ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. C. LOOTGIETER

Sur une conjecture de L. E. Dubins

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, n° 1 (1981), p. 97-122

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_1_97_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 1, 1981, p. 97-122. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur une conjecture de L. E. Dubins

par

J. C. LOOTGIETER
Université Paris-VI,
Laboratoire de calcul des probabilités,
4, place Jussieu, Tour 56, Paris-V^{e}

SOMMAIRE. — La conjecture de L. E. Dubins concerne la distribution limite d'une suite de subdivisions aléatoires de l'intervalle unité réel [0, 1] obtenue de la manière suivante : β étant un réel > 0 préalablement fixé une fois pour toutes, à chaque instant $n + 1$ on choisit d'abord l'un des intervalles obtenus à l'instant n suivant une probabilité proportionnelle à la puissance β de sa longueur, puis, indépendamment du passé, l'intervalle choisi est divisé en *deux* suivant une loi uniforme. L. E. Dubins a conjecturé que presque-sûrement la distribution limite est singulière quand $\beta < 1$, uniforme quand $\beta > 1$.

Dans cet article nous donnons une réponse positive à la conjecture de L. E. Dubins quand $\beta > 1$; ce faisant, nous généralisons ce résultat au cas où la loi, suivant laquelle est divisé en deux l'intervalle choisi à chaque instant, est une loi quelconque préalablement fixée une fois pour toutes.

SUMMARY. — Let $\beta > 0$ be fixed. Consider the random sequence of subdivisions of the unit interval obtained by the following procedure: at the $(n + 1)^{\text{th}}$ step first choose one of the intervals obtained at the n^{th} step, giving each such interval J the probability proportional to $|J|^{\beta}$ of being chosen, then (independently) divide the selected interval into *two* intervals according to the uniform law. The conjecture of L. E. Dubins is that almost surely the limit distribution is singular if $\beta < 1$, uniform if $\beta > 1$.

We give a positive answer when $\beta > 1$; in the proof we generalize the result in the most general case where the selected interval at each step is divided in two according to any probability law (the same at each step).

Annales de l'Institut Henri Poincaré-Section B-Vol. XVII, 0020-2347/1981/ 97 /$ 5,00/

0. INTRODUCTION

Comme le lecteur peut s'en rendre compte, le cas $\beta = 1$ conduit à une distribution limite uniforme : conséquence (immédiate dans le cas d'une loi de division uniforme) de la loi forte des grands nombres.

Une des clefs que nous utilisons pour résoudre la conjecture de L. E. Dubins quand $\beta > 1$ est fort simple et schématiquement peut se résumer ainsi : soit $\{ G(n), n \geq 1 \}$ une suite de v. a. (v. a. = variable aléatoire) indépendantes, équidistribuées, prenant les valeurs 0, 1 ou 2 suivant les probabilités respectives a, b et c; alors, si v désigne le premier instant auquel $G(v) = 0$ ou 2, il est clair que $G(v)$ prend les valeurs 0 ou 2 suivant des probabilités respectivement proportionnelles à a et c. C'est en nous appuyant sur une extension de cette simple remarque que nous tournons la difficulté « ... on choisit d'abord l'un des intervalles obtenus à l'instant n suivant une probabilité proportionnelle à la puissance β de sa longueur... » (cf. sommaire) et que nous sommes amenés à porter notre attention sur l'étude d'une suite de subdivisions aléatoires de l'intervalle unité obtenue en divisant en *trois* à chaque instant $n + 1$, suivant une loi préalablement fixée une fois pour toutes et indépendamment du passé, l'un des intervalles obtenus à l'instant n, l'intervalle destiné à être divisé étant choisi avec une probabilité *égale à sa longueur*; comme nous aurons besoin d'être précis nous interpréterons ce schéma aléatoire suivant une suite de v. a.

$$Y = \{ Y(n), n \geq 1 \}$$

à valeurs dans un arbre tryadique (partie II), déduirons de l'examen de la suite des fréquences $K = \{ K(n), n \geq 1 \}$ des valeurs prises par la suite Y dans le sous-arbre dyadique de Cantor un théorème de convergence p. s. (p. s. = presque-sûre) — lié à la dimension de Hausdorff d'un Cantor aléatoire de l'intervalle unité et du type loi des grands nombres — qui semble inédit (partie III) et dont l'application apportera une réponse positive à la conjecture de L. E. Dubins dans le cas $\beta > 1$ (partie IV).

Un des principaux outils utilisés dans cet article sera constitué par les théorèmes de convergence p. s. portant sur les fonctionnelles linéaires associées à un processus de B. C. M. J. (B. C. M. J. = branchement de Crump-Mode-Jagers) (cf. [2], [3] et [13]).

I. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{N}$ celui des entiers ≥ 0, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{R}_+$ celui des réels ≥ 0, $\mathbb{R}_+^*$ celui des réels > 0.

A désigne l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ et $\mathscr{A}_e^3$ l'arbre tryadique défini par :

$$\mathscr{A}_e^3 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}^n,$$

où $\mathrm{A}^0 = \{e\}$ (e = suite vide) et A^n, pour $n \geq 1$, est le produit cartésien de n copies de A. Pour $x \in \mathscr{A}_e^3$, $l(x)$ désigne l'entier n pour lequel $x \in \mathrm{A}^n$.

Pour tout $x \in \mathscr{A}_e^3$, nous posons $(x, e) = (e, x) = x$. Pour x et y distincts de e, $x = (i_1, \ldots, i_p)$ et $y = (j_1, \ldots, j_q)$, nous posons

$$(x, y) = (i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q).$$

L'arbre $\mathscr{A}_e^3$ est muni de l'ordre *lexicographique* usuel, noté $\preceq$, ordre qui permet de ranger par ordre croissant les éléments de toute partie finie de $\mathscr{A}_e^3$: on a $e \preceq x$ pour tout x et, pour $x = (i_1, \ldots, i_p)$ et $y = (j_1, \ldots, j_q)$ distincts de e, $x \prec y$ si et seulement si $(i_1, \ldots, i_r) = (j_1, \ldots, j_r)$ et $i_{r+1} < j_{r+1}$ pour un $r \geq 0$.

Une branche de $\mathscr{A}_e^3$ désigne toute suite finie ou non $x(1), \ldots, x(n), \ldots$ d'éléments de $\mathscr{A}_e^3$ telle que, pour tout k, $x(k+1) = (x(k), i)$ pour un $i = 0, 1$, ou 2. L'arbre $\mathscr{A}_e^3$ est muni de l'ordre *généalogique simple*, noté $\leq$, défini comme suit : $x \leq y$ si et seulement si x et y appartiennent à une même branche et $l(x) \leq l(y)$.

Introduisons le sous-arbre dyadique de Cantor défini par :

$$\mathscr{A}_e^2 = \{x : x = e \text{ ou } x \text{ n'est constitué que de 0 ou 2}\},$$

puis, pour tout $x \in \mathscr{A}_e^3$, les sous-arbres tryadiques $\mathscr{A}_x^3$ et dyadiques $\mathscr{A}_x^2$ issus de x :

$$\mathscr{A}_x^j = \{(x, y) : y \in \mathscr{A}_e^j\}, \qquad j = 2, 3.$$

A chaque $x \in \mathscr{A}_e^3$ nous associons sa fonction indicatrice : $f_x(z) = 1$ si $z = x$, $= 0$ sinon; les fonctions indicatrices des sous-arbres $\mathscr{A}_x^3$ et $\mathscr{A}_x^2$ sont donnés par :

$$\mathrm{F}_x^j = \sum_{y \in \mathscr{A}_x^j} f_y, \qquad j = 2, 3.$$

Introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. — *Une partie* B *de* $\mathscr{A}_e^3$ *est dite libre si elle ne possède pas deux éléments comparables pour la relation d'ordre* $\leq$.

Soit $\mathscr{B}$ la classe des parties libres de $\mathscr{A}_e^3$; introduisons une classe d'opérateurs sur $\mathscr{B}$:

DÉFINITION 1.2. — *Pour* $x \in \mathscr{A}_e^3$ *on appelle opérateur de division en* x *l'application de* $\mathscr{B}$ *dans* $\mathscr{B}$ *définie par :*

$$D_x(B) = (B \setminus \{ x \}) \cup \{ (x, 0), (x, 1), (x, 2) \} \text{ si } x \in B, = B \text{ sinon}.$$

Cette définition a bien un sens car on voit facilement que, si B est une partie libre, $D_x(B)$ l'est encore; si $B \neq \emptyset$ et $x \in B$, il est clair que

$$\text{card}(D_x(B)) = \text{card}(B) + 2.$$

La définition 1.2 exprime que, si $x \in B$, on passe de B à $D_x(B)$ en divisant en trois le point x suivant les points $(x, 0)$, $(x, 1)$ et $(x, 2)$.

II. SUR UNE SUITE DE V. A. A VALEURS DANS L'ARBRE $\mathscr{A}_e^3$

La donnée de base est celle d'un triplet $\rho = \{ \rho(0), \rho(1), \rho(2) \}$ de v. a. réelles telles que

H.1 $\quad \rho(i) \geq 0$, pour $i = 0, 1, 2$, $\quad$ et $\quad \rho(0) + \rho(1) + \rho(2) = 1$.

Considérons une famille de copies ρ_x, $x \in \mathscr{A}_e^3$, de ρ indépendantes. A partir des triplets ρ_x définissons une pondération aléatoire

$$M = \{ M(x), x \in \mathscr{A}_e^3 \}$$

de l'arbre $\mathscr{A}_e^3$ au moyen des récurrences :

$$\begin{aligned} &M(e) = 1, \quad M(i) = \rho_e(i), \qquad \text{pour } i = 0, 1, 2, \\ &M((x, i)) = M(x)\rho_x(i), \qquad \text{pour } i = 0, 1, 2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour toute partie B de $\mathscr{A}_e^3$, posons :

$$M(B) = \sum_{x \in B} M(x).$$

On voit que l'hypothèse H.1 et la définition (2.1) de M impliquent $0 \leq M \leq 1$ sur $\mathscr{A}_e^3$. Si B est une partie libre pour laquelle $M(B) = 1$, on voit sans peine que, pour tout $x \in \mathscr{A}_e^3$, $M(D_x(B)) = 1$.

Passons maintenant à la définition d'une suite de v. a. $\{ Y(n), n \geq 1 \}$ à valeurs dans $\mathscr{A}_e^3$; sa loi est définie au moyen des récurrences qui suivent. $Y(1) = e$ et posons $B_1 = \{ e \}$; $Y(2)$ prend ses valeurs dans $B_2 = D_e(B_1) = A$ suivant les probabilités conditionnelles $P(Y(2) = i/M) = M(i)$, pour $i = 0, 1, 2$; $Y(3)$ prend ses valeurs dans $B_3 = D_{Y(2)}(B_2)$ suivant les probabilités

conditionnelles $P(Y(3) = x/M, Y(2)) = M(x)$, pour $x \in B_3$; connaissant $Y(2), \ldots, Y(n)$, et donc B_n, $Y(n+1)$ prend ses valeurs dans $B_{n+1} = D_{Y(n)}(B_n)$ suivant les probabilités conditionnelles

$$P(Y(n+1) = x/M, Y(2), \ldots, Y(n)) = M(x), \qquad \text{pour } x \in B_{n+1}.$$

Comme $\{ e \}$ est une partie libre pour laquelle $M(e) = 1$, les B_n sont donc des parties libres pour lesquelles $M(B_n) = 1$; par suite la définition de la suite Y a bien un sens.

Dans la remarque qui suit nous allons donner une interprétation de la suite Y (et des parties B_n intervenant dans sa définition) en termes de subdivisions aléatoires de l'intervalle unité. Désignons par $| J |$ la longueur d'un intervalle $J \subset [0, 1]$.

Remarque 2.1. — Rangeons par ordre croissant suivant l'ordre lexicographique les éléments de B_n, soit :

$$B_n = \{ x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k} \} \qquad \text{avec} \quad x_{n,1} \prec x_{n,2}, \ldots, \prec x_{n,k} \quad \text{et} \quad k = 1 + 2(n-1).$$

Associons à B_n la subdivision $\bar{B}_n$ de l'intervalle unité constituée (en regardant l'intervalle unité de la gauche vers la droite) des intervalles $J_{x_{n,1}}, \ldots, J_{x_{n,k}}$ de longueurs respectives $M(x_{n,1}), \ldots, M(x_{n,k})$; en particulier $\bar{B}_1 = [0, 1]$ et $\bar{B}_2 = \{ J_0, J_1, J_2 \}$ avec $| J_i | = \rho_e(i)$, $i = 0, 1, 2$.

D'après la définition de la loi de Y on passe de $\bar{B}_n$ à $\bar{B}_{n+1}$ en choisissant d'abord l'un des intervalles J_x, $x \in B_n$, (indépendamment du passé) suivant une probabilité égale à sa longueur $M(x)$, puis en divisant l'intervalle choisi J_y (auquel cas $Y(n) = y$) en trois intervalles $J_{(y,0)}$, $J_{(y,1)}$ et $J_{(y,2)}$, lesquels, regardés de la gauche vers la droite, ont des longueurs respectivement proportionnelles à $\rho_y(0)$, $\rho_y(1)$ et $\rho_y(2)$ — de la définition de la loi de la suite Y et des hypothèses faites sur les triplets ρ_x, $x \in \mathscr{A}_e^3$, résulte que le triplet $\{ | J_{(y,i)} | / | J_y |, \ i = 0, 1, 2 \}$ est, d'une part, indépendant de la suite des subdivisions $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots, \bar{B}_n$ et du choix de l'intervalle J_y dans $\bar{B}_n$ et, d'autre part, a pour loi celle du triplet $\{ \rho(0), \rho(1), \rho(2) \}$ —.

Remarque 2.2. — On remarque facilement que p. s. :

(1) La suite Y visite au plus une fois tout $x \in \mathscr{A}_e^3$; si Y visite x à l'instant n, alors Y visite tout $y \preccurlyeq x$ à un instant $< n$.

(2) Pour tout x, le sous-arbre tryadique $\mathscr{A}_x^3$ est visité par la suite Y une infinité de fois (resp. non visité) quand $M(x) > 0$ (resp. $M(x) = 0$) : conséquence quasi-immédiate du lemme de Borel-Cantelli.

Introduisons la fréquence $K = \{ K(n), n \geq 1 \}$ des valeurs prises par la suite Y dans le sous-arbre dyadique de Cantor $\mathscr{A}_e^2$:

$$(2.2) \qquad K(0) = 0 \qquad \text{et pour } n \geq 1 \qquad K(n) = \sum_{q=1}^{n} F_e^2(Y(q)).$$

$Y(1) = e$ et, pour $n \geq 1$, $Y(n+1)$ prend ses valeurs dans l'un des trois sous-arbres tryadiques $\mathscr{A}_i^3$, $i = 0, 1, 2$, lesquels sont disjoints deux à deux; introduisons alors les suites $X_i = \{ X_i(n), n \geq 0 \}$ et $S_i = \{ S_i(n), n \geq 0 \}$, $i = 0, 1, 2$, définies par :

$$(2.3) \qquad X_i(n) = F_i^3(Y(n+1)) \qquad \text{et} \qquad S_i(n) = \sum_{q=0}^{n} X_i(q).$$

$X_i(n)$ prend donc la valeur 1 ou 0 suivant que Y visite ou ne visite pas à l'instant $n+1$ le sous-arbre $\mathscr{A}_i^3$; $S_i(n)$ désigne donc le nombre de visites de la suite Y au sous-arbre $\mathscr{A}_i^3$ jusqu'à l'instant $n+1$ inclus.

A tout $x \in \mathscr{A}_e^3$ associons l'homologue M_x de M :

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} &M_x(x) = 1, \qquad M_x((x, i)) = \rho_x(i), && \text{pour } i = 0, 1, 2, \\ &M_x((z, i)) = M_x(z)\rho_z(i), && \text{pour } x \lessdot z \text{ et } i = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

M_x définit donc une pondération aléatoire du sous-arbre $\mathscr{A}_x^3$; de (2.1) et (2.4) résulte que $M((x, y)) = M(x)M_x((x, y))$. Il est clair que l'indépendance et l'équidistribution des triplets ρ_x, $x \in \mathscr{A}_e^3$, entraînent que les fonctions aléatoires

$$M_x((x, .)) = \{ M_x((x, y)),\ y \in \mathscr{A}_e^3 \}, \qquad x \in \mathscr{A}_e^3,$$

ont même loi que la fonction aléatoire $M = \{ M(y), y \in \mathscr{A}_e^3 \}$.

Pour tout $x \in \mathscr{A}_e^3$, introduisons la suite $\tau_x = \{ \tau_x(n), n \geq 1 \}$ des instants successifs de visite de la suite Y au sous-arbre tryadique $\mathscr{A}_x^3$:

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} &\tau_x(1) = \inf \{ m : Y(m) \in \mathscr{A}_x^3 \}, \ldots, \\ &\tau_x(n+1) = \inf \{ m : m > \tau_x(n) \text{ et } Y(m) \in \mathscr{A}_x^3 \} \qquad \text{pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

Sur l'événement $\{ M(x) > 0 \}$ la suite τ_x est p. s. définie et $Y(\tau_x(1)) = x$ (cf. remarque 2.2); introduisons, en ce cas, la suite *induite* $Y_x = \{ Y_x(n), n \geq 1 \}$ des valeurs prises par la suite Y dans le sous-arbre dyadique de Cantor $\mathscr{A}_x^2$:

$$(2.6) \qquad Y_x(n) = Y(\tau_x(n)), \qquad \text{pour } n \geq 1,$$

puis l'homologue $K_x = \{ K_x(n), n \geq 0 \}$ de K :

$$(2.7) \qquad K_x(0) = 0 \qquad \text{et pour } n \geq 1 \qquad K_x(n) = \sum_{q=1}^{n} F_x^2(Y_x(q)).$$

On convient que, pour tout $n \geq 0$, $K_x(n) = 0$ sur $\{ M(x) = 0 \}$.

Supposons que $\rho_e(0)$ et $\rho_e(2)$ soient > 0 p. s.; les suites induites Y_i, $i = 0, 2$, sont alors p. s. définies et, par définition, prennent respectivement leurs valeurs dans les sous-arbres tryadiques $\mathscr{A}_i^3$. Un minimum de réflexion, suite à la définition de la loi de Y, montre que le quadruplet $\{ Y_0, M_0, Y_2, M_2 \}$ est indépendant du triplet $\rho_e = \{ \rho_e(0), \rho_e(1), \rho_e(2) \}$ *et* des suites τ_i, $i = 0, 2$, des instants auxquels sont respectivement visités les sous-arbres tryadiques $\mathscr{A}_i^3$; et l'on remarque que les couples $\{ Y_0, M_0((0, .)) \}$ et $\{ Y_2, M_2((2, .)) \}$ sont indépendants et ont respectivement même loi que les couples $\{ (i, Y), M \}$, $i = 0, 2$, (i, Y) désignant la translatée de Y par i : $(i, Y) = \{ (i, Y(n)), n \geq 1 \}$. Comme

$$(2.8) \qquad S_i(n) = \sum_{q \geq 1} 1_{\{\tau_i(q) \leq n+1\}}, \qquad \text{pour } i = 0, 2,$$

et compte tenu de la définition (2.7) des fréquences K_i, $i = 0, 2$, on peut conclure au lemme suivant :

LEMME 2.1. — *Supposons que* $\rho_e(0)$ *et* $\rho_e(2)$ *soient* > 0 *p. s. Alors les couples et triplet aléatoires* $\{ K_0, M_0 \}$, $\{ K_2, M_2 \}$ *et* $\{ \rho_e, S_0, S_2 \}$ *sont mutuellement indépendants; les couples* $\{ K_i, M_i((i, .)) \}$, $i = 0, 2$, *ont même loi que le couple* $\{ K, M \}$.

Suite à la définition de la loi de la suite Y, il est clair que l'on a le lemme suivant sur les v. a. $X_i(n)$ définies par (2.3) :

LEMME 2.2. — *Conditionnellement en* ρ_e *les triplets* $\{ X_0(n), X_1(n), X_2(n) \}$, $n > 1$, *sont indépendants et ont pour loi commune une loi trinomiale de paramètre* $\{ \rho_e(0), \rho_e(1), \rho_e(2) \}$.

Les parties $\mathscr{A}_i^2$, $i = 0, 2$, et $\{ e \}$ constituent une partition de $\mathscr{A}_e^2$; à partir de (2.6), (2.7) et (2.8) on voit que la suite Y visite jusqu'à l'instant $n + 1$ inclus $K_i(S_i(n))$ fois le sous-arbre dyadique $\mathscr{A}_i^2$. Par suite nous obtenons l'équation stochastique :

$$(2.9) \qquad K(n + 1) = K_0(S_0(n)) + K_2(S_2(n)) + 1 \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

III. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA FRÉQUENCE K

Le but de cette partie est de contrôler le comportement asymptotique p. s. de la fréquence K (cf. théorème 3.1) à partir de l'étude de l'équation (2.9). En plus de l'hypothèse H.1 (cf. partie II) nous ferons dans toute la suite les hypothèses

H.2 $$E[\rho(0) + \rho(2)] < 1,$$

H.3 $$\rho(0) \quad \text{et} \quad \rho(2) > 0 \text{ p. s.}.$$

Dans toute la suite $N = \{ N(t), t \geq 0 \}$ désigne un processus de Poisson *indépendant* du couple $\{ Y, M \}$ et tel que $N(0) = 0$; l'introduction de ce processus de Poisson permettra de simplifier l'étude de l'équation (2.9) en remplaçant l'argument n par $N(t)$ (cf. § 3.1). La fonction aléatoire $\{ K(N(t)), t \geq 0 \}$ vérifiera alors une propriété de décomposition additive très voisine de celle que vérifie une fonctionnelle linéaire associée à un processus de B. C. M. J. animé par un processus de naissance binaire : dans le § 3.2 nous définirons une fonctionnelle linéaire $V(t)$ laquelle, convenablement choisie (§ 3.3), sera assez proche de $K(N(t))$ telle sorte que $V(t)$ et $K(N(t))$ aient des comportements asymptotiques p. s. du premier ordre identiques quand $t \to \infty$. Nous utiliserons les travaux de K. B. Athreya et K. Rama Murthy, [*3*] et [*13*], ayant trait à la convergence p. s. des fonctionnelles linéaires associées à un processus de B. C. M. J. et dont les techniques principales, s'inspirant en partie d'un argument heuristique de T. E. Harris [*5*], ont d'abord été développées dans l'étude des processus de Bellman-Harris par K. B. Athreya et N. Kaplan [*2*] : leur application nous donnera le comportement asymptotique p. s. de $V(t)$, par suite celui de $K(N(t))$ et en définitive celui de $K(n)$.

§ 3.1. — Suite à un résultat classique, il résulte du lemme 2.2 et des hypothèses faites sur le processus de Poisson N que conditionnellement en ρ_e les processus $\{ S_i(N(t)), t \geq 0 \}$, $i = 0, 1, 2$, sont des processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs $\rho_e(i)$. Posons :

$$K_iS_iN = \{ K_i(S_i(N(t))), t \geq 0 \}, \qquad \text{pour } i = 0, 2,$$
$$KN_s = \{ K(N(ts)), t \geq 0 \}, \qquad \text{pour tout } s > 0.$$

Le lemme 2.1 conduit alors à :

LEMME 3.1. — (1) *Conditionnellement en* ρ_e *les couples aléatoires* $\{ K_0S_0N, M_0 \}$ *et* $\{ K_2S_2N, M_2 \}$ *sont indépendants.* (2) *La loi conditionnelle en* $\rho_e(j) = s_j$, $j = 0, 1, 2$, *de* K_iS_iN, $i = 0, 2$, *est égale à celle de* KN_{s_i}.

Posant $H(t) = K(N(t) + 1) - K(N(t))$, l'équation (2.9) conduit à :

(3.1) $K(N(t)) + H(t) = K_0(S_0(N(t))) + K_2(S_2(N(t))) + 1$, pour tout $t > 0$,

Les assertions (1) — les processus K_iS_iN, i = 0, 2, sont en particulier indépendants conditionnellement en ρ_e — et (2) du lemme 3.1 et l'équation (3.1) suggèrent la question suivante : peut-on interpréter le processus $\{ K(N(t)), t > 0 \}$, *au changement de variable près* $t = \exp u$, comme une fonctionnelle linéaire associée au processus de B. C. M. J. admettant pour processus de naissance binaire la mesure définie par :

(3.2) $\theta = \delta_{-\log\rho(0)} + \delta_{-\log\rho(2)}$ (δ_x = mesure de Dirac en x) ?

S'il en était ainsi le processus $\{ K(N(t)), t > 0 \}$ devrait admettre pour *caractéristique* un processus de même loi que $\{ 1 - H(t), t > 0 \}$ (cf. terminologie de [7]). Nous n'avons pas pu répondre à cette question; néanmoins nous définirons dans le § 3.2 qui suit une fonctionnelle linéaire $V(t)$ (associée au processus de B. C. M. J. admettant la mesure θ définie par (3.2) pour processus de naissance) très proche de $K(N(t))$ en moyenne quadratique (cf. lemme 3.3).

§ 3.2. — Il est clair que les hypothèses H.1, H.2 et H.3 impliquent l'existence d'un réel α, $0 < \alpha < 1$, unique tel que

(3.3) $$E[(\rho(0))^\alpha + (\rho(2))^\alpha] = 1.$$

Introduisons les lois de probabilités respectives μ_0, μ_2 et ω de $\rho(0)$, $\rho(2)$ et du couple $\{ \rho(0), \rho(2) \}$. Des hypothèses H.1 et H.2 résulte que les mesures μ_0 et μ_2 sont portées par l'intervalle $]0, 1[$. Soit η la mesure image de $\mu = \mu_0 + \mu_2$ par l'application $-\operatorname{Log}$ de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Il est clair que $\eta = E(\theta)$ et que (3.3) est équivalent à

(3.4) $$\int_0^\infty \exp(-\alpha u)\eta(du) = 1.$$

Soit $h(t)$ une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornée et telle que $h(t) = 0$ pour $t < 1$; introduisons le processus $V = \{ V(t), t \geq 0 \}$ défini par

(3.5) $$V(t) = \sum_{x \in \mathscr{A}_e^2} h(tM(x)).$$

Comme $0 \leq M \leq 1$, on voit que $V(t) = 0$ pour $t < 1$. Compte tenu de l'indépendance et l'équidistribution des triplets aléatoires ρ_x et de la définition (2.1) de M, le lecteur reconnaîtra que $V(\exp u)$, $u \geq 0$, est une fonctionnelle linéaire d'un processus de B. C. M. J. (à un seul type) animé par le processus de naissance binaire θ défini par (3.2); en d'autres termes,

partant à l'instant $u = 0$ d'un individu d'âge nul, $V(\exp u)$ désigne le « nombre » d'individus x nés à un instant $-\operatorname{Log} M(x) \leq u$: chaque individu étant compté en fonction de son âge $u + \operatorname{Log} M(x)$, à savoir $g(u + \operatorname{Log} M(x))$ avec $g(u) = h(\exp u)$ — la règle étant que chaque individu a un temps de vie infini et engendre indépendamment des autres deux individus suivant un processus de naissance de même loi que θ — (cf. [7]). Le processus de B. C. M. J., ici considéré, est *surcritique* et, suite à (3.4), admet précisément α pour paramètre *malthusien.*

Le processus de naissance θ et la fonction $h(t)$ vérifient les conditions habituelles pour que l'on soit assuré que (3.5) définisse un processus V p. s. à valeurs dans R et possédant un moment du second ordre $E((V(t))^2)$ localement borné.

Suite à (2.4) on voit que le processus V admet la décomposition :

$$V(t) = V_0(t\rho_e(1)) + V_2(t\rho_e(2)) + h(t), \qquad \text{pour tout } t \geq 1, \tag{3.6}$$

où

$$V_i(t) = \sum_{x \in \mathscr{A}_i^2} h(tM_i(x)), \qquad \text{pour } i = 0, 2, \text{ et tout } t \geq 1. \tag{3.7}$$

Du lemme 2.1 résulte que les processus V_i, $i = 0, 2$, et le triplet ρ_e sont indépendants et que V_i a même loi que V.

Supposons de plus que $h(t)$ soit continue p. p. (p. p. = presque-partout par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$); suivant des résultats classiques (cf. [7]) ([1]) résulte que pour η non-arithmétique (resp. η arithmétique de pas γ) $t^{-\alpha}V(t)$ converge dans L^2, quand $t \to \infty$, vers une v. a. $\nabla(\infty)$ (resp. pour tout $y > 0$, $y^{-\alpha}\exp(-\alpha n\gamma)V(y\exp(n\gamma))$ converge dans L^2, quand n entier $\to \infty$, vers une v. a. $\nabla_y(\infty)$). On peut préciser la nature des limites $\nabla(\infty)$ et $\nabla_y(\infty)$ de la manière qui suit. Posons pour $j = e, 0, 2$, (en convenant que $M_e = M$) :

$$I_j(n) = \{ x : x \in \mathscr{A}_j^2 \text{ et } l(x) = n \},$$

puis

$$W_j(n) = \sum_{x \in I_j(n)} (M_j(x))^\alpha, \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Suite à (2.4) on voit que, pour tout $n \geq 0$,

$$W_e(n+1) = (\rho_e(0))^\alpha W_0(n+1) + (\rho_e(2))^\alpha W_2(n+1). \tag{3.8}$$

([1]) Les résultats de convergence p. s. contenus dans le théorème de [7], p. 472, ne sont pas fondés car, en définitive, ceux-ci s'appuient sur une proposition erronée : proposition 1 de [6], p. 497.

Du lemme 2.1 résulte que les suites $\{ W_i(n+1), n \geq 1 \}$, $i = 0, 2$, sont indépendantes et ont même loi que la suite $\{ W_e(n), n \geq 1 \}$; à partir de H.1, (3.3) et (3.8) le lecteur vérifiera alors facilement que la suite W_e est une martingale bornée dans L^2 : sa limite p. s. $W_e(\infty)$ admettant pour espérance et variance

$$(3.9) \qquad E[W_e(\infty)] = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{var}\,[W_e(\infty)] = \frac{\kappa_1 - 1}{1 - \kappa_2},$$

où

$$\kappa_1 = E[[(\rho(0))^\alpha + (\rho(2))^\alpha]^2] \qquad \text{et} \qquad \kappa_2 = E[(\rho(0))^{2\alpha} + (\rho(2))^{2\alpha}].$$

Les limites p. s. $W_j(\infty)$, $j = e, 0, 2$, des suites W_j vérifient l'équation stochastique :

$$(3.10) \qquad W_e(\infty) = (\rho_e(0))^\alpha W_0(\infty) + (\rho_e(2))^\alpha W_2(\infty) \qquad \text{p. s.}.$$

En conditionnant d'abord $t^{-\alpha}V(t)$ par rapport à la famille aléatoire

$$\mathcal{F}_n = \{ \rho_x : l(x) \leq n \},$$

puis en utilisant les théorèmes classiques de la théorie de renouvellement (cf. [4]), on obtient que $E(\nabla(\infty)/\mathcal{F}_n) = c(h)W_e(n)$ p. s. pour η non-arithmétique (resp. $E(\nabla_y(\infty)/\mathcal{F}_n) = d(y, h)W_e(n)$ p. s. pour η arithmétique de pas γ), $c(h)$ et $d(y, h)$ étant définis par :

$$(3.11) \qquad c(h) = \frac{1}{\bar{\eta}} \int_0^\infty \exp(-\alpha u) h(\exp u) du,$$

$$d(y, h) = \frac{\gamma}{\bar{\eta}} y^{-\alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-\alpha k\gamma) h(\exp(yk\gamma)),$$

où $\bar{\eta} = \int_0^\infty u \exp(-\alpha u)\eta(du) = -E[(\rho(0))^\alpha \operatorname{Log}(\rho(0)) + (\rho(2))^\alpha \operatorname{Log}(\rho(2))]$.

Un argument de martingale conduit alors à $\nabla(\infty) = c(h)W_e(\infty)$ p. s. pour η non-arithmétique (resp. $\nabla_y(\infty) = d(y, h)W_e(\infty)$ p. s. pour η arithmétique de pas γ).

A la convergence dans L^2 de $t^{-\alpha}V(t)$ l'on peut ajouter la convergence p. s.; pour cela, nous appliquons les théorèmes de convergence p. s. de [3] et [13] (2) sur les fonctionnelles linéaires associées à un processus de B. C. M. J. surcritique, à plusieurs types, animé par un processus de naissance non-arithmétique. Dans le cas du processus de naissance de B. C. M. J.

(2) [3] reprend l'essentiel de [13] : nous nous en référerons à [13] plutôt qu'à [3], des hypothèses indispensables de directe intégrabilité ayant été involontairement omises dans [3].

(à un seul type) ici considéré, on peut vérifier facilement, à partir de la forme particulièrement simple du processus de naissance θ défini par (3.2) (un individu engendre *deux* individus à des instants finis et > 0 d'après H.1 et H.3) et du fait que le temps de vie d'un individu est *infini*, que les hypothèses A.1-A.4 et A.6-A.9 de [*13*], p. 21-22, sont satisfaites dans le cas non-arithmétique, excepté la seconde inégalité de A.6 que l'on peut éliminer d'après la remarque 5 de la p. 29; quant aux hypothèses de directe intégrabilité énoncées dans les théorèmes 1 et 2 de [*13*], p. 24-27, on peut les vérifier sans peine à partir du fait que $g(u) = h(\exp u)$ est bornée et continue p. p. et de la forme simple du processus de naissance θ. On est donc en mesure d'appliquer le théorème 2 de [*13*] à la fonctionnelle $V(\exp u)$. D'où la proposition 3.1 qui suit : l'assertion (*a*) est classique, l'assertion (*b*) est une conséquence directe du théorème 2 de [*13*] lequel, adapté au cas d'un processus de naissance arithmétique, conduit à l'assertion (*c*), l'assertion (*d*) est une extension de (*c*) quand la fonction $h(t)$ est supposée de plus càdlàg en tout point t (càdlàg = continue à droite et admettant une limite à gauche) (en ce cas, compte tenu des hypothèses initialement faites sur $h(t)$, il est clair que $d(y, h)$ est càdlàg selon $y > 0$).

PROPOSITION 3.1. — *Si $h(t)$ est continue p. p., bornée et nulle pour $t < 1$, sous les hypothèses* H.1, H.2 *et* H.3, *on a :*

a) $$E(V(t)) = 0(t^{\alpha})$$

b) Si η est non-arithmétique, alors p. s. :

$$t^{-\alpha}V(t) \to c(h)W_e(\infty), \qquad \textit{quand } t \to \infty .$$

c) Si η est arithmétique de pas γ, alors p. s., pour tout $y > 0$:

$$t_n^{-\alpha}V(t_n) \to d(y, h)W_e(\infty), \qquad \textit{quand } n \to \infty ,$$

où $t_n = y \exp(n\gamma)$, n entier.

d) Si η est arithmétique de pas γ et si $h(t)$ est de plus càdlàg, alors p. s., pour tout $y > 0$ et toute suite $\varepsilon_n \geq 0$ (resp. $\varepsilon_n < 0$) convergeant vers 0 :

$$v_n^{-\alpha}V(v_n) \to d(y, h)W_e(\infty) \ (\textit{resp. } d(y-, h)W_e(\infty)), \qquad \textit{quand } n \to \infty,$$

où $v_n = y(1 + \varepsilon_n)\exp(n\gamma)$.

Remarque 3.1. — Si on remplace dans les assertions (*b*), (*c*) *et* (*d*) de la proposition 3.1 $V(t)$ par les $V_i(t)$, $i = 0, 2$, définies par (3.7), il convient de remplacer $W_e(\infty)$ respectivement par $W_i(\infty)$, $i = 0, 2$.

D'autre part, à partir de H.1, H.2, (3.9) et (3.10), on peut vérifier que $W_e(\infty) > 0$ p. s.; dans le cas particulier où $(\rho(0))^{\alpha} + (\rho(2))^{\alpha} = 1$ p. s., on voit que $W_e(\infty) = 1$ p. s.

§ 3.3. — Nous allons maintenant confronter $K(N(t))$ à $V(t)$ pour un choix adéquat de $h(t)$. Pour tout $t > 0$, posons :

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} L(t) &= K(N(t)) - V(t), \\ L_i(t) &= K_i(S_i(N(t))) - V_i(t\rho_e(i)), \qquad i = 0, 2. \end{aligned}$$

Soustrayant (3.6) de (3.1) on obtient :

$$(3.12)\qquad L(t) + H(t) = L_0(t) + L_2(t) + 1 - h(t),$$

où $H(t) = K(N(t) + 1) - K(N(t))$.

Comme $0 \leq K(n) \leq n$, il est facile d'en déduire que $K(N(t))$ admet des moments de tout ordre localement bornés; il est clair que $0 \leq H(t) \leq 1$. Posons :

$$\begin{aligned} m(t) &= E[K(N(t))], \qquad p(t) = E[(K(N(t)))^2], \qquad q(t) = E[L(t)], \\ r(t) &= E[(L(t))^2], \qquad v(t) = E[L(t)H(t)] \quad \text{et} \quad w(t) = E[(H(t))^2]. \end{aligned}$$

Introduisons les tronquées $m_d(t)$ et $m_g(t)$ de $m(t)$ au point $t = 1$:

$$\begin{aligned} m_d(t) &= m(t) \qquad \text{si } t \geq 1, = 0 \quad \text{si } t < 1, \\ m_g(t) &= m(t) - m_d(t) ; \end{aligned}$$

définitions analogues pour $p_d(t)$, $p_g(t)$, $q_d(t)$, $q_g(t)$, $r_d(t)$ et $r_g(t)$.

Le choix de $h(t)$ est défini par :

$$(3.13)\qquad \begin{aligned} h(t) &= 1 - E[H(t)] + \int_0^\infty m_g(tx)\mu(dx) \qquad \text{si } t \geq 1, \\ &= 0 \qquad \text{si } t < 1. \end{aligned}$$

Remarque 3.2. — Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la fonction $h(t)$ définie par (3.13) est bornée, càdlàg et (suite aux hypothèses H.2 et H.3) > 0 pour $t > 1$; par suite, il est clair que les quantités $c(h)$ et $d(y, h)$ définies par (3.11) sont > 0.

Dans toute la suite $h(t)$ sera la fonction définie par (3.13); le lemme qui suit justifie le choix de $h(t)$:

LEMME 3.2. — *Sous les hypothèses* H.1, H.2 *et* H.3 *on a :*

a) $\qquad E[K(N(t))] = E[V(t)], \qquad$ *pour tout* $t \geq 1$.

b) $\qquad E[(K(N(t)) - V(t))^2] = 0(t^\alpha \operatorname{Log} t), \qquad$ *quand* $t \to \infty$.

Démonstration. — Assertion (*a*) : en prenant les espérances mathématiques des deux membres de (3.12) après en avoir préalablement conditionné

par rapport à ρ_e le second membre et utilisé les lemmes 2.1 (V_0, V_2 et ρ_e sont indépendants) et 3.1, on obtient :

$$(3.14)\quad q(t) = \int_0^1 q(tx)\mu(dx) + 1 - E[H(t)] - h(t), \qquad \text{pour tout } t > 0.$$

En introduisant dans (3.14) la décomposition $q = q_g + q_d$ et en remarquant que $q_g = m_g$, puisque $V(t) = 0$ pour $t < 1$, on obtient, suite à l'expression (3.13) de $h(t)$:

$$(3.15)\qquad q_d(t) = \int_0^1 q_d(tx)\mu(dx), \qquad \text{pour tout } t > 0.$$

En posant $Z_1(u) = q_d(\exp u)$, (3.15) donne l'équation de convolution :

$$Z_1(u) = Z_1 * \eta(u), \qquad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

Comme $Z_1(u)$ est localement bornée et nulle pour $u < 0$ et que η est une mesure bornée portée par $\mathbb{R}_+^*$, il s'ensuit que $Z_1(u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (cf. [4]).

Assertion (*b*) : élevons au carré les deux membres de (3.12) :

$$(L(t))^2 = (L_0(t))^2 + (L_2(t))^2 + 2L_0(t)L_2(t) + 2(1 - h(t))(L_0(t) + L_2(t)) + (1 - h(t))^2 - (H(t))^2 - 2L(t)H(t).$$

En prenant les espérances mathématiques des deux membres de cette dernière égalité, après en avoir préalablement conditionné par rapport à ρ_e le second membre et utilisé les lemmes 2.1 et 3.1, on obtient :

$$(3.16)\quad r(t) = \int_0^1 r(tx)\mu(dx) + 2\int_0^1 q(tx)q(ty)\omega(dx, dy) + 2(1 - h(t))\int_0^1 q(tx)\mu(dx) + (1 - h(t))^2 - \omega(t) - 2v(t).$$

Introduisons dans (3.16) la décomposition $r = r_d + r_g$; comme $r_g = p_g$ et $q_g = m_g$, puisque $V(t) = 0$ pour $t < 1$, et $q = q_g$, d'après l'assertion (*a*), on obtient :

$$(3.17)\qquad r_d(t) = \int_0^1 r_d(tx)\mu(dx) + k(t),$$

où

$$k(t) = \int_0^1 p_g(tx)\mu(dx) + 2\int_0^1 m_g(tx)m_g(ty)\omega(dx, dy) + 2(1 - h(t))\int_0^1 m_g(tx)\mu(dx) + (1 - h(t))^2 - w(t) - 2v(t).$$

On voit immédiatement que le seul terme dans l'expression de $k(t)$ qui soit susceptible d'être non borné est $v(t)$; or, puisque $H(t)$ est bornée par 1, on a :

$$|v(t)| \leq E[|L(t)|] \leq E[K(N(t))] + E[V(t)].$$

L'assertion (*a*) précédemment démontrée et l'assertion (*a*) de la proposition 3.1 impliquent alors que $v(t) = 0(t^{\alpha})$ et, par suite, $k(t) = 0(t^{\alpha})$. En posant $Z_2(u) = r_d(\exp u)$, (3.17) conduit à l'équation de convolution :

$$Z_2(u) = Z_2 * \eta(u) + k(\exp u), \qquad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Comme $Z_2(u)$ est localement bornée et nulle pour $u < 0$, que $\exp(-\alpha x)\eta(dx)$ est une probabilité portée par $\mathbb{R}_+^*$ et que $\exp(-\alpha u)k(\exp u)$ est bornée, il s'ensuit que $\exp(-\alpha u)Z_2(u) = 0(u)$ quand $u \to \infty$ (cf. [4]) : d'où l'assertion (*b*).

Le théorème 3.1 qui suit traite le comportement asymptotique p. s. de la fréquence $K(n)$ et des limites p. s. des rapports $K_i(S_i(n))/K(n)$ quand $n \to \infty$; nous pensons que l'assertion (*b*) de ce théorème peut être améliorée (cf. remarque 3.3).

THÉORÈME 3.1. — *Sous les hypothèses* H.1, H.2 et H.3, *quand* $n \to \infty$:

a) Si η *est non-arithmétique, alors p. s. :*

$$n^{-\alpha}K(n) \to c(h)W_e(\infty).$$

b) Si η *est arithmétique de pas* γ, *alors p. s. :*

$$m_n^{-\alpha}K(m_n) \to d(y, h)W_e(\infty),$$

pour tout $y > 0$ *et toute suite d'entiers* m_n *telle que* $m_n \sim y \exp(n\gamma)$.

c) Que η *soit arithmétique ou non, alors p. s. :*

$$\frac{K_i(S_i(n))}{K(n)} \to (\rho_e(i))^{\alpha} \frac{W_i(\infty)}{W_e(\infty)}, \qquad \textit{pour } i = 0, 2.$$

Démonstration. — Suite à la remarque 3.2, la fonction $h(t)$ satisfait aux conditions des assertions (*a*), (*b*), (*c*) et (*d*) de la proposition 3.1. Fixons s réel tel que $\alpha s > 1$.

Assertion (*a*) : l'assertion (*b*) du lemme 3.2 conduit à

$$E[(t^{-\alpha}K(N(t)) - t^{-\alpha}V(t))^2] = 0(t^{-\alpha}\operatorname{Log} t), \qquad \text{quand } t \to \infty.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} n^{-\alpha s} \operatorname{Log} n^s$ est convergente, un argument classique

basé sur l'inégalité de Biénaymé et le lemme de Borel-Cantelli assure que

$$(3.19) \quad n^{-\alpha s}K(N(n^s)) - n^{-\alpha s}V(n^s) \to 0, \qquad \text{p. s., quand } n \to \infty.$$

De l'assertion (*b*) de la proposition 3.1 et de (3.19) résulte que

$$n^{-\alpha s}K(N(n^s)) \to c(h)W_e(\infty), \qquad \text{p. s., quand } n \to \infty,$$

Par suite, comme $K(N(t))$ croît selon t et que $(n+1)^s \sim n^s$, un procédé classique d'encadrement assure que

$$t^{-\alpha}K(N(t)) \to c(h)W_e(\infty), \qquad \text{p. s., quand } t \to \infty,$$

et, comme le processus Poisson $N(t)$ a des sauts d'amplitude un et que $N(t) \sim t$ p. s. quand $t \to \infty$, il va de soi que l'on peut conclure à l'assertion (*a*).

Assertion (*b*) : compte tenu de l'assertion (*d*) de la proposition 3.1, un minimum de réflexion montre que la démonstration précédente de l'assertion (*a*) s'adapte au cas η arithmétique, pourvu que la fonction $d(y, h)$ soit continue selon y : comme $d(y, h)$ est càdlàg, il suffit donc de montrer que $d(y, h) = d(y-, h)$ pour tout $y > 0$. A un $y > 0$ associons les deux suites définies par :

$$u_n^1 = y\exp(n\gamma) \qquad \text{et} \qquad u_n^2 = u_n^1 - yn^{-2}, \qquad n \geq 1.$$

Il est clair que $\sum_{n\geq 1} (u_n^i)^{-\alpha} \operatorname{Log} u_n^i < \infty$, $i = 0, 2$; par suite, l'inégalité de Biénaymé, le lemme de Borel-Cantelli et l'assertion (*d*) de la proposition 3.1 impliquent que p. s., quand $n \to \infty$,

$$(3.21) \qquad (u_n^1)^{-\alpha}K(N(u_n^1)) \to d(y, h)W_e(\infty)$$

$$\text{et} \qquad (u_n^2)^{-\alpha}K(N(u_n^2)) \to d(y-, h)W_e(\infty).$$

D'autre part, comme

$$0 \leq K(N(u_n^1)) - K(N(u_n^2)) \leq N(u_n^1) - N(u_n^2),$$

des propriétés usuelles de la loi d'un processus de Poisson résulte que

$$P(K(N(u_n^1)) - K(N(u_n^2)) \geq 1) \leq 1 - \exp(-yn^{-2}), \qquad = 0(n^{-2}).$$

Le lemme de Borel-Cantelli assure donc que $K(N(u_n^1)) = K(N(u_n^2))$ à partir d'un rang aléatoire assez grand. Comme $W_e(\infty) > 0$ p. s. et que $u_n^1 \sim u_n^2$ l'on déduit de (3.21) que $d(y, h) = d(y-, h)$.

Assertion (*c*) : du lemme 2.1 et de (3.7) résulte que les couples aléatoires $\{K_i, V_i\}$, $i = 0, 2$, ont même loi que le couple $\{K, V\}$. Dans le cas η *non-*

arithmétique l'application de l'assertion (*a*) précédemment démontrée et la remarque 3.1 conduisent à :

$$(3.22)\quad n^{-\alpha}K_i(n) \to c(h)W_i(\infty) \quad \text{p. s., quand } n \to \infty, \text{ pour } i = 0, 2 ;$$

comme $S_i(n)/n \to \rho_e(i)$ p. s., quand $n \to \infty$ (conséquence de la loi forte des grands nombres et du lemme 2.2), que $c(h) > 0$ et que $W_e(\infty) > 0$ p. s., de (3.22) et de l'assertion (*a*) résulte l'assertion (*c*). En ce qui concerne le cas η *arithmétique*, observons d'abord que $d(y, h) = d(y \exp \gamma, h)$ pour tout $y > 0$ et que les lois des v. a. $\rho_e(i)$, $i = 0, 2$, sont portées par la progression géométrique $\{ \exp(-k\gamma), k \geq 1 \}$; de l'assertion (*b*) et de la remarque (3.1) résulte alors que p. s., pour tout $y > 0$ et toute suite d'entiers $m_n \sim y \exp(n\gamma)$, l'on a successivement, pour $i = 0, 2$:

$$m_n^{-\alpha}K_i(S_i(m_n)) \to d(y, h)(\rho_e(i))^{\alpha}W_e(\infty),$$

$$(3.23)\quad \frac{K_i(S_i(m_n))}{K(m_n)} \to (\rho_e(i))^{\alpha}\frac{W_i(\infty)}{W_e(\infty)}, \qquad \text{quand } n \to \infty .$$

A partir de (3.23) un argument de compacité conduit alors à l'assertion (*c*).

Remarque 3.3. — (1) Nous n'avons pas pu obtenir une expression directe de $c(h)$ et $d(y, h)$ en fonction de la loi triplet ρ; d'autre part nous pensons que $d(y, h)$ est constant selon y et est égal à $c(h)$: par exemple nous ignorons quelles sont la ou les valeur(s) de $d(y, h)$ quand $\rho(0) = \rho(1) = \rho(2) = 1/3$.

(2) A l'ensemble des points $y_n(1), y_n(2), \ldots, y_n(3^n)$ de l'arbre tryadique $\mathscr{A}_e^3$, de longueur n, rangés par ordre croissant suivant l'ordre lexicographique :

$$y_n(1) \prec y_n(2), \ldots, \prec y_n(3^n),$$

associons la subdivision aléatoire de l'intervalle unité (regardé de la gauche vers la droite) constituée des intervalles $J_{y_n(i)}$, $1 \leq i \leq 3^n$, chaque intervalle $J_{y_n(i)}$ ayant pour longueur $M(y_n(i))$. Pour tout $n \geq 0$, considérons le compact $\mathscr{C}_n$ égal à la réunion des intervalles *fermés* $J_{y_n(i)}$ tels que $y_n(i) \in \mathscr{A}_e^2$; introduisons le Cantor aléatoire

$$\mathscr{C} = \bigcap_{n \geq 0} \mathscr{C}_n .$$

Sous les hypothèses H.1-H.3 et l'hypothèse particulière $(\rho(0))^{\alpha} + (\rho(2))^{\alpha} = 1$ p. s.; nous démontrerons (cf. appendice) que la dimension de Hausdorff de $\mathscr{C}$ est p. s. égale à α (dans le cas général $E[(\rho(0))^{\alpha} + (\rho(2))^{\alpha}] = 1$, nous n'avons pas pu déterminer la dimension de Hausdorff de $\mathscr{C}$). Revenant à la remarque 2.1 dans laquelle nous donnions l'interprétation de la suite Y et des parties aléatoires B_n intervenant dans sa définition, on voit que $K(n)$

est égale au nombre d'instants $p \leq n$ auxquels l'intervalle *ouvert* choisi dans la subdivision $\bar{\mathrm{B}}_p$ et destiné à être divisé à l'instant $p+1$ *rencontre* le Cantor $\mathscr{C}$.

Le corollaire 3.1 qui suit donne une extension de l'assertion (c) de la proposition 3.1 : nous nous limiterons au cas où $(\rho(0))^\alpha + (\rho(2))^\alpha = 1$ p. s.. Auparavant introduisons les instants successifs $\nu(1)(=1), \nu(2), \ldots, \nu(k), \ldots$, auxquels le sous-arbre dyadique de Cantor $\mathscr{A}_e^2$ est visité par la suite Y.

Pour tout $x \in \mathscr{A}_e^2$, posons :

$$\mathscr{N}_x(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}_x^2(\mathrm{Y}(\nu(k))), \qquad \text{pour tout } n \geq 1 .$$

En d'autres termes $\mathscr{N}_x(n)$ est égal au nombre de fois où l'on a visité le sous-arbre dyadique $\mathscr{A}_x^2$ pendant que l'on a visité n fois le sous-arbre dyadique $\mathscr{A}_e^2$; en particulier il est clair que

$$\begin{aligned} &\mathscr{N}_e(n) = \mathrm{K}(\nu(n)) = n , \\ &\mathscr{N}_i(n) = \mathrm{K}_i(\mathrm{S}_i(\nu(n)) - 1)), \qquad \text{pour } i = 0, 2 . \end{aligned} \tag{3.24}$$

COROLLAIRE 3.1. — *Sous les hypothèses* H.1, H.2, H.3 *et sous l'hypothèse particulière* $(\rho(0))^\alpha + (\rho(2))^\alpha = 1$ *p. s., alors p. s., pour tout* $x \in \mathscr{A}_e^2$:

$$n^{-1}\mathscr{N}_x(n) \to (\mathrm{M}(x))^\alpha, \qquad \textit{quand } n \to \infty .$$

Démonstration. — Sous les hypothèses du corollaire 3.1 les v. a. $\mathrm{W}_j(\infty)$, $j = 0, 1, 2$, sont p. s. égales à 1 (cf. remarque 3.1). Le cas $x = e$ est trivial. Les cas $x = 0, 2$, suite à (3.24), résultent immédiatement de l'assertion (c) de la proposition 3.1 ; par suite, pour $i = 0, 2$:

$$n^{-1}\mathscr{N}_i(n) \to (\rho_e(i))^\alpha \text{ p. s.}, \qquad \text{quand } n \to \infty . \tag{3.25}$$

Procédons par récurrence sur x pour établir le corollaire 3.1 ; supposons que pour un $x \in \mathscr{A}_e^2$ l'on ait :

$$n^{-1}\mathscr{N}_x(n) \to (\mathrm{M}(x))^\alpha \text{ p. s.}, \qquad \text{quand } n \to \infty . \tag{3.26}$$

La suite induite Y_x des valeurs prises par la suite Y dans le sous-arbre tryadique $\mathscr{A}_e^3$ (cf. (2.6)) a visiblement même loi que la suite Y, à la translation près x ; d'autre part pendant que l'on a visité $\mathscr{N}_x(n)$ fois le sous-arbre dyadique $\mathscr{A}_x^2$, les sous-arbres dyadiques $\mathscr{A}_{(x,i)}^2$, $i = 0, 2$, ont été respectivement visités $\mathscr{N}_{(x,i)}(n)$ fois. Comme $\mathscr{N}_x(n) \to \infty$, quand $n \to \infty$ (suite à l'hypothèse H.3 il est clair que $\mathrm{M}(y) > 0$ p. s. pour tout $y \in \mathscr{A}_e^2$), d'après (3.26), il en résulte que similairement à (3.25), pour $i = 0, 2$:

$$\frac{\mathscr{N}_{(x,i)}(n)}{\mathscr{N}_x(n)} \to (\rho_x(i))^\alpha \text{ p. s.}, \qquad \text{quand } n \to \infty . \tag{3.27}$$

A partir de (3.26), (3.27) et de la définition (2.1) de la pondération M on conclut que, pour $i = 0, 2$,

$$n^{-1}\mathcal{N}_{(x,i)}(n) \to (\mathrm{M}((x, i)))^{\alpha} \text{ p. s.}, \qquad \text{quand } n \to \infty .$$

La démonstration du corollaire 3.1 est donc achevée; ce corollaire nous permettra de résoudre la conjecture de L. E. Dubins dans le cas $\beta > 1$.

IV. APPLICATION A LA CONJONCTURE DE L. E. DUBINS

Considérons une famille de v. a. ξ_x, $x \in \mathscr{A}_e^3$, indépendantes, équidistribuées et à valeurs p. s. dans l'intervalle unité ouvert $]0, 1[$; fixons un réel $\beta > 1$. Les triplets aléatoires $\rho_x = \{ \rho_x(0), \rho_x(1), \rho_x(2) \}$ seront ici choisis de la manière suivante :

$$\rho_x(0) = (\xi_x)^{\beta}, \qquad \rho_x(1) = 1 - (\xi_x)^{\beta} - (1 - \xi_x)^{\beta}, \qquad \rho_x(2) = (1 - \xi_x)^{\beta} .$$

Il est évident que les triplets aléatoires ρ_x sont indépendants et équidistribuées. Si $\rho = \{ \rho(0), \rho(1), \rho(2) \}$ est un triplet ayant une loi identique à celle des ρ_x, on voit immédiatement que les hypothèses H.1, H.2 et H.3 sont vérifiées et qu'en particulier :

$$(\rho(0))^{\alpha} + (\rho(2))^{\alpha} = 1 \text{ p. s.}, \qquad \text{pour } \alpha = 1/\beta . \tag{4.1}$$

Considérons la suite $\{ \mathrm{Y}(v(n)), n \geq 1 \}$ des valeurs prises successivement par la suite Y dans le sous-arbre dyadique de Cantor $\mathscr{A}_e^2$; revenant à la définition de la suite Y et des parties aléatoires B_n intervenant dans sa définition (cf. partie II), introduisons, pour tout $n \geq 1$, la trace T_n de $\mathrm{B}_{v(n)}$ sur $\mathscr{A}_e^2$, soit :

$$\mathrm{T}_n = \mathrm{B}_{v(n)} \cap \mathscr{A}_e^2 . \tag{4.2}$$

D'après la définition de la loi de la suite Y, on a $\mathrm{Y}(v(1)) = e$ et $\mathrm{T}_1 = \{ e \}$, et il est clair que, pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{Y}(v(n + 1))$ prend ses valeurs dans T_{n+1} suivant les probabilités conditionnelles

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}(v(n + 1)) = x/\mathrm{M}, \mathrm{Y}(v(2)), \ldots, \mathrm{Y}(v(n))) = \frac{\mathrm{M}(x)}{\mathrm{M}(\mathrm{T}_{n+1})} \tag{4.3}$$

pour $x \in \mathrm{T}_{n+1}$. Si $\mathrm{Y}(v(n)) = x$, on passe de T_n à T_{n+1} en divisant en *deux* le point x suivant les points $(x, 0)$ et $(x, 2)$: suite au choix particulier des triplets ρ_x, l'on a $\mathrm{M}((x, 0)) = \mathrm{M}(x)(\xi_x)^{\beta}$ et $\mathrm{M}((x, 2)) = \mathrm{M}(x)(1 - \xi_x)^{\beta}$.

Interprétons en termes de subdivisions aléatoires de l'intervalle unité la suite des parties aléatoires T_n, $n \geq 1$. Auparavant, pour tout $x \in \mathscr{A}_e^2$, posons :

$$C(x) = (M(x))^\alpha . \tag{4.4}$$

Suite à (4.1), on voit facilement par récurrence sur n que

$$\sum_{x \in T_n} C(x) = 1 \text{ p. s.}$$

Rangeons par ordre croissant suivant l'ordre lexicographique les éléments de la partie aléatoire T_n (il va de soi que card $(T_n) = n$), soit :

$$T_n = \{ x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n} \} \qquad \text{avec} \qquad x_{n,1} \prec x_{n,2}, \ldots, \prec x_{n,n} .$$

Associons à T_n la subdivision $\bar{T}_n$ de l'intervalle unité constituée (en regardant l'intervalle unité de la gauche vers la droite) des intervalles $J_{x_{n,1}}, \ldots, J_{x_{n,n}}$ de longueurs respectives $C(x_{n,1}), \ldots, C(x_{n,n})$; en particulier $\bar{T}_1 = [0, 1]$ et $\bar{T}_2 = \{ J_0, J_2 \}$ avec $| J_0 | = \xi_e$ et $| J_2 | = 1 - \xi_e$.

Comment passe-t-on de la subdivision $\bar{T}_n$ à la subdivision $\bar{T}_{n+1}$? D'après (4.3) et (4.4) on passe de $\bar{T}_n$ à $\bar{T}_{n+1}$ en choisissant d'abord l'un des intervalles J_x, $x \in T_n$, (indépendamment du passé) suivant une probabilité *proportionnelle* à la puissance β de sa longueur, puis en divisant l'intervalle choisi J_y (auquel cas $Y(v(n)) = y$) en deux intervalles $J_{(y,0)}$ et $J_{(y,2)}$, lesquels, regardés de la gauche vers la droite, ont des longueurs respectivement proportionnelles à ξ_y et $1 - \xi_y$. Comme les v. a. ξ_x sont indépendantes et équidistribuées, on voit donc que la manière suivant laquelle on obtient la suite des subdivisions T_n est exactement celle définie par L. E. Dubins (cf. sommaire).

Considérons alors la suite $\{ Z(n), n \geq 1 \}$ des points de $[0, 1]$ définie de la manière suivante : $Z(n)$ désigne le point suivant lequel a été divisé à l'instant $n + 1$ l'intervalle choisi dans la subdivision $\bar{T}_n$. Pour tout intervalle J contenu dans $[0, 1]$ et tout $n \geq 1$, posons :

$$\bar{\mathscr{N}}(J, n) = \text{card} (\{ Z(m) : 1 \leq m \leq n \text{ et } Z(m) \in J \}) .$$

Si J_x, $x \in T_k$, est l'un des intervalles *ouverts* de la subdivision $\bar{T}_k$, il est clair que

$$\bar{\mathscr{N}}(J_x, n) = \mathscr{N}_x(n), \qquad \text{pour tout } n \geq 1 , \tag{4.5}$$

où $\mathscr{N}_x(n)$ désigne le nombre de fois où la suite Y a visité le sous-arbre dyadique $\mathscr{A}_x^2$ pendant que celle-ci a visité n fois le sous-arbre dyadique $\mathscr{A}_e^2$

(cf. fin de la partie III). Comme $(M(x))^z = C(x) = |J_x|$, du corollaire 3.1 et de (4.5) résulte que p. s., pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in T_k$:

$$n^{-1}\bar{\mathcal{N}}(J_x, n) \to |J_x|, \qquad \text{quand } n \to \infty . \tag{4.6}$$

Pour établir que p. s.

$$n^{-1}\bar{\mathcal{N}}(J, n) \to |J|, \qquad \text{quand } n \to \infty . \tag{4.7}$$

pour tout intervalle J contenu dans [0, 1], il suffit (et il nécessaire) de prouver que la longueur maximale des intervalles de la subdivision $\bar{T}_k$ tend p. s. vers 0 quand $k \to \infty$, soit :

$$\sup\{|J_x|, x \in T_k\} \to 0, \qquad \text{quand } k \to \infty ; \tag{4.8}$$

en effet, en utilisant pour chaque k un encadrement de l'intervalle J par des réunions d'intervalles issus de la subdivision T_k, puis en faisant tendre $k \to \infty$, (4.6) et (4.8) conduisent à (4.7). Donnons une démonstration directe de (4.8) en nous plaçant dans le cas général où le β de la procédure de Dubins est seulement supposé > 0 (cf. sommaire). Désignons toujours par $\bar{T}_k = \{J_x, x \in T_k\}$ la subdivision obtenue à l'instant k et par $Z(k)$ le point qui divise l'intervalle choisi à l'instant $k + 1$. Supposons que, pour un $\varepsilon > 0$, l'on ait

$$P(\varepsilon < Z_1/(1 - Z_1) < 1 - \varepsilon) > 0$$

(hypothèse manifestement satisfaite dans le cas $\beta > 1$, ici étudié, suite aux conditions imposées aux v. a. $\rho(0)$ et $\rho(2)$). Pour $t > 1$ fixé, introduisons les événements

$$B_k(t) = \{\sup\{|J_x|, x \in T_k\} \leq t^{-1}\},$$

$$D_k(t) = \{Z(k) \text{ divise un intervalle de longueur } > t^{-1} \text{ dans un rapport } a : b \text{ tel que } \varepsilon < a/b < 1 - \varepsilon\},$$

puis $B_k^c(t)$ l'événement contraire de $B_k(t)$ et $F_{k+1}(t) = B_k(t) \cup D_k(t)$.

Posons $d = P(\varepsilon < Z_1/(1 - Z_1) < 1 - \varepsilon)$; la définition même de la procédure de Dubins conduit aux inégalités :

$$\begin{aligned} P(F_{k+1}(t)/Z(1), \ldots, Z(k-1)) &\geq 1_{B_k(t)} + dt^{-\beta} 1_{B_k^c(t)} && \text{si } \beta \geq 1, \\ &\geq 1_{B_k(t)} + dt^{-\beta} k^{\beta - 1} 1_{B_k^c(t)} && \text{si } \beta \leq 1. \end{aligned}$$

Par suite nous obtenons:

$$\sum_{k \geq 1} P(F_{k+1}(t)/Z(1), \ldots, Z(k)) = \infty \qquad \text{p. s.} \tag{4.9}$$

Suite au lemme généralisé de Borel-Cantelli, il résulte de (4.9) qu'une infinité de $F_{k+1}(t)$ est réalisée p. s.; comme le nombre d'intervalles de longueur $> t^{-1}$ qui apparaissent dans chacune des subdivisions T_k est majoré par $t + 1$, on voit qu'un nombre fini de $D_k(t)$ est au plus réalisé p. s.. Par suite une infinité de $B_k(t)$ est p. s. réalisée : en d'autres termes, $\sup \{ | J_x |, x \in T_k \} \leq t^{-1}$ pour k aléatoire assez grand, puisque $\sup \{ | J_x |, x \in T_k \}$ décroît selon k; d'où (4.8).

La conjecture de Dubins est donc démontrée dans le cas $\beta > 1$.

APPENDICE

Pour $\rho > 0$, $\alpha' > 0$ et $\mathscr{D}$ partie de $[0, 1]$ introduisons

$$H_\rho^{\alpha'}(\mathscr{D}) = \inf \sum_i |S_i|^{\alpha'},$$

la borne inférieure étant prise sur tous les recouvrements dénombrables $\{S_i\}$ de $\mathscr{D}$ par des intervalles S_i de longueur $|S_i| \leq \rho$. Nous devons donc démontrer que le Cantor aléatoire $\mathscr{C}$ (cf. remarque 3.3) satisfait p. s. à

(1) $$H_\rho^{\alpha'}(\mathscr{C}) = 0, \qquad \text{pour tout } \alpha' > \alpha,$$

(2) $$\lim_{\rho \to 0} H_\rho^{\alpha'}(\mathscr{C}) > 0, \qquad \text{pour tout } \alpha' < \alpha.$$

Comme $H_\rho^{\alpha'}(\mathscr{D})$ décroît selon α', on peut se limiter à des α' rationnels.

Pour tout $n \geq 0$, posons $I(n) = \{ x : x \in \mathscr{A}_e^2 \text{ et } l(x) = n \}$, puis

$$\bar{L}(n, \alpha') = \sum_{x \in I(n)} (M(x))^{\alpha'}.$$

Posant $K(\alpha') = E[(\rho(0))^{\alpha'} + (\rho(2))^{\alpha'}]$ on voit que, sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3, $\alpha' > \alpha$ implique $K(\alpha') < 1$; d'autre part on remarque que $\bar{L}(n, \alpha')/(K(\alpha'))^n$ est une martingale (positive) qui converge donc p. s. vers une v. a. finie quand $n \to \infty$. Par suite, pour $\alpha' > \alpha$, $L(n, \alpha') \to 0$ p. s. quand $n \to \infty$; comme, pour chaque n, $\{ J_x : x \in I(n) \}$ constitue un recouvrement de $\mathscr{C}$, il est clair que $H_1^{\alpha'}(\mathscr{C}) \leq \bar{L}(n, \alpha')$ pour $n \geq N$ (N aléatoire assez grand) : d'où (1).

Pour tout $t > 1$, introduisons l'ensemble $A(t)$ défini par :

(*a*) $$A(t) = \{ (x, i) : x \in \mathscr{A}_e^2,\ i = 0 \text{ et } 2,\ M(x) \geq t^{-1} \text{ et } M((x, i)) < t^{-1} \};$$

en d'autres termes les intervalles $J_{(x,i)}$ s'obtiennent en divisant en trois tout intervalle J_z, $z \in \mathscr{A}_e^2$, tant que J_z a une longueur $\geq t^{-1}$: comme, sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3, $\sup \{ |J_x| : x \in I(n) \} \to 0$ p. s. quand $n \to \infty$, on voit qu'au terme d'un nombre fini de divisions on aboutit à des intervalles de longueur $< t^{-1}$ (disjoints) et que la réunion des intervalles $J_{(x,i)}$ obtenus contient $\mathscr{C}$. Pour $0 < \varepsilon < 1$, introduisons le sous-ensemble $A_\varepsilon(t)$ de $A(t)$ défini par

(*b*) $$A_\varepsilon(t) = \{ (x, i) : (x, i) \in A(t) \text{ et } M(x) \geq t^{\varepsilon - 1} \},$$

puis

$$N_\varepsilon(t) = \text{card}\,(A_\varepsilon(t)), \qquad V_1(t) = \text{card}\,(\{ x : x \in \mathscr{A}_e^2 \text{ et } M(x) \geq t^{-1} \}).$$

On a la majoration évidente :

(*c*) $$N_\varepsilon(t) \leq 2\, V_1(t^{1-\varepsilon}).$$

En posant $h_1(t) = 1_{[1, \infty[}(t)$, il va de soi que

$$V_1(t) = \sum_{x \in \mathscr{A}_e^2} h_1(tM(x));$$

en d'autres termes V_1 (exp u) est une fonctionnelle linéaire, croissante selon u, d'un proces-

sus de B. C. M. J. (cf. (3.5)). De la proposition 3.1 et de (*c*) résulte que, sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3, cas arithmétique et non-arithmétique confondus,

$$(d) \qquad \limsup_{t \to \infty} t^{-\alpha(1-\varepsilon)} N_\varepsilon(t) < \infty \qquad \text{p. s.}$$

Ajoutons l'hypothèse particulière $(\rho(0))^\alpha + (\rho(2))^\alpha = 1$ p. s. Pour tout $n \geq 0$, introduisons la σ-algèbre $\mathfrak{A}_n$ (aléatoire) engendrée par les intervalles J_x, $x \in I(n)$, et les boréliens de $[0, 1]$ disjoints des intervalles J_x, $x \in I(n)$, puis la probabilité λ_n sur $\mathfrak{A}_n$ définie par : $\lambda_n(J_x) = |J_x|^\alpha$, $x \in I(n)$; comme $\sup\{|J_x| : x \in I(n)\} \to 0$ p. s. quand $n \to \infty$ on voit que la suite croissante des σ-algèbres $\mathfrak{A}_n$ engendre p. s. la σ-algèbre des boréliens de $[0, 1]$. Désignons par λ l'unique extension (aléatoire) sur les boréliens de $[0, 1]$ des probabilités λ_n (cf. [4]). De (*b*) et (*d*) résulte que la mesure de la réunion

$$\mathscr{F}_\varepsilon^1(t) = \bigcup_{(x,i) \in A_\varepsilon(t)} J_{(x,i)}$$

satisfait p. s. à

$$(e) \qquad \lambda(\mathscr{F}_\varepsilon^1(t)) = 0(t^{-\alpha\varepsilon}) \qquad \text{quand } t \to \infty .$$

Fixons s réel de telle sorte que $s\alpha\varepsilon > 1$; posons $B_\varepsilon(t) = A(t) \setminus A_\varepsilon(t)$, puis

$$\mathscr{F}_\varepsilon^2(t) = \bigcup_{(x,i) \in B_\varepsilon(t)} J_{(x,i)} ;$$

introduisons le borélien (aléatoire)

$$(f) \qquad \mathscr{D}_n = \bigcap_{p \geq n} \mathscr{F}_\varepsilon^2(p^s) .$$

Comme $\lambda(\mathscr{F}_\varepsilon^1(t)) + \lambda(\mathscr{F}_\varepsilon^2(t)) = 1$ p. s., il résulte de (*e*) et de la convergence de la série $\sum_{p \geq 1} p^{-s\alpha\varepsilon}$ que

$$(g) \qquad \lambda(\mathscr{D}_n) \to 1 \text{ p. s.} \qquad \text{quand } n \to \infty .$$

Pour N aléatoire assez grand nous avons donc

$$(h) \qquad \lambda(\mathscr{D}_N) \geq 1/2 \text{ p. s.}$$

Pour être plus précis plaçons nous sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{B}, P)$. Pour tout $\omega \in \Omega$, considérons un intervalle I_t quelconque de $[0, 1]$ de longueur t^{-1} tel que

$$p^s > t \geq (p-1)^s \geq (N(\omega))^s ;$$

considérons l'ensemble, éventuellement vide, des intervalles $J_{(x_k, i_k)}$, $1 \leq k \leq m$, tels que $(x_k, i_k) \in B_\varepsilon(p^s)$ et $I_t \cap J_{(x_k, i_k)} \neq \emptyset$: un minimum de réflexion montre que l'on peut choisir un sous-ensemble D de $\{1, 2, \ldots, m\}$ tel que

$$(i) \qquad \bigcup_{1 \leq k \leq m} I_t \cap J_{(x_k, i_k)} \subset \bigcup_{k \in D} J_{x_k} , \qquad \text{avec card (D)} \leq 2 .$$

Comme $|J_{x_k}| < p^{-s(1-\varepsilon)}$, puisque $(x_k, i_k) \in B_\varepsilon(p^s)$, l'on a $\lambda(J_{x_k}) < p^{-s\alpha(1-\varepsilon)}$; compte tenu de l'expression (f) des $\mathscr{D}_n$ et de (i), on obtient que, pour presque-tout ω,

$$(j) \qquad \lambda(I_t \cap \mathscr{D}_{N(\omega)}) \leq 2^{1+s\alpha(1-\varepsilon)} t^{-\alpha(1-\varepsilon)} .$$

Soit $\{ S_i \}$ un recouvrement de $\mathscr{D}_{N(\omega)}$ constitué d'intervalles S_i de longueur

$$| S_i | \leq \rho \leq (N(\omega))^{-s};$$

posant $c = 2^{1+s\alpha(1-\varepsilon)}$, l'on déduit de (j) que, pour presque-tout ω,

$$\begin{aligned} \sum_i | S_i |^{\alpha(1-\varepsilon)} &\geq c^{-1} \sum_i \lambda(S_i \cap \mathscr{D}_{N(\omega)}) \\ &\geq c^{-1} \lambda(\mathscr{D}_{N(\omega)}) \\ &\geq (2c)^{-1}. \end{aligned}$$

Pour presque-tout ω, on a donc $\lim_{\rho \to 0} H_\rho^{\alpha(1-\varepsilon)}(\mathscr{D}_{N(\omega)}) > 0$; mais, comme $\mathscr{D}_{N(\omega)} \subset \mathscr{C}(\omega)$, l'on a $H_\rho^{\alpha(1-\varepsilon)}(\mathscr{D}_{N(\omega)}) \leq H_\rho^{\alpha(1-\varepsilon)}(\mathscr{C}(\omega))$: d'où (2).

CONCLUSION

Nous conclurons par les remarques suivantes sur la procédure de L. E. Dubins (cf. sommaire) dans les cas limites $\beta = 0$ ou ∞.

(1) Le cas $\beta = 0$ correspond au cas où l'on choisit à chaque instant $n + 1$ suivant une probabilité uniforme l'un des intervalles obtenus à l'instant n; ce cas, étudié par J. Peyrière [*12*], conduit à une distribution limite singulière dont on peut préciser la dimension de Hausdorff du support.

(2) Le cas $\beta = \infty$ correspond au cas où l'on choisit à chaque instant $n + 1$ suivant une probabilité uniforme l'un des intervalles de *longueur maximale* obtenus à l'instant n; la distribution limite est en général uniforme : voir S. Kakutani [*8*], R. L. Adler et L. Flatto [*1*] et l'auteur [*9*] dans le cas d'une loi de division constante, W. R. Van Zwet [*14*] et [*9*] dans le cas d'une loi de division uniforme, l'auteur [*10*] dans le cas d'une loi de division admettant une composante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ([*11*] donne une généralisation de [*10*] et souligne l'utilité de la théorie des processus de B. C. M. J. pour résoudre ce type de problème). Bornons-nous à indiquer que l'utilisation des résultats de [*3*] et [*13*] permet d'éliminer l'hypothèse d'absolue continuité du théorème 1.III, p. 301, de [*10*], et de compléter (sans la recouvrir) l'hypothèse $(\mathscr{J})$ du théorème 1.1, p. 427, de [*11*].

REMERCIEMENTS

Nous remercions J. P. Thouvenot et F. Ledrappier pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et le rapporteur pour la lecture critique de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] R. L. Adler et L. Flatto, Uniform distribution of Kabutani's interval splitting procedure. *Z. Wahrschein. verw. Gebiete*, t. **38**, 1977, p. 253-259.

[*2*] K. B. Athreya et N. Kaplan, Convergence of the age-distribution in the one-dimensional supercritical age-dependent branching processes. *Ann. Proba.*, t. **4**, n° 1, 1976, p. 38-50.

[*3*] K. B. Athreya et K. Rama Murthy, Convergence of state distribution in supercritical multitype Crump-Mode-Jagers branching processes. *J. Indian Math. Soc.*, t. **41**, 1977, p. 27-57.

[4] W. FELLER, *Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol. **II**, 3e édition, Wiley and Sons.

[5] T. E. HARRIS, *The theory of braching processes*. Springer-Verlag.

[6] P. JAGERS, Renewal theory and the almost sure convergence of branching processes. *Ark. Math.*, t. **7**, 1968, p. 495-504.

[7] P. JAGERS, Convergence of general branching processes and functionnals thereof. *J. Appl. Proba.*, t. **11**, 1974, p. 471-478.

[8] S. KAKUTANI, Measure theory. *Lectures Notes*, Oberwolfach, Proceedings, 1975, 541.

[9] J. C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani (I). *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **XIII**, 4, 1977, p. 385-410.

[10] J. C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani (II). *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **XIV**, 3, 1978, p. 279-302.

[11] J. C. LOOTGIETER, Processus généraux de branchements et procédure de Kakutani généralisée. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **288**, Série A, 1979, p. 427-430.

[12] J. PEYRIÈRE, A singular random measure generated by splitting [0, 1]. *Z. Wahrschein. Verw. Gebiete*, t. **47**, 1979, p. 289-297.

[13] K. RAMA-MURTHY, Convergence of state distribution in multitype Bellman-Harris and Crump-Mode-Jagers branching processes. *Ph. D. Thesis*, 1978, Indian Institute of Science.

[14] R. W. VAN ZWET, A proof of a conjecture of Kalutani. *Ann. Proba.*, t. **1**, 1978, p. 133-137.

(Manuscrit reçu le 4 novembre 1980).