1^2)$$

Comme d'autre part :

$$P\left(\sup_{i=1,\ldots,m} X_i < x\right) = O(S_1(x))$$

le lemme résulte directement de la proposition 4.

Démonstration du théorème 1. — $\forall n$ et $1 < p < m$:

$$P\left(\sup_{i=1,\ldots,(n+1)m} X_i < x\right) \leqslant P\left(\sup_{i=1,\ldots,nm+p} X_i < x\right) \leqslant P\left(\sup_{i=1,\ldots,nm} X_i < x\right)$$

Posons $g(x) = S_1(x) - S_2(x) + \ldots + (-1)^{m-1} S_m(x) + O(S_1^2(x))$

D'après le lemme 3, pour x suffisamment proche de $\omega(F)$:

$$P\left(\sup_{i=1,\ldots,(n+1)m} X_i < x\right) = [1 + O(S_1(x))]\,[(1 - mg(x))^{1/m}]^{nm+p}\,[(1 - mg(x))^{1/m}]^{m-p}\,[1 + \varepsilon_{n+1}(x)]$$

et

$$P\left(\sup_{i=1,\ldots,nm} X_i < x\right) = [1 + O(S_1(x))]\,[(1 - mg(x))^{1/m}]^{nm+p}\,[(1 - mg(x))^{1/m}]^{-p}\,[1 + \varepsilon_n(x)]$$

avec $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n(x) = 0$.

Comme au voisinage de $\omega(F)$:

$$(1 - mg(x))^{1/m} = 1 - g(x) + O(g^2(x)) = 1 - g(x) + O(S_1^2(x))$$

et d'autre part :

$$[(1 - mg))^{1/m}]^{m-p} = 1 + O(S_1(x)) \quad \text{et} \quad [(1 - mg(x))^{1/m}]^{-p} = 1 + O(S_1(x))$$

on déduit les formules annoncées. La vitesse de convergence de l'approximation peut être obtenue par la proposition 4.

PROPOSITION 5. — *On suppose, avec les notations du théorème 1, dans le cas* $m = 2$:

$$\limsup_{x \to \omega(F)} \frac{P(X_1 \geqslant x,\, X_2 \geqslant x)}{[1 - F(x)]^2} < +\infty$$

Posons $q_n(x) = P\left(\sup_{i=1,\ldots,n} X_i < x\right)$

Au voisinage de $\omega(F)$ *on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n(x) = \frac{1}{1-F(x)}(1+O[1-F(x)]) \sum_{n=1}^{+\infty} nq_n(x) = \frac{1}{(1-F(x))^2}(1+O[1-F(x)])$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q_n(x) = \frac{2}{(1-F(x))^3}(1+O[1-F(x)])$$

Démonstration. — Soient, avec les notations du lemme 1 :

$$p_1 = p_1(x) = 1 - F(x), \qquad p_2 = p_2(x) = P(X_1 \geqslant x, X_1 \geqslant x)$$

D'après le lemme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n(x) = \frac{1}{C(1)} = \frac{1}{p_1 - p_2 + O(p_1^2)} = \frac{1}{p_1}[1 + O(p_1)]$$

car $p_2 = O(p_1^2)$ compte tenu de l'hypothèse.

Les deux autres formules se démontrent de manière analogue, en écrivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq_n(x) = \frac{d}{dZ}\left[\frac{1}{C(Z)}\right]_{Z=1}$$

et $$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q_n(x) = \frac{d^2}{dZ^2}\left[\frac{1}{C(Z)}\right]_{Z=1} + \frac{d}{dZ}\left[\frac{1}{C(Z)}\right]_{Z=1}$$ ▲

Remarque 1. — Les résultats précédents admettent naturellement une version en termes de minimas. Ainsi, l'équivalent du théorème 1 dans le cas $m = 2$ s'écrit :

THÉORÈME 1′. — Soit $\alpha(F) = \inf \{ x : F(x) > 0 \}$.

Il existe $u > \alpha(F)$ et des fonctions K et μ telles que si $x \in [\alpha(F), u]$, lorsque $n \to \infty$:

$$q_n(x) = P\left(\inf_{i=1,\ldots,n} X_i \geqslant x\right) \sim K(x)\mu(x)^n$$

Au voisinage de $\alpha(F)$, K et μ vérifient :

$$K(x) = 1 + O(F(x))$$
$$\mu(x) = 1 - F(x) + P(X_1 < x, X_2 < x) + O(F^2(x))$$

PROPOSITION 5'. — L'équivalent de la proposition 5 s'obtient en remplaçant l'hypothèse par :

$$\lim_{x \to \alpha(F)} \frac{P(X_1 < x, X_2 < x)}{F(x)^2} = 0$$

et en remplaçant dans les formules $q_n(x)$ par $P\{\inf_{i=1,\ldots,n} X_i \geqslant x\}$, $\omega(F)$ par $\alpha(F)$ et $1 - F$ par F.

Conséquences. — Le théorème [*1*] (corollaire 1.3.1, p. 11) sur lequel repose l'étude des lois limites des maximas dans le cas d'une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées est :

THÉORÈME A. — *Soit* $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées dont la fonction de répartition commune* $F(x)$ *vérifie la propriété :*

Il existe deux suites $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *de nombres positifs tels que, pour tout* y *:*

$$\lim_{n \to \infty} n[1 - F(a_n + b_n y)] = u(y) \qquad (a)$$

Alors

$$\lim_{n \to \infty} P(\max_{i=1,\ldots,n} X_i < a_n + b_n y) = \exp[-u(y)] \qquad (b)$$

Montrons que le théorème B de [*1*] ci-après (corollaire 3.7.1, p. 162), homologue de A dans le cas des suites stationnaires m-dépendantes, est une conséquence directe des théorèmes A et 1.

THÉORÈME B. — *Soit* $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ *une suite stationnaire de variables aléatoires m-dépendantes dont la fonction de répartition commune* $F(x)$ *vérifie* (*a*). *Alors* (*b*) *est vraie si et seulement si, pour tout* $2 \leqslant i \leqslant m$

$$\lim_{n \to \infty} nP(X_1 \geqslant a_n + b_n x, X_i \geqslant a_n + b_n x) = 0 \qquad (c)$$

ou, de manière équivalente, si et seulement si

$$\lim_{u \to \omega(F)} \frac{\max_{2 \leqslant j \leqslant m} P(X_1 \geqslant u, X_j \geqslant u)}{1 - F(u)} = 0 \qquad (d)$$

Démonstration. — Le théorème A s'énonce aussi.

Si F est une fonction de répartition vérifiant (*a*) alors :

$$\lim_{n \to \infty} F(a_n + b_n y)^n = \exp[-u(y)]$$

D'après le théorème 1, lorsque $n \to \infty$:

$$P\left(\max_{i=1,\ldots,n} X_i \leqslant a_n + b_n y\right) \sim [\mu(a_n + b_n y)]^n$$

et

$$\mu(a_n + b_n y)^n = P(X_1 \leqslant a_n + b_n y)^n [1 + R_n(a_n + b_n y)]^n$$

avec

$$R_n(x) = \frac{S_2(x) + \ldots + (-1)^m S_m(x) + O[P^2(X_1 \geqslant x)]}{P(X_1 \leqslant x)}$$

En posant $F(x) = P(X_1 < x)$, d'après (a) :

$$\lim_{n\to\infty} F(a_n + b_n y) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall K,\ 2 \leqslant K \leqslant m : \lim_{n\to\infty} S_k(a_n + b_n y) = 0$$

Par conséquent :

$$\mu(a_n + b_n y)^n = F(a_n + b_n y)^n [1 + R_n(a_n + b_n y)]^n$$

avec $\lim_{n\to\infty} R_n(a_n + b_n y) = 0$.

Il s'agit de montrer que $\lim_{n\to\infty} [1 + R_n(a_n + b_n y)]^n = 1$, ce qui équivaut à $\lim_{n\to\infty} nR_n(a_n + b_n y) = 0$, si et seulement si (c) ou (d) sont vérifiés.

Pour montrer que (c) est suffisante, il suffit de remarquer que $\forall K$, $2 \leqslant K \leqslant m$, $S_K = O(S_2)$.

Montrons que (c) est nécessaire :

Soient pour $2 \leqslant K \leqslant m$ les événements $C_K = \{ X_1 \geqslant x, X_K \geqslant x \}$ et soit v la variable aléatoire « nombre de C_K qui sont réalisés ». On remarque, avec le théorème 1.4.1 de [1] que :

$$S_2(x) + \ldots + (-1)^m S_m(x) = 1 - P(v = 0)$$

D'après le même théorème

$$P(v = 0) = 1 - \frac{1}{m-1} \sum_{K=2}^{m} P(X_1 \geqslant x, X_K \geqslant x)$$

Par conséquent :

$$S_2(x) + \ldots + (-1)^m S_m(x) \geqslant \frac{1}{m-1} \sum_{K=2}^{m} P(X_1 \geqslant x, X_K \geqslant x)$$

ce qui entraîne que (c) est nécessaire.

On voit que du théorème 1 on peut déduire l'énoncé quelque peu plus général que B :

THÉORÈME 3. — *Soit* $\{ X_n \}_{n \geqslant 1}$ *une suite stationnaire de variables aléatoires m-dépendantes dont la fonction de répartition commune vérifie* (a).

Soit, avec les notations du théorème (1) :

$$G(x) = S_2(x) + \ldots + (-1)^m S_m(x)$$

Si $\lim_{u \to \omega(F)} \frac{G(u)}{1 - F(u)} \to \lambda$ *alors* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ *et :*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\max_{i=1,\ldots,n} X_i \leqslant a_n + b_n y\right) = \exp - [(1 - \lambda)U(y)]$$

$\lambda = 0$ *si et seulement si :*

$$\lim_{u \to \omega(F)} \frac{\operatorname{Max}_{2 \leqslant j \leqslant m} P(X_1 \geqslant u, X_j \geqslant u)}{1 - F(u)} = 0$$

Exemple. — Soit $\{ y_n \}_{n \geqslant 0}$ une suite de v. a. indépendantes équidistribuées de fonction de répartition F.

Soit $\{ i_n \}_{n \geqslant 1}$ une suite de v. a. indépendantes équidistribuées ne prenant que les valeurs 0 et 1.

On suppose les i_n indépendantes des Y_n et on pose :

$$P(i = 0) = p_0 = 1 - p_1$$

Soit $\{ X_n \}_{n \geqslant 1}$ la suite définie comme :

$$X_n = Y_{n - i_n}$$

$\{ X_n \}$ est une suite stationnaire indépendante à l'ordre deux et :

$$\lim_{u \to \omega(F)} \frac{G(u)}{1 - F(u)} = \lim_{\omega \to (F)} \frac{P(X_1 \geqslant u, X_2 \geqslant u)}{1 - F(u)} = p_1 . p_0$$

CHAPITRE II

Soit $\{ X_n \}_{n \geqslant 1}$ une suite stationnaire de variables aléatoires vérifiant la propriété d'indépendance à l'ordre 2 et dont les lois marginales sont uniformément distribuées sur [0, 1].

Soit $\{ \varepsilon_n \}_{n \geqslant 1}$ une suite numérique, strictement décroissante vers zéro.

On pose :

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \tau_\varepsilon = \operatorname{Inf} \{ n / \operatorname{Inf} \{ X_1, \ldots, X_n \} \leqslant \varepsilon \} .$$

$$S_n = X_1 + \operatorname{Inf}(X_1, X_2) + \ldots + \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n) .$$

PROPOSITION 6. — *La suite aléatoire* $\{ \tau_{\varepsilon_n}, n \geqslant 1 \}$ *est définie et croît indéfiniment, presque sûrement.*

Démonstration. — En effet :

$$P(\exists n/\mathrm{Inf}\,(X_1, \ldots, X_n) = 0) = 0$$

et

$$P\,(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Inf}\,(X_1, \ldots, X_n) > 0) = 0 \quad \text{car} \quad P(X_1 \geqslant \varepsilon, \ldots, X_n \geqslant \varepsilon) \leqslant (1-\varepsilon)^{\frac{n}{2}}$$ ▲

Dans la suite, on se limitera à l'espace d'événements $\Omega - \Omega_0$, avec :

$$\Omega_0 = \{ \exists n/\inf\,(X_1, \ldots, X_n) = 0 \} \cup \{ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Inf}\,(X_1, \ldots, X_n) > 0 \}$$

PROPOSITION 7. — *Posons* $\tau_{\varepsilon_1} = \tau_1$ *et pour* $n \geqslant 2$, $t_n = \tau_{\varepsilon_n} - \tau_{\varepsilon_{n-1}}$.

$\forall n \geqslant 1$:

$$-2 + \tau_1\varepsilon_1 + \sum_{m=1}^{n-1} t_{m+1}\varepsilon_{m+1} \leqslant S_{\tau_{\varepsilon_n}} \leqslant \tau_1 + \sum_{m=1}^{n-1} t_{m+1}\varepsilon_m$$

Démonstration. — Immédiate, en raison du caractère monotone des suites utilisées.

PROPOSITION 8. — *On suppose que la suite* $\{ X_n \}_{n\geqslant 1}$ *définie précédemment vérifie :*

$$\limsup_{\sup(x,z)\to 0} \frac{P\{ X_1 < x, X_2 \in [y, z] \}}{\sup(x, z).(y - z)} < +\infty \tag{6}$$

On a :

$$E(\tau_1) = \frac{1}{\varepsilon_1}(1 + O_1(\varepsilon_1)); \qquad E(\tau_1^2) = \frac{2}{\varepsilon_1^2}(1 + O_2(\varepsilon_1))$$

$\forall i > 2$:

$$E(t_i) = \frac{\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} \cdot \frac{1}{\varepsilon_i}(1 + O_3(\varepsilon_{i-1})$$

$$E(t_i^2) = \frac{\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} \cdot \frac{2}{\varepsilon_i^2}(1 + O_4(\varepsilon_{i-1})$$

$$E(\tau_1 \times t_i) = \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} \cdot \frac{1}{\varepsilon_i}(1 + O_5(\varepsilon_1))$$

$\forall 2 \leqslant i < j$:

$$E(t_i \times t_j) = \frac{\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1} \cdot \varepsilon_i} \cdot \frac{\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j}{\varepsilon_{j-1} \cdot \varepsilon_j}(1 + O_6(\varepsilon_{i-1}))$$

Lorsque les X_n sont indépendantes, les O_i sont nuls. $\forall i$, pour $x > 0$ suffisamment petit, $|O_i(x)| < Kx$.

Démonstration. — Nous donnons les démonstrations de la première et de la dernière formule, les autres se démontrant de manière rigoureusement identique.

Dans le cas des variables indépendantes, étudié dans [2], les t_i sont indépendants et les quatre premières formules, avec $O_j = 0$, sont démontrées dans la proposition 4.

1re formule :

$$P(\tau_1 = n) = P(X_1 \geqslant \varepsilon_1, \ldots, X_{n-1} \geqslant \varepsilon_1, X_n < \varepsilon_n)$$

Avec les notations, et d'après le théorème 1, pour $n \geqslant 2$:

$$P(\tau_1 = n) = q_{n-2}(\varepsilon_1)\,[\varepsilon_1 + O(P(X_1 < \varepsilon_1, X_2 < \varepsilon_1))]$$

D'après (6) et la proposition 5 :

$$E(\tau_1) = \sum_{n \geqslant 0} nP(\tau_1 = n) = \frac{1}{\varepsilon_1}(1 + O_1(\varepsilon_1))$$

Dernière formule : calcul de $E(t_i \times t_j)$, $2 \leqslant i < j$.

Considérons d'abord le cas $j \geqslant i + 2$.

Soit $D = \{ \rho_1 \geqslant 1, n_i > 0, \rho_2 \geqslant 0, n_j > 0 \}$ et soit la fonction définie sur D :

$$P(\rho_1, n_i, \rho_2, n_j) = P(\tau_{\varepsilon_{i-1}} = \rho_1, \tau_{\varepsilon_i} - \tau_{\varepsilon_{i-1}} = n_i, \tau_{\varepsilon_{j-1}} - \tau_{\varepsilon_i} = \rho_2, \tau_{\varepsilon_j} - \tau_{\varepsilon_{j-1}} = n_j)$$

$$E(t_i . t_j) = \sum_D \sum \sum \sum P(\rho_1, n_i, \rho_2, n_j) n_i . n_j$$

Soient les ensembles disjoints D_1 et D_2 dont la réunion est D :

$$D_1 = \{ \rho_1 \geqslant 1, n_i > 0, \rho_2 > 0, n_j > 0 \}, \qquad D_2 = \{ \rho_1 \geqslant 1, n_i > 0, \rho_2 = 0, n_j > 0 \}$$

Calculons la somme quadruple précédente relative aux sous-ensembles Δ_1 de D_1 et Δ_2 de D_2 :

$$\Delta_1 = \{ \rho_1 \geqslant 2, n_i \geqslant 3, \rho_2 \geqslant 3, n_j \geqslant 3 \}; \qquad \Delta_2 = \{ \rho_1 \geqslant 2, n_i \geqslant 3, \rho_2 = 0, n_j \geqslant 3 \}.$$

Sur Δ_1, compte tenu du théorème 1' :

$$\begin{aligned} P(\rho_1, n_i, \rho_2, n_j) = {} & q_{\rho_1 - 2}(\varepsilon_{i-1}) \times q_{n_i - 3}(\varepsilon_i) \times q_{\rho_2 - 3}(\varepsilon_{j-1}) \times q_{n_j - 3}(\varepsilon_j) \\ & \times [\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i + O(F_1) + O(F_2)] \times [\varepsilon_i - \varepsilon_{j-1} + O(F_3) + O(F_4)] \\ & \times [\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j + O(F_5) + O(F_6)] \times [\varepsilon_j + O(F_7)] \end{aligned}$$

formule dans laquelle :

$$F_1 = P(X_1 < \varepsilon_{i-1},\ X_2 \in [\varepsilon_i,\ \varepsilon_{i-1}]) ; \qquad F_2 = P(X_1 \in [\varepsilon_i,\ \varepsilon_{i-1}],\ X_2 < \varepsilon_i) ;$$
$$F_3 = P(X_1 < \varepsilon_i,\ X_2 \in [\varepsilon_{j-1},\ \varepsilon_i]) ; \qquad F_4 = P(X_1 \in [\varepsilon_{j-1},\ \varepsilon_i],\ X_2 < \varepsilon_{j-1}) ;$$
$$F_5 = P(X_1 < \varepsilon_{j-1},\ X_2 \in [\varepsilon_j,\ \varepsilon_{j-1}]) ; \qquad F_6 = P(X_1 \in [\varepsilon_j,\ \varepsilon_{j-1}],\ X_2 < \varepsilon_j) ;$$
$$F_7 = P(X_1 < \varepsilon_j,\ X_2 < \varepsilon_j).$$

D'après (6) le produit des quatre derniers facteurs s'écrit :

$$(\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i)(\varepsilon_i - \varepsilon_{j-1})(\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j).\varepsilon_j(1 + O(\varepsilon_{i-1}))$$

Sur Δ_2, de manière analogue :

$$P(\rho_1,\ n_i,\ 0,\ n_j) = q_{\rho_1-2}(\varepsilon_{i-1}) \times q_{n_i-3}(\varepsilon_i) \times q_{n_j-3}(\varepsilon_j) \times (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i) \times (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j) \times \varepsilon_j \times (1 + 0(\varepsilon_{i-1})).$$

En appliquant la proposition 5′ :

$$\sum\sum\sum\sum_{\Delta_1 \cup \Delta_2} = \frac{\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1} \cdot \varepsilon_i} \cdot \frac{\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j}{\varepsilon_{j-1} \cdot \varepsilon_j}(1 + O(\varepsilon_{i-1}))$$

On montre d'autre part, en utilisant les autres formules de la proposition, supposées démontrées :

$$\sum\sum\sum\sum_{D_1 \cap \bar{\Delta}_1} = \left(\sum\sum\sum\sum_{\Delta_1}\right) \times O(\varepsilon_{i-1})$$

et

$$\sum\sum\sum\sum_{D_2 \cap \bar{\Delta}_2} = \left(\sum\sum\sum\sum_{\Delta_2}\right) \times O(\varepsilon_{i-1})$$

ce qui achève la démonstration dans le cas $j \geqslant i + 2$.

Le cas $j = i + 1$ se déduit du calcul précédent relatif à $\sum\sum\sum\sum_{D_2}$ en prenant $\varepsilon_{j-1} = \varepsilon_i$ et $\varepsilon_j = \varepsilon_{i+1}$. ▲

PROPOSITION 9. — *Posons*, $\forall N \geqslant 1$, $n(N) = 2^{N^{\alpha+1}}$, $\alpha > 0$.
Si l'hypothèse (6) *est vérifiée*, $\forall \alpha > 1$:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{S_{\tau_{1/[n(N)]^\alpha}}}{\text{Log } [n(N)]} = \alpha \qquad \text{presque sûrement}$$

Démonstration. — Considérons les suites

$$\{ \varepsilon_n^N \}_{n \geqslant 1} = \{ 1/N^\alpha,\ 1/(N+1)^\alpha,\ \ldots \}$$

et notons respectivement par $U'_N(n)$ et $U_N(n)$ les sommes encadrant à gauche et à droite $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$ dans la proposition 7, relatives aux suites $\{\varepsilon_n^N\}$. Il suffit de montrer que presque sûrement :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{U_N(n(N))}{\text{Log } n(N)} = \lim_{N\to\infty} \frac{U'_N(n(N))}{\text{Log } n(N)} = \alpha$$

Les démonstrations étant rigoureusement identiques pour U_N et pour U'_N nous donnons celle relative à U_N.

Notons $\tilde{E}[U_N(n)]$, $\tilde{E}[U_N^2(n)]$ les valeurs des moments d'ordre 1 et 2 de $U_N(n)$ dans le cas des variables indépendantes.

D'après la proposition 8 :

$$\frac{E[U_N(n(N))]}{\text{Log } n(N)} = \frac{\tilde{E}[U_N(n)]}{\text{Log } n(N)}\left(1 + O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)\right)$$

Comme, d'après [2], proposition 7 :

$$\tilde{E}(U_N(n)) = N^\alpha + \alpha\,[\text{Log}\,(n+N) - \text{Log}\,N] + O(1)$$

$$\frac{E[U_N(n(N))]}{\text{Log } n(N)} \sim \frac{N^\alpha + \alpha N^{\alpha+1}\,\text{Log } 2}{N^{\alpha+1}\,\text{Log } 2} \to \alpha \qquad \text{lorsque } N \to \infty$$

d'où la convergence en moyenne,

$$\begin{aligned} V\left(\frac{U_N(n)}{\text{Log } n}\right) &= \frac{1}{(\text{Log } n)^2}\left[E[U_N^2(n)] - E^2[U_N(n)]\right] \\ &= \frac{1}{(\text{Log } n)^2}\left\{\tilde{V}[U_N(n)]\left[1 + O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)\right] + \tilde{E}^2[U(n)] \times O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)\right\} \\ &\sim \frac{1}{N^2\,(\text{Log}^2)^2} + O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

car, d'après [2], proposition 7 :

$$\tilde{V}(U_N(n)) = N^{2\alpha} + 2\alpha\,[\text{Log}\,(n+N) - \text{Log}\,N] + O(1)$$

Comme $\alpha > 1$, la convergence presque sûre se déduit de l'inégalité de Tchebitchev et du lemme de Borel-Cantelli. ▲

De (7) on voit que la condition (6) peut être quelque peu élargie :

PROPOSITION 10. — *On suppose que la suite* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *définie au début du chapitre vérifie :*

$$\exists \beta > 0 \quad tq : \quad \limsup_{(x,z)\to 0} \frac{P(X_1 < x,\, X_2 \in [y, z])}{(\sup(x, z))^\beta (y - z)} < +\infty \tag{8}$$

Soit $\alpha > 0$ *et* $n(N) = 2^{N^{\alpha+1}}$

$$\forall \alpha > 0, \quad \alpha\beta > 1 : \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{S_{\tau_{1/[n(N)]^\alpha}}}{\text{Log } [n(N)]} = \alpha \qquad \textit{presque sûrement}$$

Démonstration. — On voit sans difficulté que les propositions 5′ et 8 peuvent être élargies en fonction de (8) en remplaçant $O(\varepsilon)$ par $O(\varepsilon^\beta)$ si $\beta < 1$. Tous les arguments de la proposition 9 restent valables en remplaçant $O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)$ par $O\left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}}\right)$. ▲

PROPOSITION 11. — *Si la suite* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *vérifie* (8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\text{Log } n} = 1 \qquad \textit{presque sûrement}.$$

Démonstration. — Montrons que pour $\varepsilon_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$, presque sûrement :

$$\alpha - 1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\text{Log } \tau_{\varepsilon_n}}{\text{Log } n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\text{Log } \tau_{\varepsilon_n}}{\text{Log } n} \leqslant \alpha \tag{9}$$

Soit $t > \alpha$. On a :

$$P\left[\frac{\text{Log } \tau_{\varepsilon_n}}{\text{Log } n} > t\right] = P(\tau_{\varepsilon_n} \geqslant n^t) \leqslant \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{n^t}{2}}$$

par l'indépendance à l'ordre deux.

Or $\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{n^t}{2}} = [(1 - 1/n^\alpha)^{n^\alpha}]^{\frac{1}{2}.n^{t-\alpha}} \leqslant a^{n^{t-\alpha}}$, $a < 1$, pour n assez grand,

d'où $\sum_{n=n_0}^{\infty} P\left[\frac{\text{Log } \tau_{\varepsilon_n}}{\text{Log } n} > t\right] \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} a^{n^{t-\alpha}}$, $a < 1$.

Donc, si $\alpha > t$, la convergence de la série figurant au deuxième membre entraîne, par le lemme de Borel-Cantelli, la deuxième inégalité de (9). Soit maintenant $t < \alpha$.

$$P\left[\frac{\text{Log } \tau_{\varepsilon_n}}{\text{Log } n} \leqslant t\right] = 1 - P(\tau_{\varepsilon_n} \geqslant n^t)$$

Or d'après [*1*], théorème 1.4.1 :

$$P(\tau_{\varepsilon_n} \geqslant n^t) = P(X_1 \geqslant \varepsilon_n, \ldots, X_{n^t} \geqslant \varepsilon_n) \geqslant 1 - n^t P(X_1 \leqslant \varepsilon_n)$$

Donc $1 - P(\tau_{\varepsilon_n} \geqslant n^t) \leqslant n^{t-\alpha}$ et :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P\left[\frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_n}}{\operatorname{Log} n} \leqslant t\right] \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{t-\alpha} < \infty \qquad \text{si} \quad t < \alpha - 1$$

De même que précédemment, par Borel-Cantelli, on obtient l'inégalité de droite de (9).

De (9) on déduit, si $n(N) = 2^{N^{\alpha+1}}$, que presque sûrement :

$$\alpha - 1 \leqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N)}}}{\operatorname{Log} n(N)} \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N)}}}{\operatorname{Log} n(N)} \leqslant \alpha$$

et comme :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n(N)}{\operatorname{Log} n(N+1)} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\alpha+1} = 1\,,$$

presque sûrement, si $\alpha\beta > 1$:

$$\frac{\alpha - 1}{1} \leqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N)}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N+1)}}} \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N)}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N+1)}}} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$1 \leqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{S_{\tau_{\varepsilon_{n(N)}}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N)}}} \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{S_{\tau_{\varepsilon_{n(N+1)}}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N+1)}}} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

D'autre part, si $\tau_{\varepsilon_{n(N)}} \leqslant m \leqslant \tau_{\varepsilon_{n(N+1)}}$, les suites S_n et τ_{ε_n} étant croissantes :

$$\frac{S_{\tau_{\varepsilon_{n(N)}}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N+1)}}} \leqslant \frac{S_m}{\operatorname{Log} m} \leqslant \frac{S_{\tau_{\varepsilon_{n(N+1)}}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n(N)}}}$$

En combinant les inégalités précédentes on obtient que presque sûrement :

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\operatorname{Log} n} \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{S_n}{\operatorname{Log} n} \leqslant \left[\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right]^2$$

En faisant tendre α vers l'infini on obtient le résultat annoncé. ▲

THÉORÈME 3. — *Soit* $\{X_n\}_n$ *une suite stationnaire de variables aléatoires m-dépendantes, dont la loi marginale vérifie, au voisinage de* O :

$$P(X_1 < u) - f_0 . u = 0(u^{1+\gamma}), \qquad \gamma > 0\,. \tag{10}$$

On suppose qu'il existe $\beta > 0$ *t.q* $\forall 1 < i \leqslant m$:

$$\limsup_{(x,z)\to 0} \frac{P(X_1 < x, X_i[y, z])}{[\sup(x, z)]^{\beta}(y - z)} < +\infty$$

Alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{\operatorname{Log} n} = \dfrac{1}{f_0}$ *presque sûrement.*

Démonstration.— On voit tout d'abord que la proposition 11 se généralise sans difficulté au cas où l'hypothèse de loi marginale uniforme est remplacée par l'hypothèse (10). On a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\operatorname{Log} n} \to \frac{1}{f_0} \qquad \text{presque sûrement .}$$

En effet, les propositions 7, 8, 9, 10 conduisant au résultat peuvent être immédiatement modifiées en conséquence.

Soient alors, pour $K = 1, \ldots, m$, les suites $Y^K = \{ Y_n^K \}_{n \geqslant 1}$:

$$Y_1^K = \inf \{ X_1, \ldots, X_K \}$$
$$Y_n^K = \inf \{ X_{K+(n-2)m+1}, X_{K+(n-2)m+2}, \ldots, X_{K+(n-1)m} \} \qquad \text{si} \quad n \geqslant 2$$

En notant S_n^K les sommes des minimas associées aux suites Y^K, on a :

$$S_{Nm} = S_N^1 + S_N^2 + \ldots + S_N^m$$

Il est clair que si presque sûrement :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N^m}{\operatorname{Log} N} = l$$

alors, $\forall K$, $K = 1, \ldots, m-1$, on a également :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N^K}{\operatorname{Log} N} = l \qquad \text{presque sûrement}$$

et donc :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_{Nm}}{\operatorname{Log} N} = ml \qquad \text{presque sûrement.}$$

Supposons avoir démontré, comme nous le ferons, ci-après :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N^m}{\operatorname{Log} N} = \frac{1}{m \times f_0} \qquad \text{p. s.} \tag{11}$$

alors

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_{Nm}}{\operatorname{Log} N} = \frac{1}{f_0} \qquad \text{presque sûrement .}$$

Si n est tel que $Nm \leqslant n \leqslant (N+1)m$:

$$\frac{S_{Nm}}{\operatorname{Log} (N+1)m} \leqslant \frac{S_n}{\operatorname{Log} n} \leqslant \frac{S_{(N+1)m}}{\operatorname{Log} Nm}$$

et il suffit de faire tendre N vers l'infini pour obtenir le résultat recherché.

Démontrons maintenant (11).

Posons $Y_n^m = Y_n$. La suite $\{ Y_n \}_{n \geqslant 1}$ est stationnaire et vérifie la propriété d'indépendance à l'ordre deux.

Montrons qu'elle vérifie (10) avec $m.f_0$ à la place de f_0. On a :

$$P\{ Y_1 < u \} = 1 - P(X_1 \geqslant u, \ldots, X_m \geqslant u)$$

D'après [*1*] théorème 1.4.1 :

$$| 1 - P(X_1 \geqslant u, \ldots, X_m \geqslant u) - mP(X_1 < u) | \leqslant K \sum_{i=2}^{m} P(X_1 < u, X_i < u) \leqslant K u^{1+\beta}$$

Par conséquent :

$$P\{ Y_1 < u \} - m f_0 u = O(u^{1 + \sup(\beta, \gamma)})$$

au voisinage de $u = 0$.

Montrons que la suite $\{ Y_n \}$ vérifie (8) :

$$P(Y_1 < x, Y_2 < z) = 1 - P(\inf_{i=1,\ldots,m} X_i \geqslant x) - P(\inf_{i=m+1,\ldots,2m} X_i \geqslant z) + P(\inf_{i=1,\ldots,m} X_i \geqslant x, \inf_{j=m+1,\ldots,2m} X_j \geqslant z)$$

En appliquant à nouveau le théorème 1.4.1 de [*1*] :

$$P(Y_1 < x, Y_2 < z) = \sum_{k=2}^{m} (-1)^K \tilde{S}_{K,2m} + \sum_{K=m+1}^{2m} (-1)^K S_{K,2m}.$$

$\tilde{S}_{K,2m}$ désignant la somme :

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_e < i_{e+1} < \ldots \leqslant i_K \leqslant 2m} P(X_{i_1} < x, \ldots, X_{i_e} < x, X_{i_{e+1}} < z, \ldots, X_{i_K} < z)$$

des termes mixtes d'ordre K. Pour $K \geqslant m + 1$, $\tilde{S}_{K,2m} = S_{k,2m}$.

Soient, pour $y < z$ les différences :

$$t(i_1, \ldots, i_K) = P(X_1 < x, \ldots, X_{ie} < x, X_{i_{e+1}} < z, \ldots, X_{i_k} < z) - P(X_{i_1} < x, \ldots, X_{i_e} < x, Y_{i_{e+1}} < y, \ldots, X_{i_K} < y)$$

$$| t(i_1, \ldots, i_K) | \leqslant \sum_{s=i_{e+1}}^{i} P(X_{i_1} < x, X_s \in [y, z])$$

Comme :

$$P(Y_1 < x, Y_2 \in [y, z]) = P(Y_1 < x, Y_2 < z) - P(Y_1 < x, Y_2 < y)$$

et, si $s - i_1 \geqslant m + 1$,

$$P(X_{i_1} < x, X_s \in [y, z]) = P(X_1 < x) \times P(X_1 \in [y, z])$$

la formule (8) se déduit des hypothèses en sommant les $| t(i_1, \ldots, i_k) |$. ▲

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. GALAMBOS, *The asymptotic theory of extreme order statistics*. John Wiley, 1978.

[2] P. DEHEUVELS, Valeurs extrémales d'échantillons croissants d'une variable aléatoire réelle. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **X**, n° 1, 1974, p. 89-114.

[3] P. DEHEUVELS, Majoration et minoration presque sûre optimale des éléments de la statistique ordonnée d'un échantillon croissant de variables aléatoires indépendantes. *Rendi Conti, Acad. Naz. dei Lincei*, VIII, t. **LVI**, f. 5, 1974, p. 707-712.

[4] H. HEBNA-GRABOWSKA, D. SZYNAL, An almost sure invariance principle for the partial sums of infima of independent random variables. *Ann. Probability*, t. **7**, 1979, p. 1036-1045.

(Manuscrit reçu le 19 mars 1981)