ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

S. GUERRE
J. T. LAPRESTÉ

Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, nº 4 (1980), p. 339-347
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_4_339_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVI, n° 4, 1980, p. 339-347. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach

par

S. GUERRE et **J. T. LAPRESTÉ**
(Paris VI) (Clermont-Ferrand)

INTRODUCTION

L'objet de cet article est, d'une part l'étude des relations entre les espaces de Banach et leurs modèles étalés et à partir de là, une caractérisation des espaces de Banach n'ayant pas c_0 pour modèle étalé.

Cette étude a été motivée par l'article de B. Beauzamy : « Banach Saks properties and Spreading Models » [*1*], où, entre autres, sont caractérisés, les espaces de Banach n'ayant pas l_1 pour modèle étalé. Rappelons que la notion de modèle étalé doit son origine à A. Brunel et L. Sucheston : « On B-convex Banach Spaces » [*3*] et qu'elle a été étudiée notamment par H. P. Rosenthal.

La première partie élucide les rapports entre le comportement du point de vue de la topologie faible des bonnes suites et des suites fondamentales des modèles étalés associés. Dans la deuxième partie, on caractérise les espaces n'ayant pas c_0 pour modèle étalé, caractérisations analogues à celles données par W. B. Johnson [*8*] et E. Odell et M. Wage [*9*], des espaces ne contenant pas c_0. Les notations seront celles de [*6*].

Rappels et définitions. — Les notions que nous allons définir ont été introduites initialement par A. Brunel et L. Sucheston dans [*3*]. Bien que la terminologie que nous employons ici ne soit pas la même, on vérifie aisément que ces définitions coïncident avec celles de [*3*]. Soit E un espace de Banach.

On appelle *modèle étalé au-dessus de* E *associé à une suite bornée* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par un ultrafiltre non trivial* $\mathcal{U}$, le complété de $E \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour la semi-norme définie par : $\forall x \in E$, $\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$:

$$\left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| = \lim_{\substack{n_1 \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \ldots \lim_{\substack{n_k \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{n_i} \right\|.$$

Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, n'a pas de sous-suite de Cauchy pour la norme, ce que l'on supposera toujours par la suite, cette semi-norme est en fait une norme. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie sera appelée *suite fondamentale* du modèle étalé et l'espace de Banach $[e_i, i \in \mathbb{N}]$ qu'elle engendre *modèle étalé de* E *associé à* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $\mathcal{U}$. Cet espace $[e_i, i \in \mathbb{N}]$ est donc le complété de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour la norme : $\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| = \lim_{\substack{n_1 \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \ldots \lim_{\substack{n_k \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{n_i} \right\|.$$

La suite fondamentale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un modèle étalé est *écartable* (I. S. dans [*3*]) c'est-à-dire que pour toute suite croissante d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_{n_i} \right\|.$$

En particulier, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à chacune de ses sous-suites.

On appellera enfin *bonne suite de* E toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que :

$$\forall x \in E,\ \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})},$$
$$\left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| = \lim_{n_1 \to +\infty} \ldots \lim_{n_k \to +\infty} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{n_i} \right\|.$$

Rappelons un résultat fondamental de [*3*] : « toute suite bornée d'un espace de Banach séparable possède une bonne sous-suite ».

Ceci permet de ramener l'étude des modèles étalés au-dessus d'un espace de Banach séparable, à l'étude de ses modèles étalés associés à de bonnes suites et par conséquent de ne plus utiliser d'ultrafiltre.

Comme, d'autre part, l'étude des modèles étalés d'un espace de Banach quelconque se ramène à l'étude des modèles étalés de ses sous-espaces séparables, nous limiterons cette étude au cas des espaces séparables.

I. PROPRIÉTÉS FAIBLES

Pour l'étude des rapports entre les bonnes suites d'un espace de Banach séparable E et des suites fondamentales des modèles étalés associés, nous aurons besoin d'un résultat sur les suites écartables.

LEMME 1. — *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite écartable d'un espace de Banach* F. *Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement vers 0 dans* F, *il existe*

$$\delta > 0 \qquad \textit{tel que :} \qquad \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| \geqslant \delta \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right|.$$

(*ie* : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de type* P* (cf. [*11*]) si elle est basique).

Démonstration. — Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement vers 0, il existe une forme linéaire f sur F de norme 1 et un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une sous-suite $(e_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \delta - \varepsilon \leqslant f(e_{n_i}) \leqslant \delta + \varepsilon.$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ étant fixé, on en déduit :

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_{n_i} \right\| \geqslant \left| f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_{n_i} \right) \right|$$
$$= \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_{n_i}) \right| \geqslant \delta \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right| - \varepsilon \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|.$$

Comme l'inégalité $\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| \geqslant \delta \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right| - \varepsilon \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|$ est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien :

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| \geqslant \delta \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right|.$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une bonne suite d'un espace de Banach séparable* E *et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite fondamentale du modèle étalé* F *au-dessus de* E *associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si l'on suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas équivalente à la base canonique de l_1, on a :*

(1) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est faiblement de Cauchy dans* F.

(2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est faiblement de Cauchy dans* E.

(3) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement dans* E *si et seulement si* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement dans* F *et la limite est la même (donc en particulier appartient à* E*).*

Remarque. — La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être équivalente à la base canonique de l_1 quelle que soit la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: considérons l'espace de Banach $E = B \oplus c_0$ où B est l'espace de Baernstein décrit dans [*1*]. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de B, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base sommante de c_0 et b un élément de B. Les suites fondamentales des modèles étalés associés aux suites $(b_n - b, 0)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n, s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E sont équivalentes à la base canonique de l_1 alors que ces deux suites sont, l'une faiblement convergente vers b et l'autre faiblement de Cauchy non convergente dans E.

Démonstration du théorème 1. — (1) Comme la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est écartable, elle est équivalente à toutes ses sous-suites, donc si elle n'est pas équivalente à la base canonique de l_1, elle est faiblement de Cauchy dans F d'après [*10*].

(2) Soit f une forme linéaire continue sur E. Si la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, soient $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux sous-suites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lambda \quad , \quad \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \mu \quad , \quad \lambda \neq \mu .$$

En posant $\widehat{f}(e_{2i}) = \lambda$, $\widehat{f}(e_{2i+1}) = \mu$ pour $i \in \mathbb{N}$, on vérifie que $\widehat{f}$ est une forme linéaire continue sur F prolongeant f. Par suite comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement de Cauchy, $\lambda = \mu$ ce qui est une contradiction.

(3) Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$. Alors $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 et d'après [*3*], la suite fondamentale $(e_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ du modèle étalé qui lui est associé est basique inconditionnelle. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas équivalente à la base canonique de l_1, $(e_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus et le lemme 1 prouve alors qu'elle converge faiblement vers 0.

Réciproquement, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers e dans F, montrons d'abord que e est dans E. On sait qu'il existe une suite $\theta_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i e_i$ avec $\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ qui converge vers e dans F pour la norme.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p, q \geqslant N \Rightarrow \| \theta_p - \theta_q \| \leqslant \varepsilon .$$

Mais, par définition de la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un élément t de E tel que : $| \, \| \theta_p - \theta_q \| - \| \theta_p - t \| \, | \leqslant \varepsilon$. De ces deux propriétés, on déduit que la distance de la suite $(\theta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ à l'espace de Banach E tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Ceci veut dire que la limite e de $(\theta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est dans E.

Soit alors f une forme linéaire sur E. Comme la suite $(x_n - e)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement de Cauchy dans E, on peut poser pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{f}(e_i - e) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n - e).$$

On vérifie aisément que $\widehat{f}$ est une forme linéaire sur F, de même norme que f et par conséquent $\widehat{f}(e_i - e) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Donc $(x_n - e)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.

Le deuxième théorème de cette partie permet de simplifier l'étude des modèles étalés d'un espace :

THÉORÈME 2. — (1) *Tout modèle étalé* au-dessus *d'un espace de Banach séparable* E *est isométrique à un modèle étalé* au-dessus *de* E *dont la suite fondamentale est* basique.

(2) *Tout modèle étalé de* E *est isomorphe à un modèle étalé de* E, *dont la suite fondamentale est* basique.

Démonstration. — Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite fondamentale d'un modèle étalé au-dessus d'un espace de Banach séparable E associé à une bonne suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas basique, elle n'est certainement pas équivalente à la base canonique de l_1, donc elle est faiblement de Cauchy. On sait d'après [*2*] et [*4*] ou [*7*] que cette suite écartable n'est pas basique si et seulement si elle converge faiblement vers un élément $e \neq 0$. Mais alors si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers e, e est dans E et le modèle étalé au-dessus de E associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est isométrique au modèle étalé au-dessus de E associé à $(x_n - e)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la suite fondamentale $(e_n - e)_{n\in\mathbb{N}}$ est basique.

De plus, l'espace engendré par $(e_n - e)_{n\in\mathbb{N}}$ est isomorphe à l'espace engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

De ces résultats, on déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Si la suite fondamentale d'un modèle étalé de c_0 (resp : l_p, $1 \leqslant p < +\infty$) est basique, elle est équivalente à la base canonique ou à la base sommante de c_0 (resp : à la base canonique de l_p).*

Démonstration. — Le cas des espaces l_p, $1 \leqslant p < +\infty$, est évident.

CAS DE c_0. — D'après les résultats précédents, si la suite fondamentale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un modèle étalé de c_0 est basique, elle est associée à une bonne suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0 telle que :

ou bien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans c_0 et alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est trivialement équivalente à la base canonique de c_0

ou bien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement de Cauchy non convergente. Dans ce cas, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est basique, de type P^* d'après le lemme 1 et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $z_1 = e_1, z_2 = e_1 - e_2, \ldots, z_n = e_{n-1} - e_n, \ldots$ est une base du modèle étalé engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. [*11*], théorème 9.2, p. 311). De plus, les suites $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont les suites fondamentales associées aux suites $(x_{2n-1} - x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n} - x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes à la base canonique de c_0 d'après le premier cas. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc équivalente à la base canonique de c_0 et par conséquent, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la base sommante de c_0.

II. ESPACES DE BANACH N'AYANT PAS c_0 POUR MODÈLE ÉTALÉ

Dans [*1*], B. Beauzamy a caractérisé les espaces de Banach n'ayant pas l_1 pour modèle étalé. Nous nous proposons de faire de même pour c_0, de deux façons différentes. Pour cela, donnons une définition préliminaire : si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un espace de Banach, on dira que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *par sous-séries* si pour toute sous-suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i \right\| = +\infty.$$

On dira que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend uniformément vers* $+\infty$ *par sous-séries* si la limite précédente est uniforme sur l'ensemble des sous-suites de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$ et $\left\| \sum_{i=1}^{n} z_i \right\| \geqslant \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute sous-suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le théorème 3 que nous allons donner ici est l'analogue pour les modèles étalés d'un résultat de W. B. Johnson qui figure dans [*8*] : « un espace de Banach ne contient pas c_0 si et seulement si toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E a une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ par sous-séries ».

THÉORÈME 3. — *Un espace de Banach* E *n'a pas* c_0 *pour modèle étalé si et seulement si toute suite bornée* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *a une sous-suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que la série* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende uniformément vers* $+\infty$ *par sous-séries.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que si un espace de Banach E a c_0 pour modèle étalé, il a un modèle étalé dont la suite fondamentale est équivalente à la base canonique de c_0. En effet, E a un modèle étalé dont la suite fondamentale est équivalente soit à la base canonique, soit à la base sommante de c_0 (théorème 2 et corollaire). Or si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la base sommante, $(e_{2n+1} - e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de c_0 et est la suite fondamentale d'un modèle étalé de E.

Pour montrer le théorème 3, il suffit donc de montrer que la suite fondamentale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un modèle étalé de E associé à une bonne suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas équivalente à la base canonique de c_0 si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende uniformément vers $+\infty$ par sous-séries.

Or si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite qui converge faiblement vers 0, il est clair d'après le théorème 2 que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée ne peut être équivalente à la base canonique de c_0 et que de plus, elle a une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende uniformément vers $+\infty$ par sous-séries. On peut donc supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0, donc *a fortiori* qu'elle est basique (cf. [*2*]) et par suite que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est basique inconditionnelle. Il est alors facile de voir que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas équivalente à la base canonique de c_0 si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\| = +\infty$. Le résultat du théorème 3 est alors une conséquence du lemme 2 :

LEMME 2. — *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une bonne suite basique de* E *et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite fondamentale du modèle étalé de* E *associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\| = +\infty$$

si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende uniformément vers $+\infty$ par sous-séries.

Démonstration. — Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\| = +\infty$. Alors :

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad n \geqslant N \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\| \geqslant M + 1$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est associée à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a par définition :

$$\exists \nu_N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \nu_N < n_1 < n_2 \ldots < n_N \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{N} x_{n_i} \right\| \geqslant \left\| \sum_{i=1}^{N} e_i \right\| - 1 \geqslant M.$$

A partir de cette propriété, on construit (y_n) par récurrence : prenons $M_1 = 2$. Comme ci-dessus, on lui associe N_1 et $\nu_1 = \nu_{N_1}$.

Posons alors $y_1 = x_{\nu_1}, y_2 = x_{\nu_1+1} \dots y_{N_1} = x_{\nu_1+N_1}$.

A l'ordre k, on pose $M_k = 2^k(N_1 + \dots + N_{k-1})$ et on lui associe N_k et $\nu_k = \text{Sup}(\nu_{N_k}, \nu_{N_{k-1}} + N_{k-1})$ comme ci-dessus. On prend alors

$$y_{N_1+\dots+N_{k-1}+1} = x_{\nu_k}, \dots y_{N_1+\dots N_{k-1}+N_k} = x_{\nu_k+N_k}.$$

Soit alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite et K la constante de basicité de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $n > N_1 + \dots + N_k$, on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} z_i\right\| \geqslant \frac{1}{k}\left\|\sum_{i=1}^{N_1+\dots+N_k} z_i\right\| \geqslant \frac{1}{k}\left(\left\|\sum_{i=N_1+\dots+N_{k-1}}^{N_1+\dots+N_k} z_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{N_1+\dots+N_{k-1}} z_i\right\|\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{k}(N_1 + \dots + N_{k-1})(2^k - \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|).$$

Ceci prouve que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend uniformément vers $+\infty$ par sous-séries. La réciproque est immédiate, l'hypothèse sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ impliquant, d'une part qu'il existe une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{i=1}^{p_n} e_i$ tende vers $+\infty$ et d'autre part que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est basique.

Pour établir la deuxième caractérisation des espaces n'ayant pas c_0 pour modèle étalé, donnons deux nouvelles définitions : si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un espace de Banach, on dira que la *série* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *par sous-séries et pour tout choix de signe* si quelles que soient la sous-suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_n = \pm 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i z_i\right\| = +\infty.$$

On dira que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend uniformément vers* $+\infty$ *par sous-séries et pour tout choix de signe* si la limite précédente est uniforme sur l'ensemble des sous-suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des suites de signes $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left(\text{i. e. : }\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i z_i\right\| \geqslant \varphi(n),\ \lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty\right).$$

De la même façon que le théorème 3 étend aux modèles étalés un résultat de W. B. Johnson, le théorème 4 étend aux modèles étalés un résultat de E. Odell et M. Wage [9] : « Un espace de Banach E ne contient pas c_0 si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente vers 0 de E a une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ par sous-séries et pour tout choix de signes ».

THÉORÈME 4. — *Un espace de Banach* E *n'a pas c_0 pour modèle étalé si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant faiblement vers* 0 *de E a une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende uniformément vers $+\infty$ par sous-séries et pour tout choix de signes.*

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle du théorème 3.

Par des méthodes classiques, à partir de ces caractérisations, on peut obtenir le résultat suivant :

COROLLAIRE 2. — *Si un espace de Banach* E *n'a pas c_0 pour modèle étalé, alors l^p(E) non plus pour $1 \leqslant p < +\infty$.*

Remarquons que le problème est ouvert pour l'espace L^p(E), mais que la réponse est vraisemblablement négative au vu de l'exemple de J. Bourgain concernant le cas de l_1 (cf. Séminaire d'Analyse fonctionnelle 1979-1980, École polytechnique, exposé VIII).

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. BEAUZAMY, Banach Saks properties and Spreading models. *Math. Scand.*, t. **44**, 1979, p. 357-384.

[2] C. BESSAGA and A. PELCZINSKI, On bases and unconditional convergence of series in Banach Spaces. *Studia Math.* t. **XVII**, 1958.

[3] A. BRUNEL et L. SUCHESTON, On B-Convex Banach Spaces. *Math. Systems Theory*, t. **7**, n° 4, 1973.

[4] M. I. KADETS and A. PELCZYNSKI, Basic sequences and biorthogonal system and norming sets in Banach spaces. *Studia Math.*, t. **25**, 1965, p. 297-323 (en russe).

[5] J. T. LAPRESTÉ, *Suites écartables dans les espaces de Banach. Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach.* École Polytechnique, n° XX, 1977-1978.

[6] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI, *Classical Banach spaces I et II*, Springer-Verlag.

[7] V. D. MILLMAN, Geometric theory of Banach spaces. Part I. *Russian Math. Surveys*, 1970-1971, p. 111.

[8] E. ODELL, *Applications of Ramsey theorems to Banach spaces theory*, Preprint, University of Texas at Austin.

[9] E. ODELL and W. WAGE, *Weakly null normalised sequences equivalent to the unit vector basis of c_0*, Preprint, University of Texas at Austin.

[10] H. P. ROSENTHAL, A caracterisation of Banach spaces containing l_1. *Proc. Nat. Acad. Sci.* (U. S. A.), t. **71**, 1974, p. 2411-2413.

[11] I. SINGER, *Bases in Banach spaces*, Springer-Verlag.

(Manuscrit reçu le 23 juin 1980).