ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN DIEBOLT

Sur la loi du maximum de certains processus gaussions sur le tore

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, n° 2 (1981), p. 165-179

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_2_165_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section **B** :
Vol. XVII, n° 2-1981, p. 165-179. *Calcul des Probabilités et Statistique*.

Sur la loi du maximum de certains processus gaussiens sur le tore

par

Jean DIEBOLT

22, rue Tournefort, 75005 Paris (Tél. : 707 76 20)

§ 1. INTRODUCTION

1.1 Dans [*1*], S. Berman établit que, si $X = (X_t, t \geqslant 0)$ est un processus gaussien stationnaire, X_t étant centrée réduite, de covariance $r(t)$ de classe C^2, alors, pour tout $C > 0$, on a l'équivalent suivant, quand a tend vers l'infini :

$$(1.1.1) \qquad P(\sup_{[0,C]} X_t \geqslant a) \sim C(-r''(0))^{1/2}(2\pi)^{-1}e^{-a^2/2}$$

Sa démonstration utilise un lemme de D. Slepian ([*6*] [*10*]) selon lequel, si les covariances $r_1(t)$ et $r_2(t)$ de deux processus gaussiens stationnaires Y_1 et Y_2 sont liées par l'inégalité $r_1(t) \leqslant r_2(t)$ sur l'intervalle $[-C, C]$, alors les lois des maxima sont liées par :

$$(1.1.2) \qquad P(\sup_{[0,C]} Y_1(t) \geqslant a) \geqslant P(\sup_{[0,C]} Y_2(t) \geqslant a).$$

S. Berman compare, à l'aide de ce lemme, pour t assez petit, le processus X au processus Y de covariance $\cos [(-r''(0))^{1/2}t]$.

Il a également besoin de la formule de Rice ([*3*]) qui fournit l'espérance du nombre de croisements en montant du niveau a par le processus X sur l'intervalle $[0, C]$, ainsi que de formules de [*2*].

1.2 J'ai cherché à retrouver (1.1.1) par des considérations de nature géométrique, et à déterminer un encadrement précisant (1.1.1), et il est apparu que (voir [*4*] [*5*]) :

a) J'obtenais des renseignements nouveaux pour les processus gaussiens sur le tore π, du type suivant :

$$X_t^N = \mathrm{Re}\left(\sum_1^N b_j\zeta_j e^{ijt}\right), \qquad t \in \pi, \ N \geqslant 1 \tag{1.2.1}$$

les variables aléatoires complexes $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ étant normales réduites, indépendantes deux à deux. Pour simplifier, on suppose les b_j non nuls.

La loi du maximum Z_N de $X_N = (X_t^N, t \in \pi)$ sur π admet une densité analytique sur $\mathbb{R}^{+*}$, nulle sur $\mathbb{R}^-$, soit f_N, qui vérifie, pour $a > 0$:

$$f_N(a) \geqslant A_{1,N}A_N^{-3}ae^{-a^2/2A_N^2}q_0(B_{G_N}(a/M)) \tag{1.2.2}$$

$$f_N(a) \leqslant A_{1,N}A_N^{-3}ae^{-a^2/2A_N^2}[\Phi(av) + (2\pi)^{-1/2}(av)^{-1}e^{-a^2v^2/2}]. \tag{1.2.3}$$

Les notations employées ici sont les suivantes :

$$A_N^2 = r(0) = \sum_1^N b_j^2 \tag{1.2.4}$$

$$A_{1,N}^2 = |\, r^{(2)}(0)\,| = \sum_1^N j^2b_j^2$$

$$A_{2,N}^2 = r^{(4)}(0) = \sum_1^N j^4b_j^2$$

$$v = A_{1,N}^2A_N^{-1}(A_N^2A_{2,N}^2 - A_{1,N}^4)^{1/2} \tag{1.2.5}$$

$$M^2 = \sup_\pi\,[A_N^2 - A_N^{-2}r_N(t)^2 - A_{1,N}^{-2}r_N'(t)^2][1 - A_N^{-2}r_N(t)]^{-2} \tag{1.2.6}$$

q_0 est la mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{G}_N$, qui est l'espace réel sous-jacent à un espace isomorphe à $\mathbb{C}^{N-1}$ (muni de son produit scalaire

$$\langle z, z' \rangle = \mathrm{Re}\left(\sum_1^{N-1} z_j\overline{z_j'}\right))$$

Φ est la fonction de répartition des variables aléatoires réelles gaussiennes centrées réduites.

b) La majoration (1.2.3) passe à la limite quand N tend vers l'infini, pourvu que la série $\sum_1^\infty n^4b_n^2$ converge (on supprime tous les indices N dans l'expression obtenue dans ce cas). De plus, la fonction de répartition F_N de Z_N converge alors uniformément vers celle de Z, soit F_Z.

c) Par contre, la minoration (1.2.2) dégénère. Ceci est dû essentiellement au fait que la loi conjointe μ des variables aléatoires ζ_n n'est pas une mesure; μ est la mesure gaussienne cylindrique canonique de l'espace de Hilbert

$$\mathbb{X} = l^2 = \left\{ z = \sum_1^\infty z_n e_n \mid \langle\langle z, z \rangle\rangle = \| z \|^2 = \sum_1^\infty | z_n |^2 < \infty \right\}$$

Pour pallier à cette insuffisance théorique, j'introduis l'espace $\mathbb{E}$ des suites $z = \sum_1^\infty z_n e_n$ telles que la série $\sum_1^\infty n^{-2} | z_n |^2$ converge; je munis $\mathbb{E}$ du produit scalaire $\langle z, z' \rangle = \operatorname{Re}(z, z')$, avec $(z, z') = \sum_1^\infty n^{-2} z_n \overline{z'_n}$.

L'image de μ par l'injection de Hilbert-Schmidt : $\mathbb{X} \to \mathbb{E}$ est alors une vraie mesure que je note p. Nous verrons en 1.3 la minoration obtenue, sous l'hypothèse $\sum_1^\infty n^6 b_n^2 < \infty$.

d) Il n'apparaît guère possible d'utiliser le résultat susmentionné de D. Slepian pour affaiblir l'hypothèse $\sum_1^\infty n^6 b_n^2 < \infty$ $\left(\text{ou } \sum_1^\infty n^4 b_n^2 < \infty \text{ dans } b)\right)$.

L'hypothèse de S. Berman est équivalente à $\sum_1^\infty n^2 b_n^2 < \infty$.

e) Je n'ai pas réussi à prouver l'analyticité de la densité f sur $\mathbb{R}^{+*}$ de Z sous l'hypothèse $\sum_1^\infty n^6 b_n^2 < \infty$. Notons que la densité de la loi du maximum du processus $b_0 \xi_0 + X_t$ est analytique sur $\mathbb{R}$ si $b_0 \neq 0$, et si ξ_0 est une variable aléatoire normale indépendante des ξ_n, $n \geqslant 1$, et qu'elle vérifie des inégalités analogues à (1.2.2) et (1.2.3).

f) Enfin, il me semble possible d'obtenir par des méthodes analogues des inégalités intéressantes pour le maximum sur $[0, C]$ d'un processus gaussien stationnaire de covariance assez régulière, soit en appliquant les mêmes méthodes au développement de Karhunen-Loève du processus sur $[0, C]$, soit en les adaptant pour utiliser la formule $X_t = \int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda) e^{it\lambda} dB(\lambda)$.

Remarquons que les résultats indiqués en *a*) et *b*) sont établis dans [*4*] [*5*]; ils sont reconstitués en partie dans le présent article.

1.3 Exposons comment la minoration cherchée est un corollaire d'un changement de variable pour une mesure gaussienne en dimension infinie. Cette formule de changement de variable a un intérêt propre parce qu'elle ne résulte pas de théorèmes connus (en particulier, ceux de [*9*]).

Transposant l'injection canonique de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{E}$, j'obtiens, en identifiant $\mathbb{X}'$ à $\mathbb{X}$, un triplet $\mathbb{E}' \to \mathbb{X} \to \mathbb{E}$. La forme bilinéaire de dualité entre $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ prolonge le produit scalaire de $\mathbb{X}$. On la notera encore $\langle\langle x, x' \rangle\rangle$.

On peut alors écrire :

(1.3.1) $$X_t = \langle\langle f(t), \zeta \rangle\rangle$$

avec :

(1.3.2) $$f(t) = \sum_1^\infty b_n e^{-int} e_n \quad \text{et} \quad \zeta = \sum_1^\infty \zeta_n e_n$$

De plus :

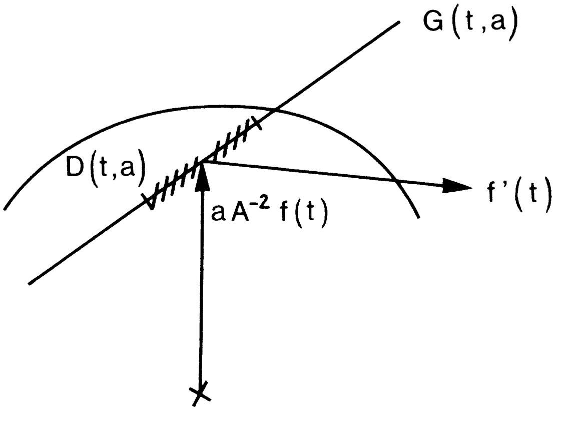
(1.3.3) $$F_Z(a) = P(\sup_\pi \langle\langle f(t), \zeta \rangle\rangle \leqslant a) = p(C(a))$$

avec

(1.3.4) $$C(a) = \{ z \in \mathbb{E} \mid \sup_\pi \langle\langle f(t), z \rangle\rangle \leqslant a \}.$$

L'idée est d'utiliser la stationarité du processus pour obtenir une représentation intégrale utilisable de $F'_Z(a)$. Plus précisément, la dérivée $F'_Z(a)$ en $a > 0$ devrait s'exprimer à l'aide d'une intégrale portant sur la frontière $F(a)$ de $C(a)$, si celle-ci est assez régulière.

Or, cette frontière fait partie de l'enveloppe $E(a)$ de la famille paramétrée en $t \in \pi$ des hyperplans fermés de $\mathbb{E}$ d'équation $\langle\langle f(t), z \rangle\rangle = a$; cette



enveloppe est définie comme la réunion de ses sous-espaces affines caractéristiques $G(t, a)$:

(1.3.5) $\quad G(t, a) = \{ z \in \mathbb{E} \mid \langle\langle f(t), z \rangle\rangle = a, \ \langle\langle f'(t), z \rangle\rangle = 0 \}$

Les vecteurs non nuls $f(t)$ et $f'(t)$, étant orthogonaux dans $\mathbb{X}$, sont indépendants, et $G(t, a)$ est un sous-espace affine fermé de codimension 2 de $\mathbb{E}$.

De plus, si $V_t z = \sum_1^{\infty} z_n e^{-int} e_n$, V_t est un groupe à un paramètre de transformations unitaires de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{X}$, qui envoient $G(s, a)$ sur $G(s + t, a)$, et, par suite, $D(s, a) = G(s, a) \cap C(a)$ sur $D(s + t, a)$, car $C(a)$ est invariant par V_t; je montre au § 2.2 que $D(s, a)$ est un convexe fermé de $G(s, a)$, égal à $G(s, a) \cap F(a)$, et que $F(a)$ est réunion des $D(s, a)$, lorsque s décrit π, lesquels sont disjoints deux à deux, à des ensembles négligeables près; l'idée naturelle est d'essayer de reconstituer $p(C(a))$ à partir de mesures faites sur les seuls convexes $D(0, b)$, $0 \leqslant b \leqslant a$: soit $S(a)$ la réunion des $D(0, b)$, $0 \leqslant b \leqslant a$; c'est un convexe de l'hyperplan fermé

$$\mathbb{F} = \{ z \in \mathbb{E} \mid \langle\langle f'(0), z \rangle\rangle = 0 \}$$

de $\mathbb{E}$, et, si q désigne la mesure gaussienne sur $\mathbb{F}$ associée au triplet

$$\mathbb{F}' \to \mathbb{X} \cap \mathbb{F} = \mathbb{Y} \to \mathbb{F}$$

induit par $\mathbb{E}' \to \mathbb{X} \to \mathbb{E}$, on trouve :

(1.3.6) $$p(C(a)) = (2\pi)^{1/2} A_1^{-1} \int_{S(a)} \varphi(z') dq(z')$$

avec

(1.3.7) $$\varphi(z) = |\Lambda(z)| = |\langle \Lambda, z \rangle| = \left| \sum_1^{\infty} n^{-2} \Lambda_n z_n \right|$$

avec $\quad \varphi(z) = |\Lambda(z)| = |\langle\langle f'_N(0), d/dt(V_t z)_{|t=0} \rangle\rangle| \qquad$ pour $z \in \mathbb{E}_N$

(voir ci-dessous).

En fait, cette formule est un cas particulier d'une formule de changement de variable établie au § 3 : si $T : \pi \times S(a) \to C(a)$ est définie par

(1.3.8) $$T(t, z') = V_t z'$$

on a le

THÉORÈME. — *La mesure transportée* $T^{-1}p$, *définie sur* $\pi \times S(a)$, *est la mesure* $(2\pi)^{-1/2} A_1^{-1} \varphi(z') dt \otimes dq(z')$. (*On montre en* 2.3 *et* 2.4 *que* T^{-1} *est définie et mesurable sur les complémentaires d'ensembles de mesure nulle*).

Cette formule se démontre à partir d'une formule analogue établie pour les sous-espaces de dimension finie $\mathbb{E}_N = \mathbb{C}^N \times \{ 0 \}$ de $\mathbb{E}$, en faisant tendre N vers l'infini.

Remarquons que cette formule peut être considérée comme une formule de Jacobi dans $(\mathbb{E}, p)$, et que T ne satisfait pas aux conditions de l'article de R. Ramer [9], de sorte qu'elle présente un intérêt en elle-même.

On en tire le

COROLLAIRE. — *Si* $\sum_{1}^{\infty} n^6 b_n^2$ *converge, la loi de* Z *admet une densité* f *vérifiant pour* $a > 0$:

$$f(a) \geqslant a\rho A^{-2} e^{-a^2/2A^2} q_0(B_{\mathbb{G}}(a/M)) \tag{1.3.9}$$

avec $\rho = A_1/A$; $\mathbb{G}$ *est le sous-espace vectoriel fermé de codimension deux de* $\mathbb{E}$ *parallèle à* $G(0, a)$, *et* q_0 *la mesure gaussienne associée au triplet*

$$\mathbb{G}' \to \mathbb{X} \cap \mathbb{G} \to \mathbb{G} ;$$

$B_{\mathbb{G}}(\rho)$ *est la boule, pour la norme* $| \,.\, |$, *de rayon* ρ *dans* $\mathbb{G}$; M *est défini comme en* (1.2.6).

1.4 Le § 2 est consacré à l'étude de la situation géométrique dont la description a été esquissée en 1.3, le § 3 à la démonstration du théorème, le § 4 à celle du corollaire.

§ 2. LE CADRE GÉOMÉTRIQUE

2.1. La frontière F(a) de C(a).

LEMME 2.1.1. — *a) Pour tout* $a > 0$, *la frontière* $F(a)$ *de* $C(a)$ *est l'ensemble des* $z \in \mathbb{E}$ *tels que* $\sup_{\pi} \langle\langle f(t), z \rangle\rangle = \max_{\pi} \langle\langle f(t), z \rangle\rangle = a$.

b) On déduit de a) que la famille $\{ F(b), 0 \leqslant b \leqslant a \}$ *constitue une partition de* $C(a)$.

2.2. L'enveloppe E(a) et l'ensemble F(a).

LEMME 2.2.1. — *La frontière* $F(a)$ *est contenue dans l'enveloppe* $E(a)$.

LEMME 2.2.2. — *a) Pour tout* $t \in \pi$, $D(t, a) = V_t D(0, a)$.
b) On déduit de a) que $S(t, a) = V_t S(a)$.

Démonstration. — Puisqu'il est clair que $G(t, a) = V_t G(0, a)$ pour $t \in \pi$, il reste à montrer que $V_tF(a) = F(a)$. Or, on a l'inclusion $V_tF(a) \subset F(a)$ pour tout $t \in \pi$ puisque, si $\max_s \langle\langle f(s), z \rangle\rangle = a$, alors on a

$$\begin{aligned}\max_s \langle\langle f(s), V_t z \rangle\rangle &= \max_s \langle\langle V_t f(s-t), V_t z \rangle\rangle \\ &= \max_s \langle\langle f(s-t), z \rangle\rangle = \max_s \langle\langle f(s), z \rangle\rangle = a\,.\end{aligned}$$

Mais alors, on a aussi $V_{-t}V_tF(a) = F(a) \subset V_{-t}F(a)$ pour $t \in \pi$. □

LEMME 2.2.3. — *On a l'égalité* $D(t, a) = C(a) \cap G(t, a)$.

LEMME 2.2.4. — $C(a) = \mathrm{U}_{t\in\pi} S(t, a)$.

Remarquons qu'il serait faux d'affirmer : $S(t, a) = C(a) \cap V_t\mathbb{F}$.

2.3. **On paramètre l'enveloppe** $E(a)$.

Nous allons considérer une base orthonormée dans $\mathbb{E}$ du sous-espace vectoriel de codimension deux $\mathbb{G}$ parallèle à $G(0, a)$, soit $(F_n)_{n\geqslant 2}$; si on pose $F_n(t) = V_tF_n (n \geqslant 2)$, $(F_n(t))_{n\geqslant 2}$ est alors une base du sous-espace vectoriel parallèle à $G(t, a)$. Le paramétrage cherché est défini par :

$$(2.3.1) \qquad m_a(t, u) = aA^{-2}f(t) + \sum_2^\infty u_nF_n(t) = V_t m_a(0, u)$$

pour $t \in \pi$, $u \in \mathbb{Z} = l^2(\{ n \geqslant 2 \})$.

Remarquons que $\left| \sum_2^\infty u_nF_n(t) \right| = \| u \|_{\mathbb{Z}} = \| u \|$.

Soit $D(a)$ le convexe de $\mathbb{Z}$, ensemble des $u \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$(2.3.2) \qquad \sum_2^\infty u_n \langle\langle f(t), F_n \rangle\rangle \leqslant a(1 - r(t)A^{-2}) \qquad \text{pour tout } t \in \pi$$

On a : $D(0, a) = m_a(0, D(a))$. Soit $D(a)^0$ l'intérieur de $D(a)$ dans $\mathbb{Z}$. Nous allons montrer au lemme 2.3.4 que $D(a)^0$ n'est pas vide :

LEMME 2.3.1. — *Pour tout* $n \geqslant 2$, *le rapport*

$$v_n(t) = \langle\langle f(t), F_n \rangle\rangle (1 - r(t)A^{-2})^{-1}\,,$$

qui est bien défini pour t $\neq 0$, *tend vers une limite finie lorsque t tend vers zéro dans* π. *On prolonge* v_n *par continuité, et on note encore* v_n *la fonction obtenue.*

Démonstration. — Lorsque t tend vers zéro, numérateur et dénominateur de $v_n(t)$ tendent vers zéro; plus précisément, on a :

$$1 - r(t)\mathrm{A}^{-2} = \rho^2 t^2/2 + 0(t^2)\,; \qquad \rho \neq 0\,.$$

D'autre part, par construction, on a $\langle\langle f(0), \mathrm{F}_n \rangle\rangle = \langle\langle f'(0), \mathrm{F}_n \rangle\rangle = 0$ pour $n \geqslant 2$, et enfin, $\langle\langle f(.), \mathrm{F}_n \rangle\rangle$ est au moins de classe C^2. □

Soit $v(t)$ le vecteur $\sum_2^{\infty} v_n(t)e_n$ de $\mathbb{Z}$, et $\| v(t) \|$ sa norme :

LEMME 2.3.2. — *Le nombre* $\mathrm{M} = \max_{\pi} \| v(t) \|$ *est strictement positif. Ce nombre* M *est donné par l'analogue de la formule* (1.2.6).

La démonstration de ce lemme utilise un lemme simple, qui nous servira aussi plus loin :

LEMME 2.3.3. — *Si* $t \neq 0$ *dans* π, *les vecteurs* $f(t)$, $f(0)$, $f'(0)$ *sont linéairement indépendants.*

En conséquence du lemme 2.3.2, nous obtenons le

LEMME 2.3.4. — *Le convexe* $\mathrm{D}(a)^0$ *de* $\mathbb{Z}$ *n'est pas vide pour* $a > 0$, *car il contient la boule ouverte de centre* 0, *de rayon* a/M, *de* $\mathbb{Z}$.

Soit $\mathrm{D}(t, a)^0 = \mathrm{int}_{\mathrm{G}(t,a)}\, \mathrm{D}(t, a) = m_a(t, \mathrm{D}(a)^0)$; on a évidemment

$$\mathrm{D}(t, a)^0 = \mathrm{V}_t \mathrm{D}(0, a)^0$$

et surtout :

LEMME 2.3.5. — *Si* $b \neq b'$ *ou si* $t \neq t'$ *dans* π, *alors* $\mathrm{D}(t, b)^0 \cap \mathrm{D}(t', b')^0 = \emptyset$.

Démonstration. — *a*) Si $b \neq b'$, c'est immédiat, puisque $\mathrm{D}(t, a) \subset \mathrm{F}(a)$ pour $t \in \pi$.

b) Si $b = b' > 0$ et $t \neq t'$ dans π, si $z \in \mathrm{D}(t, b)^0 \cap \mathrm{D}(t', b')^0$, alors $z = m_a'(t, u)$ avec $u \in \mathrm{D}(b)^0$ et, par suite, si $\tau = t' - t$ $(\tau \neq 0)$:

$$\langle\langle f(\tau), m_b(0, u) \rangle\rangle = \sum_2^{\infty} u_n v_n(\tau) = b > 0$$

de sorte que $v(\tau)$ n'est pas nul. D'après le lemme 2.3.3, l'hyperplan affine fermé de $\mathbb{E}$ d'équation $\langle\langle f(\tau), z \rangle\rangle = b$ rencontre $\mathrm{G}(0, b)$, qu'il partage en trois régions définies respectivement par $\langle\langle f(\tau), z \rangle\rangle < b$, $\langle\langle f(\tau), z \rangle\rangle > b$, $\langle\langle f(\tau), z \rangle\rangle = b$. Or, $z = m_b(t, u)$ appartient à la dernière de ces régions et, par suite, dans tout voisinage de u dans $\mathbb{Z}$, on trouve des points u' qui vérifient $\sum_{2}^{\infty} u'_n v_n(\tau) > b$, ce qui est absurde, puisque $u \in \mathrm{D}(b)^0$. $\square$

En conséquence, si on désigne par $\mathrm{S}(t, a)^0$ la réunion des ensembles $\mathrm{D}(t, b)^0$, $0 \leqslant b \leqslant a$, on obtient :

LEMME 2.3.6. — *Si $t \neq t'$ dans π, alors* $\mathrm{S}(t, a)^0 \cap \mathrm{S}(t', a)^0 = \varnothing\,(a > 0)$.

Remarque. — $\mathrm{S}(t, a)^0$ n'est autre que l'intérieur de $\mathrm{S}(t, a)$ dans $\mathrm{V}_t\mathbb{F}$.

LEMME 2.3.7. — *On a l'égalité* $q(\mathrm{S}(a)^0) = q(\mathrm{S}(a))$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 5 de [*7*], p. 132.

2.4. **L'application** $\mathrm{T} : \pi \times \mathrm{S}(a)^0 \to \mathrm{C}(a)$ **(définie par** 1.3.8**).**

Elle est continue, injective d'après les résultats de 2.3 ; d'après un théorème de Kuratowski ([*8*]), T^{-1} est mesurable. Que l'image de T diffère d'un ensemble de mesure nulle de $\mathrm{C}(a)$ résulte du lemme 3.1.2 et du passage à la limite permis par les lemmes suivants.

2.5. **Les projections** P_N **et** Q_N **sur** E_N **et sur** $\mathrm{F}'_\mathrm{N} = f_\mathrm{N}(0)^\perp$.

On note $\mathrm{P}_\mathrm{N} z = z_\mathrm{N}$ la projection orthogonale canonique de $\mathbb{X}$ sur $\mathbb{E}_\mathrm{N}$, et de la même manière son extension mesurable à $\mathbb{E}$ (voir par exemple [*9*]) ; on note aussi Q_N l'extension mesurable à $\mathbb{F}$ de la projection orthogonale de $\mathbb{Y}$ sur $\mathbb{F}_\mathrm{N}$.

On note $p_\mathrm{N} = \mathrm{P}_\mathrm{N} p$ la mesure projetée sur $\mathbb{E}_\mathrm{N}$, et $q_\mathrm{N} = \mathrm{Q}_\mathrm{N} q$ celle sur $\mathbb{F}_\mathrm{N}$. Il vient ainsi le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{E}, p) \arrow[d, "\mathrm{P}_\mathrm{N}"] & (\mathbb{F}, q) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Q}_\mathrm{N}"] & \\
(\mathbb{X}, \mu) \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "\mathrm{P}_\mathrm{N}"'] & & & (\mathbb{Y}, \nu) \arrow[ul, "j/\mathbb{Y}"'] \arrow[dl, "\mathrm{Q}_\mathrm{N}"] \\
 & (\mathbb{E}_\mathrm{N}, p_\mathrm{N}) \arrow[r, "\mathrm{R}_\mathrm{N}"] & (\mathbb{F}_\mathrm{N}, q_\mathrm{N}) &
\end{tikzcd}$$

avec $\mathrm{R}_\mathrm{N} z = z - \langle\langle \mathrm{F}_{1,\mathrm{N}}, z \rangle\rangle \mathrm{F}_{1,\mathrm{N}}$ pour $z \in \mathbb{E}_\mathrm{N}$, $\mathrm{F}_{1,\mathrm{N}} = f'_\mathrm{N}(0) / \| f'_\mathrm{N}(0) \|$ (Notant $f_\mathrm{N}(t) = \mathrm{P}_\mathrm{N} f(t)$).

Posons ensuite

$$\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{N}(a) = \{ z \in \mathbb{E} \mid \max_\pi \langle\langle f_\mathrm{N}(t), z \rangle\rangle \leqslant a \} = \mathrm{P}_\mathrm{N}^{-1}(\mathrm{C}_\mathrm{N}(a))$$

$$\tilde{\mathrm{G}}_\mathrm{N}(a) = \{ z \in \mathbb{E} \mid \langle\langle f_\mathrm{N}(0), z \rangle\rangle = a, \langle\langle f'_\mathrm{N}(0), z \rangle\rangle = 0 \} = \mathrm{Q}_\mathrm{N}^{-1}(\mathrm{G}_\mathrm{N}(a)),$$

puis $\tilde{D}_N(t, a)$, $\tilde{S}_N(t, a)$, $D_N(t, a)^{0\sim}$, $S_N(t, a)^{0\sim}$, enfin définissons

$$T_N : \pi \times S_N(a)^0 \to C_N(a) \text{ par } T_N(t, z') = V_t z'.$$

T_N est une application de classe C^1, sa dérivée est donnée par :

$$T'_N(t, z')(s, y) = V_t(y + sg(z'))$$

avec :

$$g(z') = d/dt(V_t z')_{|t=0}$$

c'est un isomorphisme linéaire si et seulement si $g(z') \notin \mathbb{F}_N$:

LEMME 2.5.1. — *Si $u \in D_N(a)^0$, alors $g(m_{a,N}(0, u)) \notin F_N$.*

Ici, $m_{a,N}$ est défini comme m_a en (2.3.1), à partir d'une base orthonormée de $\mathbb{E}_N$, soit $(F_{j,N}; 0 \leqslant j \leqslant 2N - 1)$, telle que $F_{0,N} = f_N(0)/\| f_N(0) \|$; $F_{1,N} = f'_N(0)/\| f'_N(0) \|$, de sorte que $F_{j,N} \in \mathbb{F}_N$ pour $1 \leqslant j \leqslant 2N - 1$; on prend en particulier :

$$F_{2,N} = \rho(\mu A_N)^{-1} f_N(0) + (\mu A_N)^{-1} f''_N(0) \tag{2.5.1}$$

avec :

$$\rho = A_N(A_{1,N})^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mu = (A_N^2 A_{2,N}^2 - A_{1,N}^4)^{1/2}(A_N A_{1,N})^{-1}.$$

Démonstration. — *a*) Soit $P_N(a)$ le demi-espace ouvert de $\mathbb{R}^{2 \leqslant j \leqslant 2N-1}$ défini par l'inéquation

$$\mu u_2 < \rho A_N^{-1} a \tag{2.5.2}$$

Montrons qu'on a l'inclusion $D_N(a)^0 \subset P_N(a)$: soit $u \in D_N(a)^0$; considérons la fonction $h_u(t) = \langle\langle m_{a,N}(0, u), f(t) \rangle\rangle - a$: on a

$$h_u(0) = h'_u(0) = 0, \qquad \text{et} \qquad h''_u(0) = A_{1,N}(a\rho/A_N - \mu u_2).$$

Si $h''_u(0) > 0$, alors h_u prend des valeurs strictement positives au voisinage de $t = 0$, donc $u \notin D_N(a)^0$, d'où contradiction. Si $h''_u(0) = 0$, dans tout voisinage de u se trouvent des points u' tels que $h''_{u'}(0) > 0$, en particulier des points $u' \in D_N(a)^0$, d'où une nouvelle contradiction. Finalement, $h''_u(0) < 0$, d'où la conclusion. □

b) Pour $j \geqslant 3$, on a $g(F_{j,N}) \in \mathbb{F}_N$, car

$$d/dt \langle\langle V_t F_{j,N}, f'_N(0) \rangle\rangle_{|t=0} = - \langle\langle F_{j,N}, f''_N(0) \rangle\rangle = 0 ;$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \langle\langle g(aA_N^{-2} f_N(0) + u_2 F_{2,N}), f'_N(0) \rangle\rangle &= A_{1,N}^2 A_N^{-2} a - \mu\rho A_N u_2 \\ &= \rho A_N(\rho A_N^{-1} a - \mu u_2) \\ &> 0 \quad \text{si} \quad u \in D_N(a)^0 \text{ par } a). \quad \square \end{aligned}$$

En conséquence de ce lemme, T_N définit un C^1-difféomorphisme de $\pi \times S_N(a)^0$ sur son image $C_N(a)^0$, et $p_N(C_N(a)^0) = p_N(C_N(a))$.

§ 3. LE CHANGEMENT DE VARIABLE

3.1. La situation en dimension finie : calculons le jacobien de T_N.

LEMME 3.1.1. — $\det [T'_N(z' + tF_{1,N})] = A_{1,N}^{-1} \langle\langle f'_N(0), g(z') \rangle\rangle = A_{1,N}^{-1}\varphi(z')$.

Démonstration. — D'après le § 2.5, il suffit de montrer que la seule valeur propre différente de 1 de l'application linéaire

$$y + sF_{1,N} \mapsto y + sg(z')$$

est égale à $A_{1,N}^{-1} \langle\langle f'_N(0), g(z') \rangle\rangle$, avec multiplicité 1, ceci si cette expression a une valeur différente de 1, ce qui est le cas sur le complémentaire d'un ensemble de q_N-mesure nulle.

Considérons l'équation $y + sg(z') = \lambda(y + sF_{1,N})$ pour $\lambda \neq 1$: on a $s \neq 0$, car sinon $(\lambda - 1)y = 0$, donc $y = 0$, donc $y + sF_{1,N} = 0$. Deux cas se présentent :

a) $\lambda F_{1,N} - g(z') = 0$: alors, on a $\lambda = \langle\langle F_{1,N}, g(z') \rangle\rangle, g(z') = \lambda F_{1,N}, u = 0$.
b) $\lambda F_{1,N} - g(z') \neq 0$: dans ce cas,

$$\langle\langle F_{1,N}, \lambda F_{1,N} - g(z') \rangle\rangle = \lambda - \langle\langle F_{1,N}, g(z') \rangle\rangle$$

et, puisque $s^{-1}y = (1 - \lambda)^{-1}(\lambda F_{1,N} - g(z'))$, l'espace propre associé est encore de dimension 1. □

LEMME 3.1.2. — *Pour toute fonction* $H \in L^1(C_N(a)^0, p_N)$, *on a l'équation :*

$$\int_{C_N(a)^0} H dp_N = (2\pi)^{-1/2} A_{1,N}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{S_N(a)^0} \varphi(z') H(V_t z') dq_N(z') dt$$

3.2. Convergence dominée de $\varphi \circ Q_N$ vers φ.

LEMME 3.2.1. — *Pour tout entier* $N_0 \geqslant 1$, *existe un réel* $M' > 0$ *tel que l'on ait, pour tout* $N \geqslant N_0$, *pour tout vecteur* $z' \in F$, *l'inégalité :*

$$| Q_N z' | \leqslant M' | z' |$$

Démonstration. — P_N étant une troncature, il est clair que $| P_N z | \leqslant | z |$ pour tout $z \in \mathbb{E}$. Reste à montrer, puisque $Q_N = R_N \circ P_N$, qu'il existe $M' > 0$ tel que, pour $N \geqslant N_0$, pour $z \in \mathbb{E}_N$, on a $| R_N z | \leqslant M' | z |$.

Or, $R_N z = z - A_{1,N}^{-2} \langle\langle f'_N(0), z \rangle\rangle f'_N(0)$, de sorte que :

$$| R_N z |^2 \leqslant | z |^2 + 2A_{1,N}^{-2} | \langle\langle f'_N(0), z \rangle\rangle | | \langle f'_N(0), z \rangle | \\ + A_{1,N}^{-4} | f'_N(0) |^2 \langle\langle f'_N(0), z \rangle\rangle^2 \leqslant (1 + A_2 A_{1,N_0}^{-1} | f'(0) |)^2 | z |^2$$

car, d'une part (on note $z = x + iy$) :

$$\begin{aligned} | \langle\langle f'_N(0), z \rangle\rangle |^2 &= \left| \sum_1^N j b_j x_{2j} \right|^2 \\ &\leqslant \left(\sum_1^\infty j^4 b_j^2 \right) | z |^2 \\ &= A_2^2 | z |^2 \end{aligned}$$

et, d'autre part :

$$| \langle f'_N(0), z \rangle | \leqslant | f'_N(0) | | z | \leqslant | f'(0) | | z |$$

et enfin :

$$A_{1,N} \geqslant A_{1,N_0} \quad \text{pour} \quad N \geqslant N_0 . \qquad \square$$

LEMME 3.2.2. — *Les fonctions φ et $\varphi \circ Q_N$ ($N \geqslant 1$) sont q-intégrables; sont dominées, uniformément en $N \geqslant N_0$, par une fonction q-intégrable; la suite des fonctions $\varphi \circ Q_N$ converge dans $L^1(\mathbb{F}, q)$ vers la fonction φ.*

Démonstration. — *a*) On a $\varphi(z') \leqslant A_3 | z' |$, par suite φ est q-intégrable, d'après le théorème de Fernique : [*6*].

D'autre part, d'après le lemme 3.2.1, si on pose $M = A_3 M'$, on a :

$$\forall N \geqslant N_0,\ \forall z' \in \mathbb{F},\ | \Lambda \circ Q_N(z') | = \varphi \circ Q_N(z') \leqslant M | z' |$$

d'où une conclusion analogue. $\square$

b) On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{F}} | \varphi - \varphi \circ Q_N | dq &= \int | | \Lambda | - | \Lambda \circ Q_N | | dq \\ &\leqslant \int_{\mathbb{F}} | \Lambda - \Lambda \circ Q_N | dq \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant A_3 \int_{\mathbb{F}} | z' - Q_N z' | dq(z') \qquad (\text{car } | \Lambda(z') | \leqslant A_3 | z' |) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} | z' - Q_N z' | &\leqslant | z' | + | Q_N z' | \\ &\leqslant (1 + M') | z' | \qquad \text{pour } N \geqslant N_0 \quad \text{(lemme 3.2.1)} \end{aligned}$$

tandis que

$$|z' - Q_N z'| = |z' - (z'_N - A_{1,N}^{-2} \langle\langle f'_N(0), z'_N \rangle\rangle f'_N(0))|$$
$$\leqslant |z' - z'_N| + A_{1,N}^{-2} |f'(0)| |\langle\langle f'_N(0), z'_N \rangle\rangle|$$

Cette dernière expression tend vers zéro quand N tend vers l'infini, puisque $\lim_{N\to\infty} |z' - z'_N| = \lim_{N\to\infty} \langle\langle f'_N(0), z'_N \rangle\rangle = \langle\langle f'(0), z' \rangle\rangle = 0$. □

Il reste à appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure. □

En conséquence existe une sous-suite de $(\varphi \circ Q_N)_{N\geqslant 1}$ qui converge q-presque partout vers φ, que nous noterons encore $(\varphi \circ Q_N)_{N\geqslant 1}$ pour simplifier. Donc, en utilisant le lemme 3.2.2, nous pouvons conclure que :

$$\lim_{N\to\infty} \int_{B_0} \varphi \circ Q_N dq = \int_{B_0} \varphi dq$$

pour tout borélien B_0 de $\mathbb{F}$.

3.3. Convergence des ensembles $\tilde{C}_N(a)$ et $\tilde{S}_N(a)$.

Notons $K_{N,a}$ la fonction indicatrice de $\tilde{C}_N(a)$, et K_a celle de $C(a)$:

LEMME 3.3.1. — *La suite des fonctions $K_{N,a}$ converge dans $L^1(\mathbb{E}, p)$ vers K_a.*

Démonstration. — Soit B la boule B(0, k) (pour la norme $| \, . \, |$); nous allons en fait raisonner sur l'intersection de B et des ensembles susmentionnés; nous noterons encore $K_{N,a}$ et K_a les fonctions indicatrices de ces ensembles; remarquons par ailleurs que, si $l_N = \max_\pi |f^N(t)|_{\mathbb{E}'}$, on a $\lim_{N\to\infty} l_N = 0$.

Puisque $\langle\langle f(t), z \rangle\rangle \leqslant \langle\langle f_N(t), z_N \rangle\rangle + kl_N$ pour $z \in B$, il vient l'implication : si $\max_\pi \langle\langle f(t), z \rangle\rangle \leqslant a$, alors $\max_\pi \langle\langle f_N(t), z_N \rangle\rangle \leqslant a_N \equiv a + kl_N$, si $z \in B$. Ainsi :

$$C(a) \cap B \subset P_N^{-1}(C_N(a_N)) \cap B \subset C(a_N + kl_N) \cap B$$

donc :

$$\int_{\mathbb{E}} |K_a - K_{N,a_N}| dp \leqslant p[C(a + 2kl_N) \setminus C(a)]$$

et cette dernière quantité tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini, puisque $p(F(a)) = 0$: [7], p. 132, proposition 5.

D'autre part, pour la même raison :

$$C(a - kl_N) \cap B \subset P_N^{-1}(C_N(a)) \cap B \subset P_N^{-1}(C_N(a_N)) \cap B$$
$$\subset C_N(a_N + kl_N) \cap B$$

de sorte que $\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{E}} |K_{N,a} - K_{N,a_N}| dp = 0$. □

En conséquence existe une sous-suite de $(K_{N,a})_{N \geq 1}$, encore notée comme la suite initiale, qui converge p-presque partout vers K_a.

Notons de même $L_{N,a}$ et L_a les fonctions indicatrices des ensembles $\tilde{S}_N(a)$ et $S_N(a)$ respectivement.

LEMME 3.3.2. — *La suite des fonctions* $L_{N,a}$ *converge dans* $L^1(\mathbb{F}, q)$ *vers la fonction* L_a.

Démonstration. — Elle est analogue à la précédente; on remarque que, comme $Q_N z' = z'_N - \langle\langle F_{1,N}, z'_N \rangle\rangle F_{1,N}$, on a :

$$\langle\langle Q_N z', f_N(t) \rangle\rangle = \langle\langle z'_N, f_N(t) \rangle\rangle - \langle\langle F_{1,N}, z'_N \rangle\rangle \langle\langle F_{1,N}, f_N(t) \rangle\rangle$$

et que, puisque $\langle\langle F_1, z' \rangle\rangle = 0$, on a :

$$\langle\langle F_{1,N}, z'_N \rangle\rangle = - \langle\langle F_1^N, z'^N \rangle\rangle . \qquad \square$$

3.4. Démonstration du théorème.

On a d'abord, si $H : C(a) \to \mathbb{R}$ est continue bornée, pour $N \geq 1$:

$$\int_{C_N(a)} H dp_N = \int_{\mathbb{E}} K_{N,a}(z) H(P_N z) dp(z) ,$$

et cette dernière quantité converge, quand N tend vers l'infini, vers $\int_{C(a)} H dp$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et le lemme 3.3.1 et ses conséquences.

D'autre part, on a aussi, pour chaque $t \in \pi$:

$$\int_{S_N(a)} \varphi(z') H(V_t z') dq(z') = \int_{\mathbb{F}} L_{N,a}(z') \varphi(Q_N z') H(V_t Q_N z') dq(z') ,$$

et ceci converge vers $\int_{S(a)} \varphi(z') H(V_t z') dq(z')$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et les lemmes 3.2.1, 3.2.2, 3.3.2 et leurs conséquences.

On utilise alors le théorème de Fubini, le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et le lemme 3.1.2, pour conclure.

§ 4. COROLLAIRE : LA MINORATION (1.3.9.)

D'après le § 3 et le théorème de Fubini, on a, pour $a > 0$:

$$P(Z \leq a) = (2\pi)^{1/2} \int_0^a (2\pi)^{-1/2} e^{-b^2/2A^2} A^{-1} A_1^{-1} \left(\int_{D(0,b)} \langle \Lambda, z'' \rangle dq_b(z'') \right) db ,$$

avec :

$$\int_{D(0,b)} \langle \Lambda, z'' \rangle \, dq_b(z'') = \int_{\Delta(b)} \langle \Lambda, v + bA^{-2}f(0) \rangle \, dq_0(v),$$

$\Delta(b)$ est le projeté de $D(0, b)$ sur $\mathbb{G}$ parallèlement à $f(0)$, et q_0 est l'image par l'injection $\mathbb{Z} \to \mathbb{G}$ définie par $u \to \Sigma_2^\infty u_n F_n$ de la mesure gaussienne cylindrique canonique de $\mathbb{Z}$.

Comme on a $\langle \Lambda, f(0) \rangle = \langle\langle f'(0), g(f(0)) \rangle\rangle = A_1^2$, il vient $(a > 0)$:

$$f(a) = a\rho A^{-2} e^{-a^2/2A^2} q_0(\Delta(a)) + e^{-a^2/2A^2} A^{-1} A_1^{-1} \int_{\Delta(a)} \langle \Lambda, v \rangle \, dq_0(v)$$

Le deuxième terme du deuxième membre est positif. La minoration cherchée résulte des lemmes 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.4, ainsi que de la remarque qui suit (2.3.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. M. Berman, Excursions above high levels for stationary Gaussian processes, *Pac. Jour. Math.*, t. **36**, 1971, p. 63-79.

[2] H. Cramer, Mathematical methods of statistics. Princeton University Press.

[3] H. Cramer et Leadbetter, Stationary and related Gaussian processes, Wiley, 1965.

[4] J. Diebolt, *Thèse de 3^e cycle*, Paris-VI^e, 1978.

[5] J. Diebolt, Sur la loi du maximum de certains processus stochastiques, *Pub. Ins. Stat. Univ.* Paris, XXIV, fasc. **3-4**, 1979, p. 31-67.

[6] X. M. Fernique, École d'été de Probabilités de Saint-Flour IV, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, t. **480**, 1974, p. 32-96.

[7] L. Gross, Potential theory on Hilbert space, *J. Functional Analysis*, t. **1**, 1967, p. 123-181.

[8] Parthasarathy, Probability measures on metric spaces, Wiley.

[9] R. Ramer, On non linear transformations of Gaussian measures, *J. Functional Analysis*, t. **15**, 1974, p. 166-187.

[10] D. Slepian, The one-sided barrier problem for Gaussian noise, *The Bell System Techn. J.*, t. **XII**, 1962, p. 463-501.

[11] V. S. Tsirelson, The density of the distribution of the maximum of a Gaussian process, *Theory Prob. Applications*, t. **20**, 1975, p. 847-856.

(Manuscrit reçu le 5 janvier 1981)