

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GUY RUCKEBUSCH

Théorie géométrique de la Représentation Markovienne

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, n° 3 (1980), p. 225-297

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_3_225_0

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Théorie géométrique de la Représentation Markovienne

par

Guy RUCKEBUSCH (*)

Schlumberger-Doll Research, P. O. Box 307,
Ridgefield, Connecticut, 06877, USA

RÉSUMÉ. — On présente une approche géométrique de la Théorie de la Représentation Markovienne des processus Gaussiens. L'originalité de cette approche consiste à définir le concept de Représentation Markovienne en termes d'espaces Gaussiens, ce qui conduit naturellement à étudier la théorie dans un cadre Hilbertien abstrait. Ce cadre présente un double avantage. D'une part, il rend possible une caractérisation complète de l'ensemble des Représentations Markoviennes, de dimension finie ou infinie, d'un processus donné. D'autre part, il permet de définir géométriquement les concepts de Représentation Markovienne observable ou constructible, établissant ainsi des analogies très profondes avec la Théorie Mathématique des Systèmes.

SUMMARY. — A geometric approach to the Theory of Markovian Representation for Gaussian processes is presented. The originality of this approach involves defining the concept of Markovian Representation in terms of Gaussian spaces, which naturally leads to a study of the theory in an abstract Hilbert space framework. This framework has two advantages. On the one hand it makes possible a thorough characterization of the set of finite or infinite dimensional Markovian Representations of a given process. On the

(*) Le travail présenté ici constitue une partie de la thèse de doctorat d'État de l'auteur soutenue le 18 avril 1980 à l'Université Paris VI. Cette thèse a été préparée au Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique sous la direction de M. J. Neveu.

other hand it enables us to define the concepts of observable or constructible Markovian Representation, thus establishing very deep analogies with Mathematical System Theory.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	227
PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES ET NOTATIONS	230
<i>PREMIÈRE PARTIE.</i>	232
CHAPITRE I. <i>Le concept de Représentation Markovienne</i>	233
I.1 Présentation classique	233
I.2. Formulation géométrique équivalente.	235
I.3. Présentation abstraite	238
I.4. Solution du Problème de la Réalisation Stochastique.	239
CHAPITRE II. <i>Observabilité et constructibilité</i>	240
II.1. Introduction à l'observabilité et la constructibilité	240
II.2. Définition de l'observabilité et de la constructibilité	241
II.3. Structure des RMO et des RMC	243
II.4. Décomposition canonique des RM	245
CHAPITRE III. <i>Filtrage des Représentations Markoviennes</i>	247
III.1. Filtre des RM	247
III.2. Cofiltre des RM	249
III.3. Théorèmes d'isomorphisme entre les RMM	250
<i>DEUXIÈME PARTIE.</i>	252
CHAPITRE IV. <i>Antifiltre des Représentations Markoviennes</i>	252
IV.1. L'antifiltre des RM.	253
IV.2. Caractérisation des antifiltres des RMO.	255
IV.3. L'antifiltre propre	256
CHAPITRE V. <i>Construction des Représentations Markoviennes observables et minimales</i>	258
V.1. Construction des RMO.	258
V.2. Construction des RMM	260
V.3. Structures d'ordre sur les RMO	261
<i>TROISIÈME PARTIE</i>	262
CHAPITRE VI. <i>Innovation et Représentations Markoviennes</i>	262
VI.1. L'innovation des RM	263
VI.2. La co-innovation des RM	264
VI.3. Caractérisation des innovations observables internes	265

CHAPITRE VII. <i>Régularité des Représentations Markoviennes.</i>	267
VII.1. Régularité des RM.	267
VII.2. Co-régularité des RM.	270
VII.3. Critère de régularité de l'ensemble des RMM	271
QUATRIÈME PARTIE	272
CHAPITRE VIII. <i>Construction des Représentations Markoviennes minimales finies-dimensionnelles.</i>	273
VIII.1. Compléments sur l'ensemble $\mathcal{M}$	275
VIII.2. Construction de $\widehat{X}$	276
VIII.3. Propriétés de Z_*	279
VIII.4. Construction des RMM à antifiltre non dégénéré.	282
VIII.5. Construction des RMM internes	284
ANNEXE. <i>Représentations markoviennes des processus continus</i>	288
A.1. Formulation géométrique équivalente.	289
A.2. Équivalence des modèles géométriques discret et continu	291
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.	293

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de présenter une approche géométrique de la Théorie de la Représentation Markovienne ⁽¹⁾. Schématiquement celle-ci a pour objet l'étude des représentations de processus aléatoires par des modèles Markoviens. Nous nous restreindrons aux modèles linéaires pour lesquels l'approche géométrique semble particulièrement adaptée. De toute façon la théorie non linéaire est à l'heure actuelle très peu développée (voir néanmoins l'article de Willems-Van Schuppen [WiS]). La théorie qui s'était longtemps confinée à la solution du soi-disant « Problème de la Réalisation Stochastique » vise à présent à l'élaboration de ce qu'on pourrait appeler une « Théorie générale des systèmes stochastiques linéaires ».

Rappelons brièvement l'exposition classique du Problème de la Réalisation Stochastique en se limitant toutefois ici au cas des processus stationnaires à temps discret : *étant donné un processus Gaussien stationnaire (vectoriel) $Y = (Y(n), n \in \mathbb{Z})$, on dit qu'un processus vectoriel $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$*

⁽¹⁾ La terminologie ne semble pas fixée dans la littérature; à côté de « Représentation Markovienne » on trouve aussi « Réalisation Stochastique ».

est une Représentation Markovienne de Y (en abrégé RM) lorsque Y vérifie le modèle suivant :

$$\begin{aligned} Y(n) &= HX(n) + JW(n), \\ X(n+1) &= FX(n) + LW(n), \end{aligned}$$

où $W = (W(n), n \in \mathbb{Z})$ est un « bruit blanc » Gaussien vectoriel unitaire et (F, H, J, L) un quadruplet de matrices constantes de dimensions convenables avec F asymptotiquement stable ⁽²⁾. On dit que X est une Représentation Markovienne Minimale (en abrégé RMM) lorsque sa dimension (en tant que vecteur) est minimale (dans l'ensemble des RM). On définit alors le Problème de la Réalisation Stochastique comme la construction de toutes les RMM. Dans la littérature (cf. [LiP-1]) on distingue parfois deux Problèmes de la Réalisation Stochastique : celui que nous venons de définir, appelé *forme forte*, et la *forme faible* qui consiste uniquement à déterminer l'ensemble de tous les quadruplets (F, H, J, L) à partir de la loi de Y . On notera que, jusqu'à une date récente, seule était considérée la forme faible bien qu'elle ne soit en fait qu'un sous-produit de la forme forte.

Dans ce travail nous adoptons une nouvelle exposition de la théorie qui nous permettra de généraliser considérablement les résultats classiques. L'originalité de notre approche consiste à définir le concept de RM (resp. RMM) en termes d'espaces Gaussiens construits sur le processus Y . Une telle formulation est naturelle car elle revient à identifier deux RM $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ et $\dot{X} = (\dot{X}(n), n \in \mathbb{Z})$ telles que

$$\dot{X}(n) = MX(n) \quad \text{pour tout } n,$$

où M est une matrice régulière. Le Problème de la Réalisation Stochastique, que nous définissons dans ce travail comme la construction de l'ensemble des RM (et non seulement des RMM), se transforme alors en un problème de géométrie dans l'espace de Hilbert. Ce cadre permet d'étudier les liens existant entre les RM grâce à l'introduction des concepts d'observabilité et de constructibilité. Ces concepts, qui joueront un rôle fondamental dans tout ce travail, confèrent à la théorie des analogies très profondes avec la Théorie classique des Systèmes Linéaires (cf. [Kal-3] par exemple) et la Théorie de la Réalisation dans l'espace d'Hilbert (cf. [Hel-2] par exemple).

Quel est l'intérêt d'une telle approche géométrique? En ce qui nous concerne, nous y voyons un triple avantage. Elle répond d'abord à un souci de clarification (et d'esthétique !) de la théorie en évitant toute manipulation

⁽²⁾ On dit qu'une matrice est asymptotiquement stable lorsque ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

de matrices. Pour une démarche comparable citons Wonham en Théorie de la Commande [Won]. Un deuxième avantage de notre exposition est de fournir un cadre unifié pour l'étude des RM des processus (Gaussiens) stationnaires à temps discret et des processus à accroissements stationnaires et à temps continu. Notons que la stationnarité n'est supposée que pour mieux faire ressortir les structures géométriques de la théorie; on pourrait en fait s'en dispenser sans avoir à introduire pour autant de concept nouveau (cf. [LPR] par exemple). Le troisième avantage, le plus important à nos yeux, est de disposer d'une Théorie de la Représentation Markovienne valable sans restriction de dimension sur les RM. Une application possible, que nous n'aborderons pas ici, pourrait être d'étudier avec notre cadre le problème de l'approximation des processus par des modèles Markoviens linéaires finis.

Afin de mieux situer la place de ce travail dans la littérature existante, rappelons brièvement la genèse de la Théorie de la Représentation Markovienne. L'un des premiers travaux sur le sujet remonte à Doob [Doo-1]; néanmoins il semble que ce soit à Kalman [Kal-2] que revienne le mérite d'avoir posé clairement les bases de la théorie. A sa suite Faurre ([Fau-1], [Fau-2]) résout la forme faible du Problème de la Réalisation Stochastique. Dans le même esprit citons entre autres les travaux d'Anderson [And] et de Willems [Wil-2]. L'interprétation probabiliste des résultats précédents débute avec Akaike [Aka-2], qui n'étudie que deux RMM particulières (celles que nous appellerons le filtre et le cofiltre propres). Ce travail est poursuivi dans diverses directions par Lindquist-Picci [LiP-1], Picci [Pic], Rozanov [Roz-2] et Ruckebusch ([Ruc-1], [Ruc-3]) conduisant à la solution de la forme forte du Problème de la Réalisation Stochastique tel que nous l'avons exposé. La formulation géométrique adoptée dans ce travail apparaît pour la première fois dans [Ruc-2] tandis que les concepts d'observabilité et de constructibilité sont introduits dans [Ruc-4]. Les différents articles cités en référence de Lindquist-Picci et de l'auteur conduisent à la solution générale du Problème de la Réalisation Stochastique.

Décrivons enfin sommairement l'articulation de notre travail. Afin d'atteindre le maximum de généralité nous l'avons découpé en quatre parties, chacune correspondant à l'introduction progressive de nouvelles hypothèses sur le processus Y .

La première partie comprend les chapitres I à III. Dans le chapitre I nous définissons le concept « géométrique » de RM (respectivement RMM) en généralisant convenablement la présentation classique. Nous donnons aussi la solution géométrique générale du Problème de la Réalisation Stochastique. Le chapitre II introduit les concepts d'observabilité et de cons-

tructibilité qui s'avéreront fondamentaux dans tout le travail. Ils induisent une décomposition des RM analogue à celle obtenue en Théorie des Systèmes (cf. [Che]). Les liens avec le filtrage de Kalman apparaissent au chapitre III, où nous démontrons des théorèmes d'isomorphisme entre les RMM voisins de ceux de Helton [Hel-2] en Théorie de la Réalisation dans l'espace d'Hilbert.

La deuxième partie comprend les chapitres IV et V. Le chapitre IV définit la notion d'antifiltre qui fournit une paramétrisation naturelle des Représentations Markoviennes Observables (en abrégé RMO). Le chapitre V utilise cette paramétrisation pour en dériver un mode de construction des RMO et des RMM.

La troisième partie comprend les chapitres VI et VII. Dans le chapitre VI nous introduisons le concept d'innovation d'une RM. Le chapitre VII est consacré à définir la notion de régularité d'une RM. Cette partie fait le lien entre l'approche temporelle exposée dans ce papier et l'approche fréquentielle de la théorie qui n'est pas abordée ici et que le lecteur intéressé pourra trouver dans [Ruc-9] ou [LiP-5].

La quatrième partie réduite au chapitre VIII est consacrée à l'application des chapitres précédents à la construction des RMM de dimension finie.

Enfin l'Annexe traite le cas des processus à temps continu et montre comment en ramener l'étude à celle des processus à temps discret.

PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES ET NOTATIONS

Le cadre de tout ce travail sera un espace d'Hilbert abstrait $\mathcal{H}$ (réel ou complexe) de produit scalaire noté $(.,.)$. Nous conviendrons d'écrire systématiquement les vecteurs de $\mathcal{H}$ en lettres minuscules, les sous-espaces ⁽³⁾ en lettres cursives et les opérateurs (définis dans $\mathcal{H}$) en lettres majuscules. Par souci de clarté les représentations matricielles des opérateurs seront notées en lettres majuscules italiques.

Si $\mathcal{G}$ est un sous-espace, nous noterons $\mathcal{G}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$ et $E^\mathcal{G}$ (écrit aussi parfois $E[. | \mathcal{G}]$ pour des raisons typographiques) le projecteur orthogonal sur $\mathcal{G}$. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux sous-espaces, nous désignerons par $\mathcal{H}_1 \vee \mathcal{H}_2$ (noté $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ lorsque $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$) le plus petit sous-espace contenant $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, et par $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_2$ (utilisé uniquement lorsque $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$) le sous-espace $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2^\perp$. Dans la suite nous ferons un usage

⁽³⁾ Par « sous-espace » on sous-entend toujours sous-vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

constant de l'identité suivante : quels que soient les sous-espaces $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, on a

$$(0.1) \quad \mathcal{H}_1 = \bar{E}[\mathcal{H}_2 \mid \mathcal{H}_1] \oplus (\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2^\perp) \quad (*)$$

Soit M un opérateur de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$. Nous noterons $\mathcal{D}(M)$, $\text{Ker } M$, $\mathcal{R}(M)$ respectivement le domaine, le noyau et l'image de M (cf. [DuS], [Tay], [Yos]). Nous désignerons par $M \mid \mathcal{G}$ la restriction de M à un sous-vectriel $\mathcal{G}$ de $\mathcal{D}(M)$. Lorsque $\mathcal{D}(M)$ est dense dans $\mathcal{H}_1$, l'adjoint de M , noté M^* , est défini comme l'unique opérateur de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_1$ vérifiant

$$(M\lambda, \mu) = (\lambda, M^*\mu) \quad \forall \lambda \in \mathcal{D}(M), \forall \mu \in \mathcal{D}(M^*).$$

Si M est une bijection de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$ nous dirons dans la suite que M est un quasi-isomorphisme (quasi-affinité dans la terminologie de Sz.-Nagy-Foias [SzF-2]) lorsque M est continu à image dense. Nous dirons que M est un isomorphisme faible lorsque M est un opérateur fermé à domaine et image denses. Ces notions généralisent celle d'isomorphisme (M bicontinu). D'après le Théorème du Graphe fermé ([Yos], p. 79) il est clair qu'un quasi-isomorphisme [resp. isomorphisme faible] M est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{R}(M) = \mathcal{H}_2$ [resp. $\mathcal{D}(M) = \mathcal{H}_1$ et $\mathcal{R}(M) = \mathcal{H}_2$].

Rappelons le concept d'orthogonalité conditionnelle dans l'espace de Hilbert qui joue un rôle fondamental dans ce travail. Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{G}$ trois sous-espaces; on dit que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont conditionnellement orthogonaux sachant $\mathcal{G}$ et on écrit

$$(0.2) \quad \mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2 \mid \mathcal{G},$$

lorsqu'ils vérifient une des trois conditions équivalentes suivantes :

$$(0.3) \quad (\lambda, \mu) = (E^{\mathcal{G}}\lambda, E^{\mathcal{G}}\mu) \quad \forall \lambda \in \mathcal{H}_1, \forall \mu \in \mathcal{H}_2;$$

$$(0.4) \quad [(\mathcal{H}_1 \vee \mathcal{G}) \ominus \mathcal{G}] \perp [(\mathcal{H}_2 \vee \mathcal{G}) \ominus \mathcal{G}];$$

$$(0.5) \quad E^{\mathcal{H}_1}E^{\mathcal{H}_2} = E^{\mathcal{H}_1}E^{\mathcal{G}}E^{\mathcal{H}_2}.$$

Notons que lorsque $\mathcal{G} = \{0\}$, l'orthogonalité conditionnelle sachant $\mathcal{G}$ se réduit à l'orthogonalité ordinaire. Lorsque $\mathcal{G}$ est un sous-espace de $\mathcal{H}_1$, (0.4) et (0.5) se simplifient respectivement en

$$(0.6) \quad (\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{G}) \perp \mathcal{H}_2;$$

$$(0.7) \quad E^{\mathcal{H}_1}(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{G}.$$

(*) La barre au-dessus de E indique la fermeture.

Les deux propriétés suivantes sont une conséquence immédiate de (0.3) :

$$(0.8) \quad \mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2 \mid \bar{E}[\mathcal{G} \mid \mathcal{H}_1] ;$$

$$(0.9) \quad \mathcal{H}'_1 \perp \mathcal{H}'_2 \mid \mathcal{G},$$

où $\mathcal{H}'_1$ et $\mathcal{H}'_2$ sont deux sous-espaces inclus dans $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ respectivement.

Dans ce travail nous supposons $\mathcal{H}$ muni d'un opérateur unitaire U . Nous aurons besoin de la notion de *suite Markovienne de sous-espaces*. Soit $\mathcal{G}$ un sous-espace, posons

$$(0.10) \quad \mathcal{G}_- = \bigvee_{n=-\infty}^0 U^n \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_+ = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathcal{G}$$

(si U est interprété comme une translation temporelle, on notera que $\mathcal{G}_-$ et $\mathcal{G}_+$ apparaissent respectivement comme le « passé » et le « futur » de $\mathcal{G}$). Par analogie avec la Théorie des Processus (cf. [B1G], [Mey]) on dit que $(\mathcal{G}, U)$ est *Markovien* lorsqu'on a

$$(0.11) \quad \mathcal{G}_+ \perp \mathcal{G}_- \mid \mathcal{G}.$$

On appelle alors $E^{\mathcal{G}}U \mid \mathcal{G}$ l'opérateur de transition de $(\mathcal{G}, U)$. Plus généralement soit $\mathcal{K}$ un sous-espace invariant par U^{-1} ($\mathcal{K} = \mathcal{K}_-$) on dit que $(\mathcal{G}, U)$ est Markovien par rapport à $\mathcal{K}$ [plus précisément par rapport à la filtration de sous-espaces $(U^n \mathcal{K}, n \in \mathbb{Z})$] lorsque $\mathcal{G}$ est un sous-espace de $\mathcal{K}$ tel que

$$(0.12) \quad \mathcal{G}_+ \perp \mathcal{K} \mid \mathcal{G}.$$

D'après (0.7) il est facile de montrer que la condition (0.12) peut s'écrire

$$(0.13) \quad E^{\mathcal{K}}U(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}.$$

PREMIÈRE PARTIE

Elle correspond à la présentation de la théorie sous sa forme la plus générale possible. Les hypothèses utilisées et leur contenu intuitif seront exposés au chapitre I.

Cette première partie comprend :

- le chapitre I : Le concept de Représentation Markovienne,
- le chapitre II : Observabilité et constructibilité,
- le chapitre III : Filtrage des Représentations Markoviennes.

CHAPITRE I

LE CONCEPT DE REPRÉSENTATION MARKOVienne

Ce chapitre est consacré à poser les fondements de la théorie « géométrique » de la Représentation Markovienne. Comme annoncé dans l'introduction le formalisme que nous allons développer est adapté à l'étude des processus Gaussiens stationnaires à temps discret et des processus Gaussiens à accroissements stationnaires et à temps continu. Afin de motiver notre définition « abstraite » du concept de Représentation Markovienne, nous allons montrer qu'elle s'obtient par une généralisation naturelle de la définition classique que nous rappelons ci-dessous.

I.1. Présentation classique

Dans ce qui suit on supposera que tous les processus considérés sont définis par rapport à un espace de probabilité fixé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont on notera $E(\cdot)$ l'espérance mathématique. Soit T un ensemble des temps ($T = \mathbb{Z}$ dans le cas discret et $T = \mathbb{R}$ dans le cas continu), on se donne un processus $Y = (Y(t), t \in T)$ Gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On suppose en outre que Y est centré stationnaire dans le cas discret, mais seulement à accroissements centrés stationnaires dans le cas continu.

On dit que Y admet une Représentation Markovienne (RM) d'ordre q $X = (X(t), t \in T)$ lorsque Y vérifie l'un des deux modèles suivants correspondant respectivement à $T = \mathbb{Z}$ et $T = \mathbb{R}$.

a) CAS DISCRET

$$(1.1) \quad Y(n) = HX(n) + JW(n),$$

$$(1.2) \quad X(n+1) = FX(n) + LW(n),$$

où on suppose que :

i) $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^q$;

ii) $W = (W(n), n \in \mathbb{Z})$ est un « bruit blanc » Gaussien unitaire à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ (k arbitraire), i. e. W est un processus Gaussien centré tel que

$$E[W(n)W'(m)]^{(5)} = I\delta_{n,m},$$

I désignant la matrice unité dans $\mathbb{R}^k$ et $\delta_{n,m}$ le symbole de Kronecker;

(⁵) Sauf mention du contraire l'accent indique la transposition.

iii) (F, H, J, L) est un quadruplet de matrices constantes de dimensions convenables avec F asymptotiquement stable [i. e. ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1].

Ces hypothèses entraînent immédiatement que

$$(1.3) \quad X(n+1) = \sum_{m=0}^{\infty} F^m L W(n-m).$$

On en déduit que X est un processus Gaussien Markovien centré et stationnaire (ce qui justifie la terminologie).

b) CAS CONTINU

$$(1.4) \quad dY(t) = CX(t)dt + DdB(t),$$

$$(1.5) \quad dX(t) = AX(t)dt + EdB(t),$$

où on suppose que :

i) $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^q$;

ii) $B = (B(t), t \in \mathbb{R})$ est un processus de Wiener standard dans $\mathbb{R}^k$ (k arbitraire), i. e. B est un processus Gaussien à accroissements indépendants centrés tels que

$$E[(B(t) - B(s))(B(t) - B(s))'] = |t - s| I;$$

iii) (A, C, D, E) est un quadruplet de matrices constantes de dimensions convenables avec $\exp A$ asymptotiquement stable [i. e. les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative].

REMARQUE 1.1. — Comme il est d'usage en Théorie des Processus (cf. [Nev-2]), les équations (1.4) et (1.5) ne sont qu'une écriture formelle; elles doivent être lues respectivement

$$Y(t) - Y(s) = C \int_s^t X(u) du + D(B(t) - B(s)),$$

$$X(t) - X(s) = A \int_s^t X(u) du + E(B(t) - B(s)).$$

Il est intéressant de noter que nous n'avons pas spécifié de conditions initiales pour (1.4) et (1.5). En effet Y n'interviendra dans la suite que par ses accroissements; quant à X , on peut écrire

$$(1.6) \quad X(t) = \int_{-\infty}^t \exp [A(t-s)] E dB(s),$$

où l'intégrale doit être prise au sens de Wiener (cf. [Doo-2]). Comme dans le cas discret il s'ensuit que X est un processus Gaussien Markovien centré et stationnaire.

REMARQUE 1.2. — Dans les deux modèles ci-dessus la littérature impose parfois des contraintes supplémentaires en supposant $JL' = 0$ [autrement dit le « bruit sur l'observation » JdB et le « bruit sur la dynamique » LdB sont indépendants] ou même $J = 0$ [notons qu'en continu on remplace alors généralement (1.4) par $Y(t) = CX(t)$].

Dans les deux cas on définit classiquement le Problème de la Réalisation Stochastique comme la *construction de toutes les Représentations Markoviennes Minimales* (i. e. celles d'ordre minimal) de Y . Dans le paragraphe suivant nous allons donner une formulation géométrique équivalente du concept de Représentation Markovienne. Pour plus de clarté nous nous limiterons au cas discret en reportant dans l'Annexe le cas continu.

1.2. Formulation géométrique équivalente

Introduisons d'abord quelques notations. Soit Y le processus Gaussien considéré ci-dessus; définissons les espaces Gaussiens « passé » $\mathcal{Y}_p$ et « futur » $\mathcal{Y}_f$ par ⁽⁶⁾

$$(1.7) \quad \mathcal{Y}_p = \sigma(Y(m), m < 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_f = \sigma(Y(m), m \geq 0).$$

L'espace Gaussien $\mathcal{Y}_\infty$ engendré par Y vérifie alors

$$(1.8) \quad \mathcal{Y}_\infty = \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Y}_f.$$

Le processus Y étant supposé stationnaire, il est bien connu (cf. [Roz-1], p. 14) que $\mathcal{Y}_\infty$ est muni d'un opérateur unitaire U_1 défini par la translation des coordonnées de Y , i. e.

$$(1.9) \quad U_1(Y(n)) = Y(n+1) \quad (7).$$

Il est clair que

$$(1.10) \quad U_1^{-1}(\mathcal{Y}_p) \subset \mathcal{Y}_p \quad \text{et} \quad U_1(\mathcal{Y}_f) \subset \mathcal{Y}_f.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace Gaussien muni d'un opérateur unitaire U . Suivant la terminologie de Sz.-Nagy et Foias [SzF-2], on dira que $(\mathcal{H}, U)$ est une

⁽⁶⁾ Pour toute famille A de variables Gaussiennes (vectorielles), $\sigma(A)$ désigne l'espace Gaussien [Nev-1] engendré par (les composantes de) A .

⁽⁷⁾ En toute rigueur (1.9) devrait s'écrire $U(Y_i(n)) = Y_i(n+1)$ avec i désignant un indice de coordonnée quelconque.

dilatation de $(\mathcal{Y}_\infty, U_1)$ si $\mathcal{Y}_\infty$ est un sous-espace de $\mathcal{H}$ réduisant U et si U_1 coïncide avec la restriction de U à $\mathcal{Y}_\infty$.

Ces préliminaires étant posés, on peut alors énoncer la Proposition suivante qui est à la base de notre approche géométrique.

PROPOSITION 1.3. — *Un processus $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ est une RM si et seulement si il existe une dilatation $(\mathcal{H}, U)$ de $(\mathcal{Y}_\infty, U_1)$ telle que $X(n) = U^n X(0)$ pour tout n et que l'espace Gaussien $\mathcal{X}$ engendré par les composantes de $X(0)$ vérifie les conditions suivantes :*

(1.11) $\mathcal{X}$ est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}$,

$$(1.12) \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \{0\},$$

$$(1.13) \quad (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \perp (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) | \mathcal{X},$$

où $\mathcal{X}_+$ et $\mathcal{X}_-$ sont définis comme en (0.10).

Preuve :

a) CONDITION NÉCESSAIRE

Soit X une RM vérifiant les équations (1.1) et (1.2). Notons $\mathcal{W}$ [resp. $\mathcal{H}$] l'espace Gaussien engendré par $W(0)$ [resp. les $(W(n), n \in \mathbb{Z})$]. Comme précédemment la stationnarité de W entraîne que $\mathcal{H}$ est muni d'un opérateur unitaire de translation U . Puisque W est un bruit blanc, on a

$$(1.14) \quad \mathcal{W}_+ \perp U^{-1} \mathcal{W}_-.$$

On déduit des équations (1.1) à (1.3) que l'espace Gaussien $\mathcal{X}$ vérifie les deux relations suivantes

$$(1.15) \quad (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \subset U^{-1} \mathcal{W}_-,$$

$$(1.16) \quad (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \subset \mathcal{X} \oplus \mathcal{W}_+,$$

qui entraînent immédiatement (1.11) et (1.12). Remarquons que (1.14) peut s'écrire

$$(\mathcal{X} \oplus \mathcal{W}_+) \perp U^{-1} \mathcal{W}_- | \mathcal{X},$$

et d'après (0.9), (1.13) découle de (1.15) et (1.16). Enfin il est clair que $(\mathcal{H}, U)$ est une dilatation de $(\mathcal{Y}_\infty, U_1)$.

b) CONDITION SUFFISANTE

Soit $(\mathcal{H}, U)$ une dilatation de $(\mathcal{Y}_\infty, U_1)$ et $\mathcal{X}$ un sous-espace de dimension

finie de $\mathcal{H}$ vérifiant les relations (1.12) et (1.13). Définissons un sous-espace $\mathcal{W}$ de $\mathcal{H}$ par

$$(1.17) \quad U(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \mathcal{W} \oplus (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p).$$

Notons $X(0)$ [resp. $W(0)$] une base quelconque [resp. orthonormale] de $\mathcal{X}$ [resp. $\mathcal{W}$]. Écrivons ces bases sous forme vectorielle, nous définissons alors deux processus stationnaires X et W en posant

$$X = (X(n) = U^n X(0), n \in \mathbb{Z}),$$

$$W = (W(n) = U^n W(0), n \in \mathbb{Z}).$$

D'après (1.17), W est un bruit blanc; de plus on a immédiatement

$$\begin{bmatrix} Y(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = E^{\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p} \begin{bmatrix} Y(0) \\ X(1) \end{bmatrix} + E^{\mathcal{W}} \begin{bmatrix} Y(0) \\ X(1) \end{bmatrix}.$$

En vertu de (0.7), $E[. | \mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p]$ et $E[. | \mathcal{X}]$ coïncident sur $(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f)$ et on en déduit l'existence d'un quadruplet de matrices (F, H, J, L) tel que

$$Y(0) = HX(0) + JW(0),$$

$$X(1) = FX(0) + LW(0).$$

En traduisant les deux équations précédentes par U^n on obtient alors (1.1) et (1.2). Enfin on a

$$F^n X(0) = U^n E[X(0) | U^{-n}(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)].$$

D'après (1.12) il vient que

$$(1.18) \quad F^n X(0) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \uparrow \infty.$$

Par hypothèse $X(0)$ est non dégénéré et (1.18) entraîne que F est asymptotiquement stable⁽⁸⁾. ■

La Proposition 1.3 nous amène naturellement à définir le « concept géométrique » de RM comme suit : une RM (de Y) est un sous-espace $\mathcal{X}$ d'une dilatation $(\mathcal{H}, U)$ de $(\mathcal{Y}_\infty, U_1)$ tel que les conditions (1.11) à (1.13) soient satisfaites. Dans tout ce travail nous étudierons seulement les RM relatives à un couple $(\mathcal{H}, U)$ donné. Une telle restriction n'est qu'apparente (avec l'avantage de simplifier les écritures); en outre elle se justifie si on interprète $(\mathcal{H}, U)$ comme un *flot stationnaire d'information* utilisable pour construire les RM de Y .

La formulation abstraite que nous allons développer au paragraphe suivant consiste en une double généralisation de ce qui précède :

a) Nous définissons le concept de RM en utilisant seulement la rela-

⁽⁸⁾ Le symbole ■ indique la fin d'une démonstration.

tion (1.13) qui signifie à la fois que $\mathcal{X}$ est un espace séparant pour $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$ (voir [LiP-2], [DyM], [Roz-2]) et que $(\mathcal{X}, U)$ est Markovien. Noter qu'on pourra ainsi parler de RM de dimension infinie.

b) Nous imposons les hypothèses minimales sur le quadruplet $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$. A cause de l'hypothèse Gaussienne on pourra en particulier abandonner le contexte probabiliste au profit d'un cadre Hilbertien abstrait.

I.3. Présentation abstraite

Le cadre théorique que nous utiliserons dans tout ce travail est le suivant :

Soit $\mathcal{H}$ un espace d'Hilbert (réel ou complexe, séparable ou non) muni d'un opérateur unitaire U . On distingue dans $\mathcal{H}$ deux sous-espaces $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$ qui vérifient l'hypothèse [cf. (1.10)] :

$$(H1) \quad U^{-1}(\mathcal{Y}_p) \subset \mathcal{Y}_p \quad \text{et} \quad U(\mathcal{Y}_f) \subset \mathcal{Y}_f.$$

DÉFINITION 1.4. — On appelle Représentation Markovienne (RM) tout sous-espace $\mathcal{X}$ tel que

$$(1.19) \quad (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \perp (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \mid \mathcal{X}.$$

Une conséquence immédiate de (1.19) est que $(\mathcal{X}, U)$ est Markovien d'opérateur de transition défini par

$$(1.20) \quad F = E^{\mathcal{X}} U \mid \mathcal{X} = E^{\mathcal{X} - \vee \mathcal{Y}_p} U \mid \mathcal{X}.$$

On notera que F apparaît comme la généralisation de la matrice F de la présentation classique. Pour rappeler que $\mathcal{X}$ dépend de la donnée du quadruplet $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$, on dira parfois que $\mathcal{X}$ est une RM de $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$. A cause d'une certaine symétrie entre « passé » et « futur » dans (1.19), il est naturel de « retourner le temps » (i. e. de changer U en U^{-1}) et d'étudier les RM de $(\mathcal{H}, U^{-1}, \mathcal{Y}_f, \mathcal{Y}_p)$, quadruplet qui vérifie clairement (H1). La propriété suivante, dont nous ferons un usage constant dans ce travail, peut alors être interprétée comme la version stochastique du célèbre Principe de Dualité [Kal-3] de la Théorie des Systèmes.

PROPOSITION 1.5 (Principe de Dualité). — $\mathcal{X}$ est une RM de $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$ si et seulement si $\mathcal{X}$ est une RM de $(\mathcal{H}, U^{-1}, \mathcal{Y}_f, \mathcal{Y}_p)$.

Preuve. — Immédiate car $\mathcal{X}_+$ et $\mathcal{X}_-$ sont échangés lorsque U et U^{-1} sont échangés. ■

Précisons à présent quelques points de terminologie. Suivant Lindquist et Picci [LiP-1], on dit qu'une RM $\mathcal{X}$ est interne lorsque $\mathcal{X}$ est inclus dans

le sous-espace $\mathcal{Y}_\infty = \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Y}_f$. On dit que $\mathcal{X}$ est *causale* [resp. *purement non causale*] lorsque $\mathcal{X}$ est un sous-espace de $\mathcal{Y}_p$ [resp. $\mathcal{Y}_f$]. Dans notre cadre abstrait la définition du concept classique de *minimalité* se généralise comme suit :

DÉFINITION 1.6. — *On dit qu'une RM $\mathcal{X}$ est une Représentation Markovienne Minimale (RMM) lorsqu'il n'existe pas de sous-espace propre de $\mathcal{X}$ qui vérifie (1.19).*

Dans tout ce travail on entendra par *Problème de la Réalisation Stochastique* la construction de l'ensemble des RM (et non seulement des RMM comme dans la présentation classique).

I.4. Solution du Problème de la Réalisation Stochastique

Grâce à notre approche géométrique la solution générale du Problème de la Réalisation Stochastique énoncé ci-dessus prend une forme particulièrement simple.

THÉORÈME 1.7. — *Un sous-espace $\mathcal{X}$ est une RM si et seulement si*

$$(1.21) \quad \mathcal{X} = \bar{\mathbb{E}}[\mathcal{H}_+ | \mathcal{H}_-],$$

où $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ sont deux sur-espaces de $\mathcal{Y}_f$ et de $\mathcal{Y}_p$ invariants par U et U^{-1} respectivement.

Preuve (Pour une démonstration différente voir [LiP-5]).

a) CONDITION NÉCESSAIRE

Si $\mathcal{X}$ est une RM, (0.7) entraîne que

$$\mathbb{E}[\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f | \mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p] = \mathbb{E}[\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f | \mathcal{X}] = \mathcal{X},$$

et donc (1.21) est vérifié avec $\mathcal{H}_- = \mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{H}_+ = \mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f$.

b) CONDITION SUFFISANTE

Si $\mathcal{X}$ satisfait aux conditions du théorème, on déduit de (0.1) que

$$(1.22) \quad \mathcal{H}_- = \mathcal{X} \oplus (\mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}_+^\perp).$$

D'après les hypothèses faites sur $\mathcal{H}_-$ et $\mathcal{H}_+$, $(\mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}_+^\perp)$ est invariant par U^{-1} et par conséquent (1.22) entraîne que

$$\mathcal{X}_+ \perp (\mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}_+^\perp).$$

Sachant que $\mathcal{Y}_f$ est inclus dans $\mathcal{H}_+$, on peut alors écrire

$$(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \perp (\mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}_+^\perp).$$

Il résulte de (0.5) et (1.22) que la relation précédente est équivalente à

$$(1.23) \quad (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \perp \mathcal{H}_- \mid \mathcal{X}.$$

Puisque $\mathcal{Y}_p$ est inclus dans $\mathcal{H}_-$, il vient que $\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p$ est un sous-espace de $\mathcal{H}_-$. D'après (0.9), (1.19) est alors une conséquence immédiate de (1.23). ■

REMARQUE 1.8. — Par le principe de Dualité il est clair que $\mathcal{X} = \bar{\mathbb{E}}[\mathcal{H}_- \mid \mathcal{H}_+]$ constitue aussi une paramétrisation de l'ensemble des RM ($\mathcal{H}_-$ et $\mathcal{H}_+$ vérifiant les mêmes conditions que dans le Théorème 1.7).

CHAPITRE II

OBSERVABILITÉ ET CONSTRUCTIBILITÉ

La Théorie de la Représentation Markovienne introduite au chapitre précédent a des liens très étroits avec la Théorie Mathématique des Systèmes. Procédant par analogie nous allons définir dans notre cadre géométrique les concepts d'observabilité et de constructibilité. Afin d'introduire naturellement ces concepts nous allons revenir dans le paragraphe suivant sur la présentation classique des RM.

II.1. Introduction à l'observabilité et la constructibilité

Soit X une RM d'ordre q d'un processus Y Gaussien à temps discret. D'après le paragraphe I.1 il existe un système linéaire (F, H, J, L) tel que

$$(2.1) \quad Y(n) = HX(n) + JW(n),$$

$$(2.2) \quad X(n+1) = FX(n) + LW(n).$$

On définit classiquement ([Cas], [Che], [Kal-3], ...) l'observabilité du système (F, H, J, L) par

$$(2.3) \quad \text{rang}(H', F'H', F'^2H', \dots) = q.$$

Si $\mathcal{X}$ désigne l'espace Gaussien engendré par $X(0)$ [cf. la Proposition 1.3], un calcul facile montre que

$$E^{\mathcal{X}}[Y'(0), Y'(1), Y'(2), \dots] = X'(0)[H', F'H', F'^2H', \dots].$$

La condition (2.3) est donc équivalente à

$$(2.4) \quad E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{X}] = \mathcal{X}.$$

Il est alors naturel de prendre (2.4) comme la définition de l'observabilité de $\mathcal{X}$. En Théorie des Systèmes [Cas] on définit la constructibilité d'un système comme l'observabilité du système dual (i. e. du système obtenu après retournement du temps). En vertu du Principe de Dualité il est alors naturel de définir la constructibilité de $\mathcal{X}$ par la condition :

$$(2.5) \quad E[\mathcal{Y}_p | \mathcal{X}] = \mathcal{X}.$$

II.2. Définition de l'observabilité et de la constructibilité

Dans ce paragraphe nous revenons à notre présentation abstraite. Introduisons d'abord quelques points de terminologie. Soit $\mathcal{X}$ une RM, on lui associe deux opérateurs Q et C définis par

$$(2.6) \quad Q = E^x | \mathcal{Y}_f, \quad C = E^x | \mathcal{Y}_p.$$

On dit que Q [resp. C] est l'opérateur d'observabilité [resp. de constructibilité] de $\mathcal{X}$. On pose alors

$$(2.7) \quad \mathcal{X}_0 = \overline{\mathcal{R}(Q)} = \overline{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{X}],$$

$$(2.8) \quad \mathcal{X}_0^- = \text{Ker } Q = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_f^\perp,$$

$$(2.9) \quad \mathcal{X}_c = \overline{\mathcal{R}(C)} = \overline{E}[\mathcal{Y}_p | \mathcal{X}],$$

$$(2.10) \quad \mathcal{X}_c^- = \text{Ker } C = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_p^\perp.$$

On appelle respectivement $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_0^-$, $\mathcal{X}_c$ et $\mathcal{X}_c^-$ la partie observable, non observable, constructible, non constructible de $\mathcal{X}$. En vertu du paragraphe précédent il est alors naturel de poser la définition suivante.

DÉFINITION 2.1. — *On dit qu'une RM $\mathcal{X}$ est une Représentation Markovienne Observable (RMO) lorsque $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0$. De même on dit que $\mathcal{X}$ est une Représentation Markovienne Constructible (RMC) lorsque $\mathcal{X} = \mathcal{X}_c$. Enfin on dit que $\mathcal{X}$ est canonique lorsque $\mathcal{X}$ est observable et constructible.*

REMARQUE 2.2. — Il est clair que l'observabilité [resp. la constructibilité] de $\mathcal{X}$ est équivalente à $\mathcal{X}_0^- = \{0\}$ ou Q^* injectif [resp. $\mathcal{X}_c^- = \{0\}$ ou C^* injectif].

Comme en Théorie des Systèmes [Kal-3] les concepts de minimalité et de canonicité coïncident.

THÉORÈME 2.3. — *Pour toute RM $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_0$ [resp. $\mathcal{X}_c$] est une RMO [resp. RMC]. En outre $\mathcal{X}$ est une RMM si et seulement si $\mathcal{X}$ est canonique.*

Preuve. — Si $\mathcal{X}$ est une RM, (1.19) entraîne que

$$\mathcal{X}_0 = \bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p] \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_c = \bar{E}[\mathcal{Y}_p | \mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f]$$

et il résulte du Théorème 1.7 que $\mathcal{X}_0$ et $\mathcal{X}_c$ sont deux RM. Il est clair que $\mathcal{X}_0$ est observable et que $\mathcal{X}_c$ est constructible. Par définition de la minimalité on en déduit alors que si $\mathcal{X}$ est une RMM, alors $\mathcal{X}$ est canonique. Il reste à montrer que si $\mathcal{X}$ est une RM canonique, $\mathcal{X}$ est minimale. Autrement dit si $\mathcal{X}$ est une RM canonique telle que

$$(2.11) \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \oplus \mathcal{X}^2,$$

il faut prouver que si $\mathcal{X}^1$ est une RM, alors $\mathcal{X}^2 = \{0\}$. Appliquant (0.3) aux deux RM $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^1$, il vient, pour tout λ dans $\mathcal{Y}_p$ et tout μ dans $\mathcal{Y}_f$, que

$$(2.12) \quad (\lambda, \mu) = (E^{\mathcal{X}}\lambda, E^{\mathcal{X}}\mu) = (E^{\mathcal{X}^1}\lambda, E^{\mathcal{X}^1}\mu).$$

En vertu de (2.11) on en déduit

$$(2.13) \quad E[\mathcal{Y}_p | \mathcal{X}^2] \perp E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{X}].$$

Par continuité du produit scalaire, l'observabilité de $\mathcal{X}$ entraîne que $E[\mathcal{Y}_p | \mathcal{X}^2]$ est orthogonal à $\mathcal{X}$. Autrement dit $\mathcal{X}^2$ est inclus dans $\mathcal{Y}_p^\perp$. D'après la constructibilité de $\mathcal{X}$, il en résulte que $\mathcal{X}^2 = \{0\}$ et le théorème est complètement démontré. ■

Comme nous le verrons au chapitre III, les théorèmes d'isomorphisme entre les RMM nécessiteront des notions plus fortes que l'observabilité et la constructibilité. Par analogie avec la terminologie introduite par Helton [Hel-2] dans la Théorie de la Réalisation dans l'espace d'Hilbert, nous poserons la définition suivante.

DÉFINITION 2.4. — *On dit qu'une RM $\mathcal{X}$ est exactement observable [resp. exactement constructible] lorsque $\mathcal{X} = \mathcal{R}(\mathbf{Q})$ [resp. $\mathcal{X} = \mathcal{R}(\mathbf{C})$]. On dit que $\mathcal{X}$ est exactement canonique lorsque $\mathcal{X}$ est exactement observable et exactement constructible.*

Introduisons alors l'opérateur

$$(2.14) \quad H_Y = E^{\mathcal{Y}_f} | \mathcal{Y}_p.$$

Nous appellerons H_Y l'opérateur de Hankel associé à $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$ (voir [Ruc-9] pour une justification de la terminologie). Si $\mathcal{X}$ est une RM, (0.5) entraîne que

$$(2.15) \quad H_Y = \mathbf{Q}^* \mathbf{C}.$$

La Proposition suivante caractérise la classe des RM exactement canoniques.

PROPOSITION 2.5. — *Si $E[\mathcal{Y}_p | \mathcal{Y}_f] = \mathcal{R}(H_Y)$ est fermé, alors toutes les RMM sont exactement canoniques. Réciproquement, s'il existe une RMM exactement canonique, alors $E[\mathcal{Y}_p | \mathcal{Y}_f]$ est fermé.*

Preuve. — Soit $\mathcal{X}$ une RMM, (2.15) implique clairement que

$$(2.16) \quad \mathcal{R}(H_Y) = \mathcal{R}(Q^*C) = Q^*(C(\mathcal{Y}_p)).$$

Si $\mathcal{R}(H_Y)$ est fermé, on déduit de (2.16) et de la constructibilité de $\mathcal{X}$ que

$$\mathcal{R}(H_Y) = Q^*(\overline{C(\mathcal{Y}_p)}) = Q^*(\mathcal{X}) = \mathcal{R}(Q^*)$$

et par conséquent l'image de Q^* est fermée. En vertu du Théorème de l'image fermée de Banach (cf. [Yos], p. 205), l'image de Q est fermée. L'observabilité de $\mathcal{X}$ entraîne alors que $\mathcal{X}$ est exactement observable. Une nouvelle application du Théorème de l'image fermée à $H_Y^* = C^*Q$ implique de la même manière que $\mathcal{X}$ est exactement constructible. Réciproquement si $\mathcal{X}$ est une RM exactement canonique, on a $C(\mathcal{Y}_p) = \mathcal{X}$. D'après (2.16) il vient alors

$$\mathcal{R}(H_Y) = Q^*(\mathcal{X})$$

et le Théorème de l'image fermée permet de conclure. ■

II.3. Structure des RMO et des RMC

Dans ce paragraphe nous allons montrer qu'on peut caractériser très simplement l'ensemble des RMO (resp. RMC) et des RM incluses dans une RMO (resp. RMC). Commençons d'abord par le cas des RMO.

PROPOSITION 2.6. — *Un sous-espace $\mathcal{X}$ est une RMO si et seulement si*

$$(2.17) \quad \mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{H}_-],$$

où $\mathcal{H}_-$ est un sur-espace de $\mathcal{Y}_p$ invariant par U^{-1} .

Preuve. — Le Théorème 1.7 et la Définition 2.1 entraînent que $\mathcal{X}$ défini par (2.17) est une RMO. Réciproquement si $\mathcal{X}$ est une RMO, on déduit du Théorème 1.7 qu'il existe deux sur-espaces $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ de $\mathcal{Y}_f$ et $\mathcal{Y}_p$ invariants par U et U^{-1} tels que

$$\mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{H}_+ | \mathcal{H}_-].$$

Sachant que $\mathcal{H}_- = \mathcal{X} \oplus (\mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}_+^\perp)$ et que $\mathcal{Y}_f$ est inclus dans $\mathcal{H}_+$, il vient immédiatement

$$\mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{H}_-]. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 2.7. — Soit $\mathcal{X}$ une RMO d'opérateur de transition F . Une RM est incluse dans $\mathcal{X}$ si et seulement si elle contient $\mathcal{X}_c$ et est invariante par F^* .

Preuve. — Supposons que la RMO $\mathcal{X}$ s'écrive $\mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \oplus \mathcal{X}^2$. Il est clair que la Proposition revient à montrer que $\mathcal{X}^1$ est une RM si et seulement si $\mathcal{X}^2$ est un sous-espace de $\mathcal{Y}_p^\perp$ invariant par F . Or, pour que $\mathcal{X}^1$ soit une RM, il faut et il suffit d'après (0.3) que, quels que soient λ dans $(\mathcal{X}_-^1 \vee \mathcal{Y}_p)$ et μ dans $(\mathcal{X}_+^1 \vee \mathcal{Y}_f)$, on ait

$$(2.18) \quad (\lambda, \mu) = (E^x \lambda, E^x \mu) = (E^{\mathcal{X}^1} \lambda, E^{\mathcal{X}^1} \mu).$$

Par une technique en tous points analogue à celle utilisée dans le Théorème 2.3, on montrerait alors que la condition (2.18) est équivalente à

$$\mathcal{X}^2 \perp (\mathcal{X}_-^1 \vee \mathcal{Y}_p).$$

Autrement dit $\mathcal{X}^2$ est inclus dans $\mathcal{Y}_p^\perp$ et $U^n \mathcal{X}^2$ est orthogonal à $\mathcal{X}^1$ pour tout $n \geq 0$. On vérifie facilement que cette dernière condition revient à imposer que $\mathcal{X}^2$ est invariant par F . ■

En appliquant la Proposition 1.5 on peut « dualiser » les deux Propositions précédentes et traiter ainsi le cas des RMC.

COROLLAIRE 2.8. — Un sous-espace $\mathcal{X}$ est une RMC si et seulement si

$$(2.19) \quad \mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_p \mid \mathcal{H}_+],$$

où $\mathcal{H}_+$ est un sur-espace de $\mathcal{Y}_f$ invariant par U .

COROLLAIRE 2.9. — Une RM est incluse dans une RMC $\mathcal{X}$ si et seulement si elle contient $\mathcal{X}_0$ et est invariante par F .

Pour tout couple de RM $\mathcal{X}^1$ et $\mathcal{X}^2$ dans l'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ des RM incluses dans une RMO [resp. RMC] $\mathcal{X}$, associons les sous-espaces

$$(2.20) \quad \inf(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2) = \mathcal{X}^1 \cap \mathcal{X}^2,$$

$$(2.21) \quad \sup(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2) = \mathcal{X}^1 \vee \mathcal{X}^2.$$

Sachant que l'ensemble des sous-espaces invariants par un opérateur borné est stable par $\cap$ et $\vee$, il est clair d'après ce qui précède que (2.20) et (2.21) induisent dans $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ une structure de treillis (cf. [Bir]). Si $\mathcal{X}$ est une RMO [resp. RMC] l'élément minimal du treillis est $\mathcal{X}_c$ [resp. $\mathcal{X}_0$]. On en déduit alors le Corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.10. — Soit $\mathcal{X}$ une RMO [resp. RMC], la seule RMM incluse dans $\mathcal{X}$ est $\mathcal{X}_c$ [resp. $\mathcal{X}_0$].

Puisque $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$ sont respectivement une RMC et une RMO, le Corol-

laire 2.10 entraîne que $\mathcal{Y}_* = \bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p]$ et $\mathcal{Y}^* = \bar{E}[\mathcal{Y}_p | \mathcal{Y}_f]$ sont respectivement la seule RMM causale et la seule RMM purement non causale. Nous verrons au chapitre III que ces deux RMM jouissent de propriétés remarquables.

II.4. Décomposition canonique des RM

Dans ce paragraphe nous allons remplacer l'hypothèse (H1) par l'hypothèse légèrement plus restrictive suivante :

$$(H1') \quad \exists \mathcal{Y} \subset \mathcal{H} : \mathcal{Y}_p = U^{-1}\mathcal{Y}_- \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_f = \mathcal{Y}_+.$$

On notera que $\mathcal{Y}$ joue le rôle de l'espace Gaussien engendré par les composantes de $Y(0)$ dans la présentation classique. *Pour éviter toute confusion dans la suite du travail on supposera toujours, sauf mention du contraire, que seule (H1) est satisfaite.*

L'hypothèse (H1') permet d'associer à toute RM $\mathcal{X}$ deux opérateurs bornés G et H définis par

$$(2.22) \quad G = E^{\mathcal{Y}}U | \mathcal{X}, \quad H = E^{\mathcal{X}} | \mathcal{Y}.$$

Les opérateurs (F, G, H) [F a déjà été défini en (1.20)] ne sont pas indépendants; ils vérifient

$$(2.23) \quad E^{\mathcal{Y}}U^n | \mathcal{Y} = GF^{n-1}H \quad \forall n > 0.$$

REMARQUE 2.11. — F et H apparaissent comme les équivalents abstraits des matrices F et H de la présentation classique, G correspondant à la matrice $G = E(X(1)Y'(0))$. Lorsque $\mathcal{X}$ est une RM finie-dimensionnelle de base $X(0)$ [cf. la Proposition 1.3], on notera que les matrices des opérateurs (F, G, H) dans la base $X(0)$ ne sont autres que (F', G', H') [$Y(0)$ étant supposé de covariance unité].

L'introduction du triplet (F, G, H) confère à la Théorie une similitude frappante avec la Théorie des Systèmes. En particulier on peut caractériser l'observabilité et la constructibilité directement à partir de (F, G, H) .

PROPOSITION 2.12. — *Une RM $\mathcal{X}$ est observable si et seulement si*

$$(2.24) \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{Ker} (H^*F^{*n}) = \{0\}$$

et constructible si et seulement si

$$(2.25) \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{Ker} (GF^n) = \{0\}.$$

Preuve. — Remarquons d'abord que, pour tout entier n , on a l'identité suivante

$$(2.26) \quad \text{Ker } E^{\mathcal{Y}}U^{-n} | \mathcal{X} = (\mathcal{X} \cap [U^n \mathcal{Y}]^{\perp}).$$

Si $\mathcal{X}$ est une RM, la relation (0.5) entraîne que, pour tout n positif ou nul, on a

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Y}}U^{-n} | \mathcal{X} &= E^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}}U^{-n} | \mathcal{X} = H^*F^{*n}, \\ E^{\mathcal{Y}}U^{n+1} | \mathcal{X} &= E^{\mathcal{Y}}UE^{\mathcal{X}}U^n | \mathcal{X} = GF^n. \end{aligned}$$

La Proposition est alors une conséquence immédiate des deux relations ci-dessus [en appliquant (2.26)] si l'on remarque que l'observabilité et la constructibilité s'écrivent respectivement

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} (\mathcal{X} \cap [U^n \mathcal{Y}]^{\perp}) = \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} (\mathcal{X} \cap [U^{-n-1} \mathcal{Y}]^{\perp}) = \{0\}. \quad \blacksquare$$

Comme en Théorie des Systèmes, l'observabilité et la constructibilité permettent d'obtenir une décomposition canonique du triplet (F, G, H) associé à une RM. En effet pour toute RM $\mathcal{X}$ on a la décomposition

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_0^{\perp}.$$

Décomposons ensuite la RM $\mathcal{X}_0$ en ses parties constructible et non constructible, soit

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_{0c} \oplus \mathcal{X}_{0\bar{c}},$$

avec

$$\mathcal{X}_{0c} = \bar{E}[\mathcal{Y}_p | \mathcal{X}_0] \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_{0\bar{c}} = \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{Y}_p^{\perp}.$$

On a alors la Proposition suivante qui est à rapprocher du Théorème classique de décomposition canonique des systèmes linéaires (cf. par exemple [Cas, p. 118]).

PROPOSITION 2.13. — *Le triplet (F, G, H) associé à une RM $\mathcal{X}$ s'écrit matriciellement dans la base $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{0\bar{c}} \oplus \mathcal{X}_{0c} \oplus \mathcal{X}_0^{\perp}$ sous la forme*

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve. — D'après le paragraphe précédent il est clair que $\mathcal{X}_0$ est invariant par F et $\mathcal{X}_c$ invariant par F^* . Notons F_0 la restriction de F à $\mathcal{X}_0$. Puisque $\mathcal{X}_0$ est une RM on en déduit que $\mathcal{X}_{0\bar{c}}$ est invariant par F_0 , autrement dit par F . La structure de l'opérateur F en découle. Il est en outre immédiat de vérifier que $G(\mathcal{X}_{0\bar{c}}) \subset G(\mathcal{X}_c) = \{0\}$ et $H(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X}_0$. $\blacksquare$

REMARQUE 2.14. — On peut obtenir une décomposition analogue pour le triplet (F^*, G^*, H^*) en décomposant $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}_c$ et $\mathcal{X}_{\bar{c}}$ puis $\mathcal{X}_c$ en $\mathcal{X}_{c0}$ et $\mathcal{X}_{\bar{c}0}$. En raisonnant comme ci-dessus on en déduit que le triplet (F^*, G^*, H^*) s'écrit matriciellement dans la base $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\bar{c}0} \oplus \mathcal{X}_{c0} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}}$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

On notera alors que $\mathcal{X}_{0c}$ et $\mathcal{X}_{c0}$ sont deux RMM en général différentes.

CHAPITRE III

FILTRAGE DES REPRÉSENTATIONS MARKOVIENNES

Le filtrage de Kalman [Kal-1] a toujours occupé une place centrale dans la Théorie de la Représentation Markovienne (voir par exemple [Kal-2] ou [FCG]). Dans ce chapitre nous allons définir l'équivalent géométrique de la notion de filtre (de Kalman). Nous définirons la notion de cofiltre par l'opération habituelle de *Dualité* et nous étudierons les liens entre ces notions et les concepts précédents d'observabilité et de constructibilité.

Afin de simplifier un peu les écritures introduisons tout d'abord quelques notations. Rappelons que d'après l'hypothèse (H1) $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$ sont invariants par U^{-1} et U respectivement. Notons alors U_-^{-1} et U_+ les restrictions de U^{-1} et U à $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$. Notons enfin U_- et U_+^* les opérateurs adjoints de U_-^{-1} et U_+ définis respectivement par

$$(3.1) \quad U_- = E^{\mathcal{Y}_p} U | \mathcal{Y}_p,$$

$$(3.2) \quad U_+^* = E^{\mathcal{Y}_f} U^{-1} | \mathcal{Y}_f.$$

III.1. Filtre des RM

Par analogie avec la théorie du filtrage de Kalman il est naturel de poser la Définition suivante.

DÉFINITION 3.1. — Soit $\mathcal{X}$ une RM, on appelle *filtre* de $\mathcal{X}$ le sous-espace de $\mathcal{Y}_p$ défini par

$$\widehat{\mathcal{X}} = \bar{E}[\mathcal{X} | \mathcal{Y}_p].$$

On appelle *filtre propre* le sous-espace $\mathcal{Y}_* = \bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p]$.

Nous savons déjà que $\mathcal{Y}_*$ est l'unique RMM causale; les propriétés de $\widehat{\mathcal{X}}$ découlent des deux Lemmes ci-dessous.

LEMME 3.2. — *$\widehat{\mathcal{X}}$ est une RMC dont l'opérateur de transition $\widehat{F}$ est égal à la restriction de U_- à $\widehat{\mathcal{X}}$.*

Preuve. — $\mathcal{X}$ étant une RM, on peut écrire

$$\widehat{\mathcal{X}} = \bar{E}[\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p],$$

et le Théorème 1.7 entraîne que $\widehat{\mathcal{X}}$ est une RM. La constructibilité de $\widehat{\mathcal{X}}$ est immédiate. Enfin, $\widehat{\mathcal{X}}$ étant inclus dans $\mathcal{Y}_p$, on déduit de (1.20) que $\widehat{F}$ vérifie

$$\widehat{F} = E^{\mathcal{Y}_p} U | \widehat{\mathcal{X}} = U_- | \widehat{\mathcal{X}}. \quad \blacksquare$$

LEMME 3.3. — *Pour toute RM $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}_*$ est inclus dans $\widehat{\mathcal{X}}$. Si $\mathcal{X}$ est une RMO, alors $\mathcal{Y}_*$ est égal à $\widehat{\mathcal{X}}$.*

Preuve. — D'après (0.5) il est clair que toute RM $\mathcal{X}$ vérifie

$$(3.3) \quad E^{\mathcal{Y}_p} \mathcal{Y}_f = E^{\mathcal{Y}_p} E^{\mathcal{X}} \mathcal{Y}_f.$$

Prenant les fermetures dans (3.3) on obtient

$$\mathcal{Y}_* = \bar{E}[\bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{X}] | \mathcal{Y}_p].$$

Il est clair que $\mathcal{Y}_*$ est inclus dans $\widehat{\mathcal{X}}$. Si $\mathcal{X}$ est observable, $\mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{X}]$ et par conséquent

$$\mathcal{Y}_* = \bar{E}[\mathcal{X} | \mathcal{Y}_p] = \widehat{\mathcal{X}}. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 3.4. — *Il existe des RM de dimension finie si et seulement si $\mathcal{Y}_*$ est de dimension finie.*

Preuve. — Sachant que $\mathcal{Y}_*$ est une RMM, il suffit de montrer que s'il existe une RM $\mathcal{X}$ de dimension finie, alors $\mathcal{Y}_*$ est de dimension finie. Mais dans ce cas $\widehat{\mathcal{X}}$ est nécessairement de dimension finie et le Lemme 3.3 permet de conclure. $\blacksquare$

D'après le Lemme 3.2 l'opérateur de transition de $\mathcal{Y}_*$ est égal à la restriction de U_- à $\mathcal{Y}_*$. Lorsque $\mathcal{X}$ est une RMM nous allons montrer que le couple $(\mathcal{X}, F)$ est « quasi-isomorphe » au couple $(\mathcal{Y}_*, U_- | \mathcal{Y}_*)$ au sens où il existe un quasi-isomorphisme (cf. les rappels mathématiques) M de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}_*$ tel que $MF = U_- M$. En rappelant que C^* désigne l'adjoint de l'opérateur de constructibilité associé à $\mathcal{X}$, on peut énoncer la

PROPOSITION 3.5. — *Si $\mathcal{X}$ est une RMM, C^* est un quasi-isomorphisme de $(\mathcal{X}, F)$ dans $(\mathcal{Y}_*, U_- | \mathcal{Y}_*)$. De plus C^* est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{X}$ est une RMM exactement constructible.*

Preuve. — Sachant que $C^*(\mathcal{X}) = E[\mathcal{X} | \mathcal{Y}_p]$, l'observabilité de $\mathcal{X}$ entraîne par le Lemme 3.3 que l'image de C^* est dense dans $\mathcal{Y}_*$. La constructibilité de $\mathcal{X}$ étant équivalente à l'injectivité de C^* , on en déduit que C^* est un quasi-isomorphisme de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}_*$. En outre on a

$$U_- C^* = E^{\mathcal{Y}_p} U E^{\mathcal{Y}_p} | \mathcal{X} = E^{\mathcal{Y}_p} U | \mathcal{X} = E^{\mathcal{Y}_p} E^{\mathcal{X}} U | \mathcal{X},$$

autrement dit $U_- C^* = C^* F$. D'après les rappels mathématiques, C^* est un isomorphisme si et seulement si l'image de C^* est fermée. Le Théorème de l'image fermée entraînant que l'image de C et l'image de C^* sont simultanément fermées ou non, on en déduit que C^* est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{X}$ est exactement constructible. ■

III.2. Cofiltre des RM

Appliquant la Proposition 1.5 il est naturel de chercher à « dualiser » les résultats du paragraphe précédent. On est alors amené à poser la Définition suivante.

DÉFINITION 3.6. — *Soit $\mathcal{X}$ une RM, on appelle cofiltre de $\mathcal{X}$ le sous-espace de $\mathcal{Y}_f$ défini par*

$$\check{\mathcal{X}} = \bar{E}[\mathcal{X} | \mathcal{Y}_f].$$

On appelle cofiltre propre le sous-espace $\mathcal{Y}^ = \bar{E}[\mathcal{Y}_p | \mathcal{Y}_f]$.*

Nous savons déjà que $\mathcal{Y}^*$ est l'unique RMM purement non causale, les propriétés de $\check{\mathcal{X}}$ sont décrites dans le Lemme suivant (la démonstration est omise dans la mesure où elle reproduit — *mutatis mutandis* — celle des Lemmes 3.2 et 3.3).

LEMME 3.7. — *Pour toute RM $\mathcal{X}$, $\check{\mathcal{X}}$ est une RMO dont l'opérateur de transition $\check{F}$ est tel que son adjoint $\check{F}^*$ est égal à la restriction de U_+^* à $\check{\mathcal{X}}$. En outre $\mathcal{Y}^*$ est inclus dans $\check{\mathcal{X}}$ avec égalité lorsque $\mathcal{X}$ est une RMC.*

D'après le Lemme l'adjoint de l'opérateur de transition de $\mathcal{Y}^*$ est égal à la restriction de U_+^* à $\mathcal{Y}^*$. Lorsque $\mathcal{X}$ est une RMM, $(\mathcal{X}, F^*)$ est alors « quasi-isomorphe » à $(\mathcal{Y}^*, U_+^* | \mathcal{Y}^*)$. Dans la Proposition suivante (dont la démonstration est omise pour les mêmes raisons que ci-dessus) Q^* désigne l'adjoint de l'opérateur d'observabilité Q associé à $\mathcal{X}$.

PROPOSITION 3.8. — Si $\mathcal{X}$ est une RMM, Q^* est un quasi-isomorphisme de $(\mathcal{X}, F^*)$ dans $(\mathcal{Y}^*, U_+^* | \mathcal{Y}^*)$, c'est-à-dire $Q^*F^* = U_+^*Q^*$. De plus Q^* est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{X}$ est une RMM exactement observable.

Le Théorème suivant résume les propriétés essentielles des deux paragraphes précédents.

THÉORÈME 3.9. — Si $\mathcal{X}$ est une RMM, alors

$$\widehat{\mathcal{X}} = \mathcal{Y}_*, \quad \widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{Y}^*.$$

En outre $(\mathcal{X}, F)$ est quasi-isomorphe à $(\mathcal{Y}_*, U_- | \mathcal{Y}_*)$ et $(\mathcal{X}, F^*)$ est quasi-isomorphe à $(\mathcal{Y}^*, U_+^* | \mathcal{Y}^*)$.

III.3. Théorèmes d'isomorphisme entre les RMM

Dans ce paragraphe nous allons remplacer l'hypothèse (HI) par l'hypothèse (HI') qui permet d'associer à toute RM $\mathcal{X}$ un système d'opérateurs (F, G, H) . Nous dirons dans la suite que deux systèmes (F, G, H) et $(\dot{F}, \dot{G}, \dot{H})$ associés à deux RMM $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$ sont isomorphes [resp. quasi-isomorphes, resp. faiblement isomorphes] lorsqu'il existe un isomorphisme [resp. quasi-isomorphisme, resp. isomorphisme faible] M tel que

$$(3.4) \quad MF = \dot{F}M, \quad G = \dot{G}M, \quad MH = \dot{H}.$$

Le but de ce paragraphe est de développer des Théorèmes d'isomorphisme entre systèmes de la même veine qu'en Théorie de la Réalisation dans l'espace de Hilbert ([Fuh-3], [Hel-2]).

Le Lemme suivant apparaît comme une généralisation immédiate de la Proposition 3.5.

LEMME 3.10. — Si $\mathcal{X}$ est une RMM, C^* est un quasi-isomorphisme de (F, G, H) sur le triplet (F_*, G_*, H_*) associé à $\mathcal{Y}_*$.

THÉORÈME 3.11. — Soit $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$ deux RMM dont les systèmes associés sont (F, G, H) et $(\dot{F}, \dot{G}, \dot{H})$ et dont les opérateurs de constructibilité sont respectivement C et $\dot{C}$. L'opérateur $M = [\dot{C}^*]^{-1}C^*$ est alors un isomorphisme faible du système (F, G, H) sur le système $(\dot{F}, \dot{G}, \dot{H})$.

Preuve. — D'après (3.3) il est clair que C^* [resp. $\dot{C}^*$] envoie bijectivement $E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{X}]$ [resp. $E[\mathcal{Y}_f | \dot{\mathcal{X}}]$] sur $E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p]$. On en déduit que $M = [\dot{C}^*]^{-1}C^*$ est une bijection dont le domaine contient $E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{X}]$ dense dans $\mathcal{X}$ et dont

l'image contient $E[\mathcal{Y}_f | \dot{\mathcal{X}}]$ dense dans $\dot{\mathcal{X}}$. Montrons maintenant que M est un opérateur fermé. Soit x_n une suite quelconque de $\mathcal{D}(M)$ telle que x_n [resp. Mx_n] converge vers x [resp. $\dot{x}$], on doit prouver (cf. [Yos], p. 77) que x appartient à $\mathcal{D}(M)$ et vérifie $Mx = \dot{x}$. Par définition de M on a pour tout x_n

$$\dot{C}^* M x_n = C^* x_n,$$

et on déduit de la continuité de C^* et de $\dot{C}^*$ que

$$\dot{C}^* \dot{x} = C^* x.$$

Il est alors clair que x appartient à $\mathcal{D}(M)$ et vérifie $\dot{x} = Mx$. Par conséquent M est bien un isomorphisme faible de $\mathcal{X}$ sur $\dot{\mathcal{X}}$ et il ne reste plus qu'à montrer (3.4). Or le Lemme 3.10 entraîne l'ensemble des relations suivantes :

$$C^* F = F_* C^*, \quad G = G_* C^*, \quad C^* H = H_*$$

et

$$\dot{C}^* \dot{F} = F_* \dot{C}^*, \quad \dot{G} = G_* \dot{C}^*, \quad \dot{C}^* \dot{H} = H_*.$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$MF = \dot{F}M, \quad G = \dot{G}M, \quad MH = \dot{H}. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 3.12. — *Dans le Théorème 3.11, si $\mathcal{X}$ est exactement observable ou si $\dot{\mathcal{X}}$ est exactement constructible, alors $M = [\dot{C}^*]^{-1}C^*$ est un quasi-isomorphisme de $\mathcal{X}$ sur $\dot{\mathcal{X}}$.*

Preuve. — Si $\mathcal{X}$ est une RMM exactement observable, il est clair d'après la preuve du Théorème 3.11 que M est une bijection dont le domaine est $\mathcal{X}$. Le Théorème du graphe fermé permet alors de conclure que M est continu et est donc un quasi-isomorphisme.

Si $\dot{\mathcal{X}}$ est une RMM exactement constructible, la preuve est même plus directe car la Proposition 3.5 entraîne que $\dot{C}^*$ est un isomorphisme de $\dot{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{Y}_*$. ■

COROLLAIRE 3.13. — *Dans le Théorème 3.11, si $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$ sont deux RMM exactement observables (ou constructibles), alors $M = [\dot{C}^*]^{-1}C^*$ est un isomorphisme de $\mathcal{X}$ sur $\dot{\mathcal{X}}$.*

Preuve. — Si $\dot{\mathcal{X}}$ est exactement observable, l'image de M est $\dot{\mathcal{X}}$ d'après la preuve du Théorème 3.11. Le Théorème du graphe fermé et le Corollaire 3.12 entraînent alors que, si $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$ sont exactement observables, M est bicontinu et est donc un isomorphisme.

Si $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$ sont exactement constructibles, C et $\dot{C}^*$ sont des isomorphismes de $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{Y}_*$ et M est alors un isomorphisme de $\mathcal{X}$ sur $\dot{\mathcal{X}}$. ■

REMARQUE 3.14. — Par dualité on obtiendrait aisément que, si $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$ sont deux RMM dont les opérateurs de constructibilité sont respectivement Q et $\dot{Q}$, l'opérateur $N = [\dot{Q}^*]^{-1}Q^*$ est un isomorphisme faible du système (F^*, H^*, G^*) sur le système $(\dot{F}^*, \dot{H}^*, \dot{G}^*)$. Autrement dit on a

$$NF^* = \dot{F}^*N, \quad NG^* = \dot{G}^*, \quad H^* = \dot{H}^*N.$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette deuxième partie on suppose que le quadruplet de base $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$ introduit au chapitre I vérifie les deux axiomes suivants :

$$(H1) \quad U^{-1}(\mathcal{Y}_p) \subset \mathcal{Y}_p, \quad U(\mathcal{Y}_f) \subset \mathcal{Y}_f,$$

$$(H2) \quad U(\mathcal{Y}_\infty) = \mathcal{Y}_\infty$$

$[\mathcal{Y}_\infty$ désigne l'espace engendré par $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$]. On remarquera que l'hypothèse (H2) est automatiquement vérifiée lorsque $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$ sont associées comme au paragraphe I.1 à un processus Gaussien stationnaire $Y = (Y(n), n \in \mathbb{Z})$.

Cette deuxième partie comprend :

- le chapitre IV : Antifiltre des Représentations Markoviennes,
- le chapitre V : Construction des Représentations Markoviennes observables et minimales.

CHAPITRE IV

ANTIFILTRE DES REPRÉSENTATIONS MARKOVIENNES

Dans la théorie « classique » de la Représentation Markovienne rappelée au paragraphe I.1 un rôle très important est joué par le processus des « erreurs de filtrage » (cf. [Kal-1]) $Z = (X(n) - E[X(n)/Y(n-1), Y(n-2), \dots], n \in \mathbb{Z})$. Au chapitre VIII on verra qu'il fournit en particulier une paramétrisation de l'ensemble des RMM introduite la première fois par Faure [Fau-2] sous une forme purement algébrique. Dans ce chapitre nous allons définir l'antifiltre comme l'équivalent géométrique du processus

des erreurs de filtrage. Nous montrerons que l'antifiltre permet d'obtenir une paramétrisation très simple des RMO qui sera exploitée au chapitre V.

Introduisons tout d'abord une nouvelle notation. Soit $\mathcal{G}$ un sous-espace de $\mathcal{Y}_\infty = \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Y}_f$, nous considérerons dans la suite soit l'orthogonal de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$ (noté $\mathcal{G}^\perp$), soit l'orthogonal de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{Y}_\infty$. Celui-ci, noté $\mathcal{G}^0$, vérifie alors ⁽⁹⁾

$$(4.1) \quad \mathcal{G}^0 = \mathcal{G}^\perp \cap \mathcal{Y}_\infty.$$

IV.1. L'antifiltre des RM

DÉFINITION 4.1. — Soit $\mathcal{X}$ une RM, on appelle antifiltre de $\mathcal{X}$ le sous-espace de $\mathcal{Y}_p^\perp$ défini par

$$(4.2) \quad \mathcal{Z} = \bar{\mathbb{E}}[\mathcal{X} \mid \mathcal{Y}_p^\perp].$$

Le Lemme suivant montre que la correspondance entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Z}$ est biunivoque si $\mathcal{X}$ est observable.

LEMME 4.2. — Soit $\mathcal{X}$ une RM d'antifiltre $\mathcal{Z}$, $\mathcal{X}$ est observable si et seulement si

$$(4.3) \quad \mathcal{X} = \bar{\mathbb{E}}[\mathcal{Y}_f \mid \mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}].$$

Preuve. — Si $\mathcal{X}$ est une RM d'antifiltre $\mathcal{Z}$, (4.2) entraîne que $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p$. D'après (0.5), on en déduit que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}} \mathcal{Y}_f = \mathbb{E}^{\mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}} \mathbb{E}^{\mathcal{X}} \mathcal{Y}_f = \mathbb{E}^{\mathcal{X}} \mathcal{Y}_f.$$

En prenant les fermetures on obtient

$$\bar{\mathbb{E}}[\mathcal{Y}_f \mid \mathcal{X}] = \bar{\mathbb{E}}[\mathcal{Y}_f \mid \mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}],$$

d'où il vient que $\mathcal{X}$ est observable si et seulement si (4.3) est vérifié. ■

DÉFINITION 4.3. — Soit $\mathcal{X}$ une RM, on appelle espace résiduel de $\mathcal{X}$ le sous-espace de $\mathcal{Y}_\infty^\perp$ défini par

$$(4.4) \quad \mathcal{R} = \bar{\mathbb{E}}[\mathcal{X} \mid \mathcal{Y}_\infty^\perp].$$

La Proposition suivante donne la clé de la structure de l'antifiltre qui permettra d'utiliser (4.3) comme paramétrisation de l'ensemble des RMO.

⁽⁹⁾ Pour justifier cette notation on remarquera que $\mathcal{G}^0$ peut être interprété comme l'annihilateur de $\mathcal{G}$ ([Tay], p. 48) pour la dualité définie par la restriction du produit scalaire à $\mathcal{Y}_\infty$.

Pour la signification de « Markovien » on se reportera aux rappels mathématiques.

PROPOSITION 4.4. — Si $\mathcal{X}$ est une RM d'antifiltre $\mathcal{L}$ et d'espace résiduel $\mathcal{R}$, alors $(\mathcal{L}, U^{-1})$ est Markovien par rapport à $(\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+)$.

Preuve. — Puisqu'on a supposé que $\mathcal{Y}_\infty$ réduit U [hypothèse (H2)], (4.1) entraîne que $(\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+)$ est invariant par U . Il est clair que $\mathcal{L}$ est inclus dans $(\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+)$ et donc il reste à montrer d'après (0.13) que

$$(4.5) \quad E^{\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+} U^{-1}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}.$$

$\mathcal{X}$ étant une RM, on a par définition

$$(4.6) \quad (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \perp (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \ominus \mathcal{X},$$

d'où l'on déduit que

$$(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_\infty) = [(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \ominus \mathcal{X}] \oplus (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}_p).$$

On obtient alors la décomposition suivante de $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_\infty) \oplus (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_\infty)^\perp \\ &= [(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \ominus \mathcal{X}] \oplus [(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}_p) \oplus (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_\infty)^\perp]. \end{aligned}$$

Mais (4.6) entraîne que

$$U^{-1}\mathcal{X} \perp (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \ominus \mathcal{X},$$

d'où il vient que

$$(4.7) \quad U^{-1}\mathcal{X} \subset (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}_p) \oplus (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_\infty)^\perp.$$

Par définition de $\mathcal{R}$, on a

$$\mathcal{Y}_p \oplus (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_\infty)^\perp = \mathcal{Y}_p \oplus (\mathcal{R}_+ \vee \mathcal{Y}_\infty)^\perp = (\mathcal{Y}_p^0 \vee \mathcal{R}_+)^\perp,$$

et (4.7) peut s'écrire

$$(4.8) \quad U^{-1}\mathcal{X} \subset \mathcal{X} \vee (\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+)^\perp.$$

Il est facile de voir que (4.8) est équivalent à

$$(4.9) \quad E^{\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+} U^{-1}\mathcal{X} \subset E^{\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+} \mathcal{X}.$$

Sachant que $(\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+)$ est invariant par U , (4.9) peut aussi s'écrire

$$E^{\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+} U^{-1}(E^{\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+} \mathcal{X}) \subset E^{\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+} \mathcal{X}.$$

En remarquant que $E[\mathcal{X} \mid \mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+]$ est dense dans $\mathcal{L}$, on en déduit (4.5) par continuité. ■

IV.2. Caractérisation des antifiltres des RMO

Dans ce paragraphe nous allons montrer que l'hypothèse d'observabilité et la Proposition 4.4 permettent conjointement de caractériser complètement l'ensemble des antifiltres des RMO. Nous considérons donc une RMO $\mathcal{X}$ d'antifiltre $\mathcal{Z}$ et d'espace résiduel $\mathcal{R}$. Nous noterons S et S_r les restrictions de U aux sous-espaces invariants $\mathcal{Y}_p^0$ et $\mathcal{R}_+$. Leurs adjoints S^* et S_r^* vérifient alors

$$(4.10) \quad S^* = E^{\mathcal{Y}_p^0} U^{-1} | \mathcal{Y}_p^0, \quad S_r^* = E^{\mathcal{R}_+} U^{-1} | \mathcal{R}_+.$$

Nous noterons aussi Π_1 [resp. Π_2] la restriction à $\mathcal{Z}$ de l'opérateur de projection sur $\mathcal{Y}_\infty$ [resp. $\mathcal{Y}_\infty^\perp$].

LEMME 4.5. — Π_1 est une injection de $\mathcal{Z}$ sur $\mathcal{Y}_p^0$.

Preuve. — Sachant que $\mathcal{Z}$ est inclus dans $(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}_p)$, on a

$$(4.11) \quad E^{\mathcal{X}} \mathcal{Y}_\infty = E^{\mathcal{X}} \mathcal{Y}_f = E^{\mathcal{X}} E^{\mathcal{X}} \mathcal{Y}_f.$$

En prenant les fermetures dans (4.11) et en utilisant l'observabilité de $\mathcal{X}$, on obtient

$$(4.12) \quad \mathcal{Z} = \overline{E}[\mathcal{Y}_\infty | \mathcal{Z}].$$

Le noyau de Π_1 étant précisément égal à $(\mathcal{Z} \cap \mathcal{Y}_\infty^\perp)$, on déduit de (4.12) que Π_1 est bien injectif. ■

On peut alors définir un opérateur M de $\mathcal{Y}_p^0$ dans $\mathcal{Y}_\infty^\perp$ par

$$(4.13) \quad M = \Pi_2 \Pi_1^{-1}.$$

Il est clair que le domaine de M est égal à $\Pi_1(\mathcal{Z}) = E[\mathcal{Z} | \mathcal{Y}_\infty]$ et que l'image de M est égal à $\Pi_2(\mathcal{Z}) = E[\mathcal{Z} | \mathcal{Y}_\infty^\perp]$. La Proposition suivante précise la structure de M . Nous montrerons au chapitre V que l'ensemble des RMO est exactement décrit par la Proposition.

PROPOSITION 4.6. — M est un opérateur fermé tel que

$$(4.14) \quad \mathcal{Z} = \{ \lambda + M\lambda, \lambda \in \mathcal{D}(M) \}^{(10)},$$

$$(4.15) \quad MS^* = S_r^* M$$

Preuve. — Par définition de Π_1 et Π_2 , on a

$$(4.16) \quad \mathcal{Z} = \{ \Pi_1 \lambda + \Pi_2 \lambda, \lambda \in \mathcal{Z} \}.$$

⁽¹⁰⁾ Dans la suite nous identifierons $\mathcal{Z}$ et le graphe de M qui sont clairement isomorphes [noter que λ est orthogonal à $M\lambda$, pour tout λ dans $\mathcal{D}(M)$].

Or (4.13) implique que $\Pi_2 = M\Pi_1$ et (4.16) s'écrit

$$\mathcal{Z} = \{ \Pi_1 \lambda + M\Pi_1 \lambda, \lambda \in \mathcal{Z} \}.$$

Sachant que $\{ \Pi_1 \lambda, \lambda \in \mathcal{Z} \}$ est précisément $\mathcal{D}(M)$, on obtient (4.14). Puisque $\mathcal{Z}$ peut s'identifier au graphe de M , on en déduit que M est nécessairement un opérateur fermé. Il reste alors à montrer (4.15). D'après la Proposition 4.4, on a pour tout λ dans $\mathcal{D}(M)$

$$(4.17) \quad E^{\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}} U^{-1}(\lambda + M\lambda) \in \mathcal{Z}.$$

Par définition de S^* et S_r^* , (4.17) équivaut à

$$(4.18) \quad S^* \lambda + S_r^* M \lambda \in \mathcal{Z}.$$

Utilisant (4.14), on déduit de (4.18) que, pour tout λ dans $\mathcal{D}(M)$, on a

$$MS^* \lambda = S_r^* M \lambda. \quad \blacksquare$$

REMARQUE 4.7. — On peut préciser un peu l'énoncé de la Proposition 4.6.

Remarquons d'abord que (4.15) entraîne que $(\mathcal{R}, U^{-1})$ est Markovien d'opérateur de transition S_r^* . Introduisons ensuite les sous-espaces $(\mathcal{G}_i, i = 1, 2, 3)$ définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \overline{\text{Ker } M} = \mathcal{Z} \cap \mathcal{Y}_p^0, \\ \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 &= \overline{\mathcal{D}(M)} = \overline{E[\mathcal{Z} \mid \mathcal{Y}_p^0]}, \\ \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3 &= \mathcal{Y}_p^0. \end{aligned}$$

On déduit de (4.15) que les espaces $\mathcal{G}_i$ réalisent une triangularisation de S^* , i. e.

$$S^*(\mathcal{G}_i) \subset \bigoplus_{j \leq i} \mathcal{G}_j \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Définissons les opérateurs S_{ij}^* de $\mathcal{G}_j$ dans $\mathcal{G}_i$ par

$$S_{ij}^* = E^{\mathcal{G}_i} S^* \mid \mathcal{G}_j.$$

Il est alors facile de voir que la Proposition 4.6 revient à écrire que

$$\mathcal{Z} = \mathcal{G}_1 \oplus \{ \lambda + N\lambda, \lambda \in \mathcal{D}(N) \},$$

où N est un isomorphisme faible de $(\mathcal{G}_2, S_{22}^*)$ sur $(\mathcal{R}, S_r^*)$.

IV.3. L'antifiltre propre

Il est clair d'après les hypothèses (H1) et (H2) que $\mathcal{Y}_p^0$ et $\mathcal{Y}_f^0$ sont respectivement invariants par U et U^{-1} . On en déduit alors que le quadruplet $(\mathcal{H}, U^{-1}, \mathcal{Y}_p^0, \mathcal{Y}_f^0)$ vérifie l'hypothèse (H1). On peut donc considérer l'ensem-

ble des RM de $(\mathcal{H}, U^{-1}, \mathcal{Y}_p^0, \mathcal{Y}_f^0)$ [qu'on appellera *anti-RM*] dont la structure est donnée par le Théorème 1.7. D'après le chapitre III le filtre propre de $(\mathcal{H}, U^{-1}, \mathcal{Y}_p^0, \mathcal{Y}_f^0)$ est $\mathcal{Z}_* = \bar{E}[\mathcal{Y}_f^0 | \mathcal{Y}_p^0]$ dont l'opérateur de transition est précisément la restriction de S^* à $\mathcal{Z}_*$. On notera que cela implique en particulier que $\mathcal{Z}_*$ est nécessairement invariant par S^* . Il est alors naturel de poser la définition suivante.

DÉFINITION 4.8. — On appelle *antifiltre propre* le sous-espace de $\mathcal{Y}_p^0$ défini par

$$(4.19) \quad \mathcal{Z}_* = \bar{E}[\mathcal{Y}_f^0 | \mathcal{Y}_p^0].$$

Il est intéressant de noter qu'on peut définir aussi l'antifiltre propre comme l'antifiltre du cofiltre propre.

LEMME 4.9. — $\mathcal{Z}_*$ défini par (4.19) vérifie $\mathcal{Z}_* = \bar{E}[\mathcal{Y}^* | \mathcal{Y}_p^\perp]$.

Preuve. — Il est facile de voir que le Lemme revient à montrer que

$$(4.20) \quad \mathcal{Y}_f^0 \vee \mathcal{Y}_p = \mathcal{Y}^* \vee \mathcal{Y}_p.$$

Or, par définition de $\mathcal{Y}^*$, on a la décomposition suivante de $\mathcal{Y}_\infty$

$$\mathcal{Y}_\infty = (\mathcal{Y}^* \vee \mathcal{Y}_p) \oplus (\mathcal{Y}_f \cap \mathcal{Y}_p^0),$$

d'où l'on déduit immédiatement (4.20) après avoir remarqué que

$$(\mathcal{Y}_f \cap \mathcal{Y}_p^0)^0 = \mathcal{Y}_f^0 \vee \mathcal{Y}_p. \quad \blacksquare$$

REMARQUE 4.10. — Lorsque $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$ vérifient l'hypothèse supplémentaire suivante

$$(4.21) \quad \mathcal{Y}_p \cap \mathcal{Y}_f = \{0\},$$

il est clair que $\mathcal{Y}_p^0 \vee \mathcal{Y}_f^0 = \mathcal{Y}_\infty$ et par conséquent le quadruplet $(\mathcal{H}, U^{-1}, \mathcal{Y}_p^0, \mathcal{Y}_f^0)$ vérifie les hypothèses (H1) et (H2). Dans ce cas on notera que l'antifiltre propre de $(\mathcal{H}, U^{-1}, \mathcal{Y}_p^0, \mathcal{Y}_f^0)$ coïncide avec le filtre propre $\mathcal{Y}_*$ de $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$.

A ce propos il nous paraît important d'insister sur le rôle joué dans la Théorie de la Représentation Markovienne par les deux couples suivants :

- $(\mathcal{Y}_*, U_- | \mathcal{Y}_*)$, surtout pour les questions d'isomorphisme entre RMM,
- $(\mathcal{Z}_*, S^* | \mathcal{Z}_*)$, surtout dans la construction des RMM, comme on le verra au chapitre V.

CHAPITRE V

CONSTRUCTION

DES REPRÉSENTATIONS MARKOVIENNES OBSERVABLES ET MINIMALES

Le but de ce chapitre est de caractériser complètement l'ensemble des RMO grâce à l'antifiltre introduit au chapitre IV. On notera que les résultats présentés ici ont l'avantage, par rapport à la Proposition 2.6, de fournir des procédés « directs » de construction des RMO (et en particulier des RMM). Ce point sera illustré au chapitre VIII quand nous construirons l'ensemble des RMM de dimension finie.

V.1. Construction des RMO

Le Théorème suivant apparaît essentiellement comme la réciproque de la Proposition 4.6. Dans l'énoncé S^* désignera comme auparavant l'adjoint de la restriction de U à $\mathcal{Y}_p^0$.

THÉORÈME 5.1. — *Un sous-espace $\mathcal{X}$ est une RMO si et seulement si*

$$(5.1) \quad \mathcal{X} = \overline{E}[\mathcal{Y}_f \mid \mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}],$$

où $\mathcal{Z}$ est le graphe d'un opérateur fermé M tel que $(\overline{\mathcal{R}(M)}, U^{-1})$ est Markovien d'opérateur de transition S_r vérifiant

$$(5.2) \quad MS^* = S_r^*M.$$

Preuve. — La condition nécessaire est triviale d'après le Lemme 4.2 et la Proposition 4.6. Nous allons démontrer la condition suffisante en deux étapes. Pour simplifier les notations on remplacera dans la suite $\overline{\mathcal{R}(M)}$ par $\mathcal{R}$.

a) $(\mathcal{Z}, U^{-1})$ est Markovien par rapport à $(\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+)$: sachant que (5.2) entraîne que $\mathcal{D}(M)$ est nécessairement invariant par S^* , on a par définition de $\mathcal{Z}$

$$(5.3) \quad S^*\lambda + MS^*\lambda \in \mathcal{Z} \quad \text{pour tout } \lambda \text{ dans } \mathcal{D}(M).$$

En utilisant (5.2) il vient alors

$$(5.4) \quad S^*\lambda + S_r^*M\lambda \in \mathcal{Z} \quad \text{pour tout } \lambda \text{ dans } \mathcal{D}(M).$$

Mais par définition de S^* et S_r^* , on a l'égalité suivante pour tout λ dans $\mathcal{D}(M)$:

$$E^{\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+} U^{-1}(\lambda + M\lambda) = S^*\lambda + S_r^*M\lambda.$$

D'après (5.4) on a alors pour tout λ dans $\mathcal{D}(M)$

$$E^{\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+} U^{-1}(\lambda + M\lambda) \in \mathcal{Z},$$

qui entraîne la propriété annoncée.

b) $\mathcal{X}$ défini par (5.1) vérifie $\mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Z}_-] : (\mathcal{Z}, U^{-1})$ Markovien par rapport à $(\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+)$ s'écrit

$$\mathcal{Z}_- \perp [(\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+) \ominus \mathcal{Z}],$$

autrement dit

$$\mathcal{Z}_- \subset (\mathcal{Y}_p^0 \oplus \mathcal{R}_+)^{\perp} \oplus \mathcal{Z} = (\mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}) \oplus (\mathcal{Y}_{\infty} \oplus \mathcal{R}_+)^{\perp}.$$

Par conséquent on a les inclusions suivantes :

$$(5.5) \quad \mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Z}_- \subset (\mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}) \oplus (\mathcal{Y}_{\infty} \oplus \mathcal{R}_+)^{\perp}.$$

Puisque $\mathcal{Y}_f$ est clairement orthogonal à $(\mathcal{Y}_{\infty} \oplus \mathcal{R}_+)^{\perp}$, on déduit immédiatement de (5.5) que

$$E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}] = E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Z}_-],$$

qui entraîne bien que $\mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Z}_-]$.

Pour conclure la démonstration du Théorème il ne reste plus qu'à appliquer la Proposition 2.6. ■

Particularisons à présent le Théorème 5.1 au cas des RMO internes (i. e. celles incluses dans $\mathcal{Y}_{\infty}$).

COROLLAIRE 5.2. — *Un sous-espace $\mathcal{X}$ est une RMO interne si et seulement si*

$$(5.6) \quad \mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}],$$

où $\mathcal{Z}$ est un sous-espace de $\mathcal{Y}_p^0$ invariant par S^* .

Preuve. — Si $\mathcal{X}$ est une RMO interne, $\mathcal{Z}$ est inclus dans $\mathcal{Y}_p^0$ et le Théorème 5.1 entraîne que M est alors un opérateur nul. Dans ce cas $\mathcal{Z}$ est nécessairement égal au domaine de M et est donc de ce fait invariant par S^* . Réciproquement il est immédiat d'après le Théorème 5.1 que (5.6) définit une RMO interne. ■

REMARQUE 5.3. — On laisse le soin au lecteur de « dualiser » les résultats de ce paragraphe afin d'obtenir un mode de construction équivalent de l'ensemble des RMC.

V.2. Construction des RMM

Dans ce paragraphe nous allons appliquer le Théorème 5.1 et le Corollaire 5.2 à la construction des RMM et des RMM internes respectivement.

PROPOSITION 5.4. — *Un sous-espace $\mathcal{X}$ est une RMM si et seulement si*

$$(5.7) \quad \mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f \mid \mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}],$$

où $\mathcal{Z}$ est le graphe d'un opérateur fermé M tel que $\mathcal{D}(M)$ est inclus dans $\mathcal{Z}_*$ et que $(\overline{\mathcal{R}(M)}, U^{-1})$ est Markovien d'opérateur de transition S_r vérifiant

$$(5.8) \quad MS^* = S_r^*M.$$

Preuve. — D'après le Théorème 5.1 on a seulement à montrer qu'une RMO $\mathcal{X}$ définie par (5.1) est minimale si et seulement si $\mathcal{D}(M)$ est inclus dans $\mathcal{Z}_*$. Si $\mathcal{X}$ est minimale, $\mathcal{X}$ est constructible et il est facile de vérifier que la constructibilité de $\mathcal{X}$ peut s'écrire sous la forme

$$(5.9) \quad (E^{\mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{X}} \mathcal{Y}_f) \cap \mathcal{Y}_p^\perp = \{0\}.$$

En vertu de l'égalité

$$(E^{\mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{X}} \mathcal{Y}_f) \cap \mathcal{Y}_p^\perp = E^{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}_f \cap \mathcal{Y}_p^0),$$

(5.9) entraîne que $\mathcal{X}$ est orthogonal à $(\mathcal{Y}_f \cap \mathcal{Y}_p^0)$. Par définition de $\mathcal{X}$ on en déduit alors que $\mathcal{D}(M)$ est nécessairement orthogonal à $(\mathcal{Y}_f \cap \mathcal{Y}_p^0)$. Or, d'après (4.19), $\mathcal{Y}_p^0$ admet la décomposition suivante

$$\mathcal{Y}_p^0 = \mathcal{Z}_* \oplus (\mathcal{Y}_f \cap \mathcal{Y}_p^0),$$

et par conséquent $\mathcal{D}(M)$ [inclus dans $\mathcal{Y}_p^0$] est un sous-espace de $\mathcal{Z}_*$. Pour la réciproque il suffit de remonter le raisonnement que nous venons de faire. ■

COROLLAIRE 5.5. — *Un sous-espace $\mathcal{X}$ est une RMM interne si et seulement si*

$$(5.10) \quad \mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f \mid \mathcal{Y}_p \oplus \mathcal{Z}],$$

où $\mathcal{Z}$ est un sous-espace de $\mathcal{Z}_*$ invariant par S^* .

Preuve. — Immédiate en combinant le Corollaire 5.2 et la Proposition 5.4. ■

REMARQUE 5.6. — D'après le Corollaire 5.5 il est clair que toute RMM interne $\mathcal{X}$ vérifie

$$(5.11) \quad \mathcal{X} \subset \mathcal{Y}_* \oplus \mathcal{Z}_* = \mathcal{Y}_* \vee \mathcal{Y}^*.$$

Cette relation montre que le filtre et le cofiltre propres contiennent toute « l'information » utile pour construire les RMM internes. En outre on notera qu'il y a autant de RMM internes que de sous-espaces invariants de S^* inclus dans $\mathcal{Z}_*$.

V.3. Structures d'ordre sur les RMO

Dans tout ce paragraphe nous suivrons la terminologie de Birkhoff [Bir] sur les ensembles ordonnés. Soient $\mathcal{X}^1$ et $\mathcal{X}^2$ deux RMO d'antifiltres respectifs $\mathcal{Z}^1$ et $\mathcal{Z}^2$, on pose alors la définition suivante.

DÉFINITION 5.7. — On dit que $\mathcal{X}^1$ est inférieure à $\mathcal{X}^2$ et on écrit $\mathcal{X}^1 < \mathcal{X}^2$ si et seulement si $E[\mathcal{Z}^1 \mid \mathcal{Y}_\infty]$ est inclus dans $E[\mathcal{Z}^2 \mid \mathcal{Y}_\infty]$.

Il est facile de voir que $<$ est un quasi-ordre (partiel) sur l'ensemble des RMO. La Proposition 5.4 entraîne alors que

$$(5.12) \quad \mathcal{Y}_* < \mathcal{X} < \mathcal{Y}^*.$$

Nous verrons au chapitre VIII que (5.12) apparaît comme la généralisation d'une inégalité matricielle due à Faurre [Fau-2].

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des RMO internes. Le quasi-ordre $<$ se réduit à un ordre (partiel) sur $\mathcal{E}$. Nous allons montrer qu'en fait $<$ induit sur $\mathcal{E}$ une structure de treillis.

PROPOSITION 5.8. — $(\mathcal{E}, <)$ est un treillis pour les opérations inf et sup définies par

$$(5.13) \quad \inf(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2) = \text{RMO d'antifiltre } \mathcal{Z} = \mathcal{Z}^1 \cap \mathcal{Z}^2,$$

$$(5.14) \quad \sup(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2) = \text{RMO d'antifiltre } \mathcal{Z} = \mathcal{Z}^1 \vee \mathcal{Z}^2.$$

Preuve. — On commence par remarquer que les sous-espaces de $\mathcal{Z}_*$ invariants par S^* ont une structure de treillis (l'ordre étant l'inclusion ensembliste) pour les opérations $\cap$ et $\vee$. Comme l'ordre sur $\mathcal{E}$ est en fait induit par l'ordre sur les antifiltres, la Proposition est démontrée. ■

REMARQUE 5.9. — Il est clair que l'ensemble des RMM est un sous-treillis de $\mathcal{E}$ dont l'élément minimal est $\mathcal{Y}_*$ et l'élément maximal $\mathcal{Y}^*$.

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie on supposera que le quadruplet $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$(H1) \quad U^{-1}\mathcal{Y}_p \subset \mathcal{Y}_p \quad \text{et} \quad U\mathcal{Y}_f \subset \mathcal{Y}_f,$$

$$(H2) \quad \mathcal{Y}_\infty = \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Y}_f \quad \text{réduit } U,$$

$$(H3) \quad \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{Y}_p = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{Y}_f = \mathcal{Y}_\infty.$$

Il est clair que (H3) entraîne (H2). Cette troisième partie comprend les chapitres suivants :

- le chapitre VI : Innovation et Représentations Markoviennes,
- le chapitre VII : Régularité des Représentations Markoviennes.

CHAPITRE VI

INNOVATION ET REPRÉSENTATIONS MARKOVIENNES

Dans ce chapitre nous allons introduire le concept d'innovation qui occupe une place centrale dans la théorie parce qu'il fait le lien entre l'approche « temporelle » développée jusqu'à présent et l'approche « fréquentielle » exposée dans [Ruc-9] ou [LiP-5]. L'innovation sera définie comme l'équivalent géométrique du bruit blanc W de la présentation classique (cf. le paragraphe I.1). On notera que le concept habituel d'innovation dans le filtrage de Kalman [KaG] correspond à ce que nous appellerons l'innovation propre.

Précisons tout d'abord un point de terminologie. Suivant Sz.-Nagy et Foias [SzF-2] on dira qu'un sous-espace $\mathcal{W}$ est *ambulant* lorsque $\mathcal{W}$ est orthogonal à $U\mathcal{W}$. On remarquera que $(U^n \mathcal{W}, n \in \mathbb{Z})$ est l'équivalent géométrique d'un bruit blanc. On conviendra dans la suite de noter $\mathcal{W}_\infty$ le sous-espace défini par

$$(6.1) \quad \mathcal{W}_\infty = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{W}.$$

Rappelons alors, sous forme de Lemme, un résultat important sur les sous-espaces ambulants.

LEMME 6.1 (cf. la Proposition 2.1 [SzF-2], p. 4). — Si $\mathcal{W}$ et $\dot{\mathcal{W}}$ sont deux sous-espaces ambulants tels que

$$(6.2) \quad \mathcal{W}_\infty \subset \dot{\mathcal{W}}_\infty,$$

alors

$$(6.3) \quad \dim \mathcal{W} \leq \dim \dot{\mathcal{W}} \quad (^{11}).$$

Si $\dim \dot{\mathcal{W}}$ est finie, l'inégalité dans (6.3) entraîne l'égalité dans (6.2).

VI.1. L'innovation des RM

DÉFINITION 6.2. — Soit $\mathcal{X}$ une RM, on appelle innovation de $\mathcal{X}$ le sous-espace ambulant $\mathcal{W}$ défini par

$$(6.4) \quad \mathbf{U}(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \mathcal{W} \oplus (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p).$$

On appelle innovation propre le sous-espace ambulant $\mathcal{J}$ tel que

$$(6.5) \quad \mathbf{U}\mathcal{Y}_p = \mathcal{J} \oplus \mathcal{Y}_p.$$

Pour justifier la terminologie adoptée on notera que l'innovation propre peut aussi être définie comme l'innovation du filtre propre.

LEMME 6.3. — $\mathcal{W}$ est l'innovation d'une RM $\mathcal{X}$ si et seulement si

$$(6.6) \quad \mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f = \mathcal{X} \oplus \mathcal{W}_+.$$

Preuve. — $\mathcal{X}$ étant une RM, on a la décomposition suivante [$\mathcal{X}_\infty$ désigne $\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{X}_-$] :

$$(6.7) \quad \mathcal{X}_\infty \vee \mathcal{Y}_\infty = [(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \ominus \mathcal{X}] \oplus (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p).$$

Or l'hypothèse (H3) entraîne que

$$\mathcal{X}_\infty \vee \mathcal{Y}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathbf{U}^n(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)$$

et par conséquent (6.4) équivaut à

$$(6.8) \quad \mathcal{X}_\infty \vee \mathcal{Y}_\infty = \mathcal{W}_+ \oplus (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p).$$

D'après (6.7) on en déduit que (6.4) est vérifié si et seulement si on a

$$(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \ominus \mathcal{X} = \mathcal{W}_+. \quad \blacksquare$$

Montrons à présent qu'il y a une correspondance biunivoque entre les

(¹¹) Pour tout sous-espace $\mathcal{G}$ on notera $\dim \mathcal{G}$ la dimension de $\mathcal{G}$.

RMO et leurs innovations. On remarquera que ce résultat est faux sans l'hypothèse d'observabilité (ainsi $\mathcal{Y}_*$ et $\mathcal{Y}_p$ sont deux RMC en général différentes ayant la même innovation $\mathcal{I}$).

LEMME 6.4. — *Soit $\mathcal{X}$ une RM d'innovation $\mathcal{W}$, $\mathcal{X}$ est observable si et seulement si*

$$(6.9) \quad \mathcal{X} = \bar{\mathbb{E}}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{W}_+^\perp].$$

Preuve. — D'après (6.8), toute RM $\mathcal{X}$ d'innovation $\mathcal{W}$ vérifie

$$\mathcal{W}_+^\perp = (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \oplus (\mathcal{X}_\infty \vee \mathcal{Y}_\infty)^\perp.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{W}_+^\perp] = \mathbb{E}[\mathcal{Y}_f | (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] = \mathbb{E}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{X}].$$

En prenant les fermetures il vient alors que (6.9) est vérifié si et seulement si $\mathcal{X}$ est observable. ■

Le Lemme 6.4 justifie alors la Définition suivante.

DÉFINITION 6.5. — *On dit qu'un sous-espace ambulant est une innovation observable (interne) lorsqu'il est l'innovation d'une RMO (interne). On dit qu'un sous-espace ambulant est une innovation minimale (interne) lorsqu'il est l'innovation d'une RMM (interne).*

Il est clair qu'une innovation observable interne est nécessairement incluse dans $\mathcal{Y}_\infty$. Le paragraphe VI-3 sera consacré à déterminer l'ensemble des innovations observables internes et le sous-ensemble des innovations minimales internes.

VI.2. La co-innovation des RM

Dans ce paragraphe nous allons, selon une technique désormais classique, « dualiser » les résultats du paragraphe précédent.

DÉFINITION 6.6. — *Soit $\mathcal{X}$ une RM, on appelle co-innovation de $\mathcal{X}$ le sous-espace ambulant $\check{\mathcal{W}}$ défini par*

$$(6.10) \quad \mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f = \check{\mathcal{W}} \oplus \mathbb{U}(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f).$$

On appelle co-innovation propre le sous-espace ambulant $\check{\mathcal{I}}$ tel que

$$(6.11) \quad \mathcal{Y}_f = \check{\mathcal{I}} \oplus \mathbb{U}\mathcal{Y}_f.$$

Il est clair que la co-innovation propre peut aussi être définie comme la

co-innovation du cofiltre propre [nous espérons que les notations adoptées n'entraîneront pas de confusion dans l'esprit du lecteur entre $\tilde{\mathcal{F}}$ et la co-innovation du filtre propre]. Nous groupons en un Corollaire tous les résultats « dualisés » du paragraphe précédent.

COROLLAIRE 6.7. — $\tilde{\mathcal{W}}$ est la co-innovation d'une RM $\mathcal{X}$ si et seulement si

$$(6.12) \quad \mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p = \mathcal{X} \oplus U^{-1}\tilde{\mathcal{W}}_-.$$

En outre $\mathcal{X}$ est une RMC si et seulement si

$$(6.13) \quad \mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_p \mid (U^{-1}\tilde{\mathcal{W}}_-)^\perp].$$

Preuve. — La démonstration étant analogue à celles des Lemmes 6.3 et 6.4, nous nous contenterons d'indiquer les décompositions utilisées :

$$(6.14) \quad \mathcal{X}_\infty \vee \mathcal{Y}_\infty = [(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \ominus \mathcal{X}] \oplus (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f),$$

$$(6.15) \quad = U^{-1}\tilde{\mathcal{W}}_- \oplus (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f). \quad \blacksquare$$

REMARQUE 6.8. — On déduit du Corollaire 6.6 qu'il y a une correspondance biunivoque entre les RMC et leurs co-innovations. Si $\mathcal{X}$ est une RM quelconque, les relations (6.6) et (6.15) entraînent la décomposition

$$(6.16) \quad \mathcal{X}_\infty \vee \mathcal{Y}_\infty = \mathcal{X} \oplus \mathcal{W}_+ \oplus U^{-1}\tilde{\mathcal{W}}_-.$$

Si $\mathcal{X}$ est interne, (6.16) se simplifie en

$$\mathcal{Y}_\infty = \mathcal{X} \oplus \mathcal{W}_+ \oplus U^{-1}\tilde{\mathcal{W}}_-,$$

et on en déduit que, dans ce cas, la correspondance entre $\mathcal{X}$ et le couple $(\mathcal{W}, \tilde{\mathcal{W}})$ est biunivoque.

La définition suivante est exactement copiée sur la Définition 6.5.

DÉFINITION 6.9. — On dit qu'un sous-espace ambulant est une co-innovation constructible [resp. minimale] (interne) lorsqu'il est la co-innovation d'une RMC [resp. RMM] (interne).

VI.3. Caractérisation des innovations observables internes

Soit $\mathcal{W}$ un sous-espace de $\mathcal{Y}_\infty$, nous allons chercher à quelle condition $\mathcal{W}$ est une innovation observable. En vertu de la Définition 6.2 il est clair que $\mathcal{W}$ doit nécessairement vérifier

$$(6.17) \quad \mathcal{W} \subset \mathcal{Y}_p^0,$$

auquel cas,

$$(6.18) \quad \mathcal{X} = \bar{\mathbb{E}}[\mathcal{Y}_f | \mathcal{W}_+^\perp]$$

définit une RMO d'après la Proposition 2.6. On déduit alors des Lemmes 6.3 et 6.4 que $\mathcal{W}$ est une innovation observable si et seulement si $\mathcal{X}$ définie par (6.18) est telle que

$$(6.19) \quad \mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f = \mathcal{X} \oplus \mathcal{W}_+.$$

LEMME 6.10. — *Pour tout sous-espace ambulant $\mathcal{W}$ satisfaisant à (6.17), $\mathcal{X}$ définie par (6.18) vérifie nécessairement*

$$(6.20) \quad \mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f \subset \mathcal{X} \oplus \mathcal{W}_+.$$

Preuve. — D'après la relation (1.23) du Théorème 1.7, on a

$$\mathcal{W}_+^\perp \perp (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \ominus \mathcal{X},$$

qui entraîne immédiatement que

$$(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \ominus \mathcal{X} \subset \mathcal{W}_+.$$

■

Puisque $\mathcal{X}$ est orthogonal à $\mathcal{W}_+$, il est facile de voir que (6.20) est une inclusion stricte si et seulement si on peut trouver un vecteur non nul λ appartenant à $\mathcal{W}_+$ et orthogonal à $(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f)$. Mais λ serait alors nécessairement orthogonal à $\mathcal{Y}_f$ et à $\mathcal{Y}_p$ [d'après (6.17)]. Sachant que $\mathcal{W}_+$ est inclus dans $\mathcal{Y}_\infty$, on en déduit que $\lambda = 0$. Par conséquent (6.19) est vérifié et tout sous-espace ambulant $\mathcal{W}$ satisfaisant à (6.17) est une innovation observable. En remarquant que (6.17) revient à supposer que $\mathcal{W}_+$ est inclus dans $\mathcal{I}_+$, on a donc démontré la Proposition suivante.

PROPOSITION 6.11. — *Un sous-espace ambulant $\mathcal{W}$ est une innovation observable interne si et seulement si*

$$(6.21) \quad \mathcal{W}_+ \subset \mathcal{I}_+.$$

Par « dualité » on obtient facilement le Corollaire suivant qui détermine l'ensemble des co-innovations constructibles internes.

COROLLAIRE 6.12. — *Un sous-espace ambulant $\tilde{\mathcal{W}}$ est une co-innovation constructible interne si et seulement si*

$$(6.22) \quad \tilde{\mathcal{W}}_- \subset \tilde{\mathcal{I}}_-.$$

D'après la Définition 6.5 et la Proposition 6.11, un sous-espace ambulant $\mathcal{W}$ vérifiant (6.21) sera une innovation minimale interne si et seulement si $\mathcal{X}$ définie par (6.18) est constructible (ce qui équivaut à la minimalité à

cause de l'observabilité de $\mathcal{X}$). Or, par définition, la constructibilité de $\mathcal{X}$ s'écrit

$$(6.23) \quad E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{W}_+^\perp] \cap \mathcal{Y}_p^\perp = \{0\}.$$

Par un raisonnement identique à celui de la Proposition 5.4 il est facile de voir que (6.23) revient à écrire

$$(6.24) \quad \mathcal{Y}_f \cap \mathcal{Y}_p^0 \subset \mathcal{W}_+.$$

Notons $\mathcal{I}^*$ l'innovation du cofiltre propre $\mathcal{Y}^*$. D'après le Lemme 6.3 on a la relation caractéristique suivante

$$(6.25) \quad \mathcal{Y}_f = \mathcal{Y}^* \oplus \mathcal{I}_+^*,$$

qui entraîne que

$$(6.26) \quad \mathcal{I}_+^* = \mathcal{Y}_f \cap \mathcal{I}_p^0.$$

Par conséquent $\mathcal{W}$ sera minimale si et seulement si $\mathcal{I}_+^*$ est inclus dans $\mathcal{W}_+$. On a donc démontré le Corollaire suivant.

COROLLAIRE 6.13. — *Un sous-espace ambulant $\mathcal{W}$ est une innovation minimale interne si et seulement si*

$$(6.27) \quad \mathcal{I}_+^* \subset \mathcal{W}_+ \subset \mathcal{I}_+,$$

où $\mathcal{I}$ [resp. $\mathcal{I}^*$] désigne l'innovation du filtre propre [resp. du cofiltre propre].

CHAPITRE VII

RÉGULARITÉ DES REPRÉSENTATIONS MARKOVIENNES

Dans la Théorie des Processus Gaussiens (cf. [Doo-1]) on dit qu'un processus Gaussien Markovien stationnaire fini-dimensionnel est régulier (ou purement non déterministique) lorsque sa matrice de transition est asymptotiquement stable (cf. le paragraphe I.1). Le but de ce chapitre est de définir l'équivalent géométrique de cette notion pour les Représentations Markoviennes.

VII.1. Régularité des RM

DÉFINITION 7.1. — *On dit qu'une RM $\mathcal{X}$ est régulière lorsqu'elle vérifie*

$$(7.1) \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \{0\}.$$

La régularité de $\mathcal{X}$ entraîne trivialement que

$$(7.2) \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{Y}_p = \{0\},$$

qu'on appellera *régularité propre* (elle correspond à la régularité du filtre propre).

Par une décomposition de Wold (cf. [SzF-2]) on a immédiatement que l'innovation $\mathcal{W}$ vérifie

$$U(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \mathcal{W}_- \oplus \left[\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \right].$$

On en déduit le Lemme suivant qui peut servir de définition de la régularité en termes de l'innovation.

LEMME 7.2. — Soit $\mathcal{X}$ une RM d'innovation $\mathcal{W}$, $\mathcal{X}$ est régulière si et seulement si

$$(7.3) \quad U(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \mathcal{W}_-.$$

Montrons à présent que, comme suggéré dans l'introduction de ce chapitre, la régularité de $\mathcal{X}$ est équivalente à l'asymptotique stabilité de son opérateur de transition F (i. e. F^n converge fortement vers 0 quand $n \uparrow \infty$).

PROPOSITION 7.3. — Une RM $\mathcal{X}$ d'opérateur de transition F est régulière si et seulement si F est asymptotiquement stable.

Preuve :

a) CONDITION NÉCESSAIRE

On suppose que $\mathcal{X}$ est une RM régulière. Pour tout λ dans $\mathcal{X}$ et tout $n \geq 0$, on a

$$F^n \lambda = E[U^n \lambda \mid (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] = U^n E[\lambda \mid U^{-n}(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)],$$

d'où l'on déduit

$$\|F^n \lambda\| = \|E[\lambda \mid U^{-n}(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)]\|.$$

Par conséquent quand $n \uparrow \infty$, on a

$$\lim \|F^n \lambda\| = \left\| E \left[\lambda \mid \bigcap_{n=0}^{\infty} U^{-n}(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \right] \right\|$$

et la régularité de $\mathcal{X}$ entraîne alors que la limite ci-dessus est nulle.

b) CONDITION SUFFISANTE

On suppose que $\mathcal{X}$ est une RM d'opérateur de transition asymptotiquement stable. D'après l'hypothèse (H3) on a

$$(7.4) \quad \mathcal{X}_\infty \vee \mathcal{Y}_\infty = \bigvee_{m=0}^{\infty} U^{-m}(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f)$$

($\mathcal{X}_\infty$ désigne $\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{X}_-$). Pour tout λ dans $\mathcal{X}_\infty \vee \mathcal{Y}_\infty$ et tout $m \geq 0$, posons

$$(7.5) \quad \lambda_m = E[\lambda \mid U^{-m}(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f)].$$

D'après (7.4) il est clair que λ_m converge vers λ quand $m \uparrow \infty$. Pour tout $n \geq m \geq 0$, on a alors la décomposition suivante :

$$(7.6) \quad E[U^n \lambda \mid (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] = E[U^n \lambda_m \mid (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] \\ + E[U^n(\lambda - \lambda_m) \mid (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)].$$

Or, par translation de la propriété de Markov de $\mathcal{X}$, on a

$$(7.7) \quad U^{n-m}(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \perp (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \mid U^{n-m}(\mathcal{X}).$$

Sachant que $U^n \lambda_m$ appartient à $U^{n-m}(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f)$, on déduit de (7.7) que

$$E^{\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p} U^n \lambda_m = E^{\mathcal{X}} E^{U^{n-m}(\mathcal{X})} U^n \lambda_m = F^{n-m}(E^{\mathcal{X}} U^m \lambda_m).$$

Par conséquent (7.6) entraîne que

$$\|E[U^n \lambda \mid (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)]\| \leq \|F^{n-m}(E^{\mathcal{X}} U^m \lambda_m)\| + \|\lambda - \lambda_m\|.$$

En faisant tendre m vers l'infini puis $(n - m)$ vers l'infini, on déduit de l'asymptotique stabilité de F que, pour tout λ dans $\mathcal{X}_\infty \vee \mathcal{Y}_\infty$, on a

$$(7.8) \quad \lim E[U^n \lambda \mid (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] = 0 \quad \text{quand } n \uparrow \infty.$$

Il est alors facile de vérifier que (7.8) équivaut à la régularité de $\mathcal{X}$. ■

Le Lemme suivant caractérisant l'ensemble des innovations des RMO régulières internes permet d'expliciter les liens entre les RMO d'un processus donné et les factorisations de sa densité spectrale (cf. [Ruc-9]).

LEMME 7.4. — *Les RMO régulières internes sont en correspondance biunivoque avec les sous-espaces ambulant $\mathcal{W}$ inclus dans $\mathcal{Y}_\infty$ tels que*

$$(7.9) \quad \mathcal{Y}_p \subset U^{-1} \mathcal{W}_-.$$

Preuve. — En vertu du Lemme 6.4 et de la Proposition 6.11, on a uniquement à montrer que (7.9) équivaut à la régularité de la RMO $\mathcal{X}$ définie par

$$(7.10) \quad \mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f \mid \mathcal{W}_+^\perp].$$

Si $\mathcal{X}$ est régulière, le Lemme 7.2 entraîne (7.9). Réciproquement, si $\mathcal{W}$ est un sous-espace ambulant de $\mathcal{Y}_\infty$, il résulte de (7.9) que $\mathcal{W}_\infty = \mathcal{Y}_\infty$. Par conséquent on a

$$\mathcal{W}_+^\perp = U^{-1}\mathcal{W}_- \oplus \mathcal{Y}_\infty^\perp,$$

et (7.10) s'écrit aussi bien

$$(7.11) \quad \mathcal{X} = \bar{E}[\mathcal{Y}_f \mid U^{-1}\mathcal{W}_-].$$

On en déduit alors que $(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)$ est inclus dans $U^{-1}\mathcal{W}_-$, ce qui entraîne nécessairement (7.1), donc la régularité de $\mathcal{X}$. ■

VII.2. Co-régularité des RM

Comme d'habitude nous présentons les versions « duales » des résultats précédents.

DÉFINITION 7.5. — *On dit qu'une RM $\mathcal{X}$ est co-régulière lorsqu'elle vérifie*

$$(7.12) \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) = \{0\}.$$

La co-régularité de $\mathcal{X}$ entraîne trivialement que

$$(7.13) \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{Y}_f = \{0\},$$

qu'on appellera *co-régularité propre* (elle correspond à la co-régularité du cofiltre propre).

Nous groupons en un Corollaire unique l'équivalent du Lemme 7.2 et de la Proposition 7.3.

COROLLAIRE 7.6. — *Soit $\mathcal{X}$ une RM de co-innovation $\check{\mathcal{W}}$ et d'opérateur de transition F , $\mathcal{X}$ est co-régulière si et seulement l'une des deux conditions équivalentes est vérifiée :*

$$(7.14) \quad \mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f = \check{\mathcal{W}}_+,$$

$$(7.15) \quad F^* \text{ est asymptotiquement stable.}$$

Le Lemme 7.4 donne par dualité le Corollaire suivant.

COROLLAIRE 7.7. — *Les RMC co-régulières internes sont en correspondance biunivoque avec les sous-espaces ambulants $\check{\mathcal{W}}$ inclus dans $\mathcal{Y}_\infty$ tels que*

$$(7.16) \quad \mathcal{Y}_f \subset \check{\mathcal{W}}_+.$$

VII.3. Critère de régularité de l'ensemble des RMM

L'objet de ce paragraphe est de démontrer que toutes les RMM sont régulières si et seulement si le cofiltre propre est régulier. Cette propriété découlera de la Proposition suivante qui a son intérêt propre [dans l'énoncé on utilisera le quasi-ordre sur les RMO défini au paragraphe V.3].

PROPOSITION 7.8. — Soient $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$ deux RMO telles que $\mathcal{X} < \dot{\mathcal{X}}$. Si $\dot{\mathcal{X}}$ est régulière, alors $\mathcal{X}$ est régulière.

Preuve. — Pour la démonstration nous allons utiliser deux résultats préliminaires énoncés sous forme de Lemmes.

LEMME 7.9. — Si $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$ sont deux RMO telles que $\mathcal{X} < \dot{\mathcal{X}}$, alors on a

$$(7.17) \quad E\left[\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \mid \mathcal{Y}_\infty\right] \subset E\left[\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\dot{\mathcal{X}}_- \vee \mathcal{Y}_p) \mid \mathcal{Y}_\infty\right].$$

Preuve. — Notons $\mathcal{Z}$ et $\dot{\mathcal{Z}}$ les antifiltres de $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$. Dire que $\mathcal{X}$ est inférieure à $\dot{\mathcal{X}}$ se traduit par

$$E[\mathcal{Z} \mid \mathcal{Y}_\infty] \subset E[\dot{\mathcal{Z}} \mid \mathcal{Y}_\infty],$$

c'est-à-dire

$$(7.18) \quad E[\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}_p \mid \mathcal{Y}_\infty] \subset E[\dot{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}_p \mid \mathcal{Y}_\infty].$$

Il est facile de vérifier que (7.18) entraîne qu'on a

$$E[U^n(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \mid \mathcal{Y}_\infty] \subset E[U^n(\dot{\mathcal{X}}_- \vee \mathcal{Y}_p) \mid \mathcal{Y}_\infty] \quad \text{pour tout } n,$$

d'où l'on déduit immédiatement (7.17). ■

LEMME 7.10. — Si $\mathcal{X}$ est une RMO, alors on a

$$(7.19) \quad \left[\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)\right] \cap \mathcal{Y}_\infty^\perp = \{0\}.$$

Preuve. — Il suffit de montrer que tout λ appartenant à $(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)$ et tel que

$$(7.20) \quad U^n \lambda \in (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \cap \mathcal{Y}_\infty^\perp \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

est nécessairement nul. Sachant que $U^n \lambda$ appartient à $(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)$, la propriété de Markov de $\mathcal{X}$ entraîne que, pour tout μ dans $\mathcal{Y}_f$ [nécessairement orthogonal à $U^n \lambda$ d'après (7.20)], on a

$$(U^n \lambda, \mu) = (U^n \lambda, E^x \mu) = 0.$$

L'observabilité de $\mathcal{X}$ entraîne alors que $U^n \lambda$ est orthogonal à $\mathcal{X}$ pour tout $n \geq 0$. Puisque λ est orthogonal à $\mathcal{Y}_p$ d'après (7.20), on en déduit que λ est orthogonal à $(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)$. Il est alors clair d'après (7.20) que λ est nécessairement nul. ■

Revenons à la démonstration de la Proposition 7.8. Puisque $\dot{\mathcal{X}}$ est régulière on déduit du Lemme 7.9 qu'on a

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \subset \mathcal{Y}_{\infty}^{\perp}.$$

L'observabilité de $\mathcal{X}$ entraîne alors d'après le Lemme 7.10 que

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \{0\}$$

et par conséquent $\mathcal{X}$ est régulière. ■

Sachant que toute RMM est nécessairement inférieure au cofiltre propre $\mathcal{Y}^*$, le Théorème suivant résulte immédiatement de la Proposition 7.8.

THÉORÈME 7.11. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les RMM soient régulières est que le cofiltre propre soit régulier.*

Par dualité on obtient aisément le Corollaire suivant.

COROLLAIRE 7.12. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les RMM soient co-régulières est que le filtre propre soit co-régulier.*

REMARQUE 7.13. — On pourrait montrer que les RM régulières et co-régulières peuvent être représentées par des modèles fonctionnels du même type que ceux étudiés en Théorie des Opérateurs [SzF-2] ou en Théorie des Systèmes dans l'espace de Hilbert [Fuh-3]. Pour obtenir ces modèles on utilise la technique des représentations de Fourier des sous-espaces ambu-
lants (cf. [SzF-2]). Pour plus de détails le lecteur se reportera à [Ruc-9].

QUATRIÈME PARTIE

Cette partie réduite au chapitre VIII est consacrée à la construction de l'ensemble des Représentations Markoviennes minimales finies-dimensionnelles. Pour cela on suppose que le quadruplet $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$(H1') \quad \exists \mathcal{Y} \subset \mathcal{H} \quad \text{tel que} \quad \mathcal{Y}_p = U^{-1} \mathcal{Y}_- \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_f = \mathcal{Y}_+,$$

$$(H2) \quad \mathcal{Y}_\infty = \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Y}_f \quad \text{réduit } U,$$

$$(H3) \quad \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{Y}_p = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{Y}_f = \mathcal{Y}_\infty,$$

$$(H4) \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{Y}_p = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{Y}_f = \{0\},$$

$$(H5) \quad \mathcal{Y} \text{ est un sous-espace de dimension finie,}$$

$$(H6) \quad E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p] \text{ est un sous-espace de dimension finie.}$$

De manière à retrouver les résultats classiques on supposera en outre que $\mathcal{H}$ est *réel*. Trivialement (H1') entraîne (H2) et (H3). On remarquera que les hypothèses de cette partie sont vérifiées lorsque $\mathcal{Y}$ désigne l'espace Gaussien engendré par les coordonnées à l'instant 0 d'un processus Gaussien stationnaire à temps discret et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (p arbitraire). On montrera dans l'Annexe que ces hypothèses sont aussi satisfaites pour un processus continu à accroissements stationnaires et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ [l'interprétation de $\mathcal{Y}$ étant alors moins évidente que dans le cas discret]. On notera que (H6) est la condition nécessaire et suffisante d'existence de RMM de dimension finie établie au Corollaire 3.4.

CHAPITRE VIII

CONSTRUCTION DES REPRÉSENTATIONS MARKOVIENNES MINIMALES FINIES-DIMENSIONNELLES

Les hypothèses faites sur $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$ entraînent d'après les chapitres précédents que toutes les RMM sont régulières et finies-dimensionnelles. Pour fixer les idées on supposera dans la suite que $\mathcal{Y}$ est de dimension p et que $E[\mathcal{Y}_f | \mathcal{Y}_p]$ est de dimension q . Il est clair que dans ce cas toutes les RMM seront aussi de dimension q . Afin de simplifier les écritures on fera en outre l'hypothèse que l'innovation propre $\mathcal{J}$ est de dimension p .

Soit $Y(0)$ une base *fixée* [écrite sous forme vectorielle] de $\mathcal{Y}$; on définit alors un processus Gaussien stationnaire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ en posant

$$(8.1) \quad Y = (Y(n) = U^n Y(0), n \in \mathbb{Z}).$$

A toute base $X(0)$ [écrite sous forme vectorielle] d'une RMM $\mathcal{X}$, on associe un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ défini en translatant par U les coordonnées de X [cf. (8.1)]. D'après la Proposition 1.3 les processus X construits de cette manière en faisant varier $\mathcal{X}$ décrivent l'ensemble des RMM

de Y (au sens classique) à *valeurs dans* $\mathcal{H}$. Plus précisément un tel processus X vérifie le modèle suivant :

$$(8.2) \quad Y(n) = HX(n) + JW(n),$$

$$(8.3) \quad X(n+1) = FX(n) + LW(n),$$

où $W = (W(n), n \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc unitaire fini-dimensionnel dont les coordonnées appartiennent à $\mathcal{H}$ et (F, H, J, L) est un quadruplet de matrices de dimensions convenables avec F asymptotiquement stable.

Nous noterons $\Lambda = (\Lambda(n), n \in \mathbb{Z})$ la fonction de covariance de Y et $N = (N(t), -\pi \leq t < \pi)$ la densité spectrale de Y . Par définition on a pour tous n et m dans $\mathbb{Z}$

$$E[Y(n+m)Y'(m)] = \Lambda(n) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{int} N(t) dt.$$

Si G désigne la matrice de covariance de $X(1)$ et $Y(0)$ [cf. la Remarque 2.11], (8.2) et (8.3) entraînent que

$$(8.4) \quad \Lambda(n) = HF^{n-1}G \quad \forall n > 0,$$

ce qui apparaît comme la traduction matricielle de (2.23). Suivant la Théorie des Systèmes on dira que le triplet (F, G, H) est une *réalisation* de Λ . Il est bien connu (cf. [FCG]) que les triplets (F, G, H) associés aux RMM sont exactement les réalisations de taille minimale de Λ et sont donc tous semblables [ce qui est aussi une conséquence du Théorème 3.11]. On notera qu'il existe dans la littérature (cf. [FCG] par exemple) des procédures numériques permettant de générer un triplet (F, G, H) de taille minimale à partir de Λ .

Le but de ce chapitre est de construire l'ensemble $\mathcal{M}$ des RMM à valeurs dans $\mathcal{H}$ associées à une réalisation minimale *fixée* de Λ . On remarquera que se restreindre à $\mathcal{M}$ présente les deux avantages suivants :

a) pour toute RMM $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ il existe une matrice régulière M de dimension $(q \times q)$ et un processus $\dot{X} = (\dot{X}(n), n \in \mathbb{Z})$ appartenant à $\mathcal{M}$ tels que

$$X(n) = M\dot{X}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

b) $\mathcal{M}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des RMM géométriques.

Le premier paragraphe est consacré à approfondir la structure de $\mathcal{M}$. En particulier nous étudierons les liens entre $\mathcal{M}$ et les solutions de la forme faible du Problème de la Réalisation Stochastique.

VIII.1. Compléments sur l'ensemble $\mathcal{M}$

Soit $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ un processus quelconque de $\mathcal{M}$, notons P la matrice de covariance de $X(0)$. Sachant que $X(0)$ est clairement non dégénéré, P est définie positive. On déduit de (8.2) et (8.3) que P vérifie les trois équations suivantes :

$$(8.5) \quad \Lambda(0) - HPH' = JJ',$$

$$(8.6) \quad G - FPH' = LJ',$$

$$(8.7) \quad P - FPF' = LL'.$$

Appelons alors $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices définies positives P pour lesquelles il existe deux matrices J et L de dimensions respectives $(p \times k)$ et $(q \times k)$ [avec k arbitraire] satisfaisant aux trois équations précédentes. L'analyse complète de $\mathcal{P}$ est apparue pour la première fois dans la littérature dans [Fau-2], conduisant à la solution de la forme faible du Problème de la Réalisation Stochastique. Les liens entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M}$ sont précisés dans le Lemme suivant. Dans la suite nous dirons que le quadruplet $(\mathcal{H}, U, \mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_f)$ vérifie l'hypothèse (H7) lorsque $\mathcal{H}$ contient un sous-espace ambulant de dimension $(p + q)$.

LEMME 8.1. — *Sous l'hypothèse (H7), l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{P}$, qui à toute RMM X associe la matrice de covariance P de $X(0)$, est surjective.*

Preuve. — Si P appartient à $\mathcal{P}$, il existe un entier k et deux matrices J et L de dimensions respectives $(p \times k)$ et $(q \times k)$ tels qu'on ait

$$\begin{pmatrix} P - FPF' & G - FPH' \\ G' - HPF' & \Lambda(0) - HPH' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ J \end{pmatrix} (L'J').$$

Il est clair qu'on peut toujours supposer que k est inférieur ou égal à $(p + q)$. D'après (H7), il existe un sous-espace ambulant $\dot{\mathcal{W}}$ de dimension k dans $\mathcal{H}$. Si $\dot{W}(0)$ désigne une base orthonormale de $\dot{\mathcal{W}}$, on définit un bruit blanc unitaire $\dot{W}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ en posant $\dot{W} = (\dot{W}(n) = U^n \dot{W}(0), n \in \mathbb{Z})$. On définit un processus $\dot{Y} = (\dot{Y}(n), n \in \mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ par les équations suivantes :

$$(8.8) \quad \dot{Y}(n) = H\dot{X}(n) + J\dot{W}(n),$$

$$(8.9) \quad \dot{X}(n+1) = F\dot{X}(n) + L\dot{W}(n).$$

L'espace Gaussien $\dot{\mathcal{Y}}_\infty$ engendré par $\dot{Y}$ est clairement inclus dans $\mathcal{H}$.

Un calcul simple montre que $\dot{Y}$ a même loi que Y . Par conséquent on définit un opérateur unitaire V de $\dot{\mathcal{Y}}_\infty$ sur $\mathcal{Y}_\infty$ en posant

$$V(\dot{Y}_i(n)) = Y_i(n) \quad \forall i = (1, p); \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On peut trouver un prolongement unitaire de V (noté encore V par abus de langage) dans $\mathcal{H}$ commutant avec U . Appliquant V aux deux membres de (8.8) et (8.9), on obtient

$$\begin{aligned} Y(n) &= HX(n) + JW(n), \\ X(n+1) &= FX(n) + LW(n), \end{aligned}$$

où $W = (W(n) = V\dot{W}(n), n \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc unitaire dans $\mathbb{R}^k$. Par conséquent $X = (X(n) = V\dot{X}(n), n \in \mathbb{Z})$ est une RMM à valeurs dans $\mathcal{H}$ telle que la matrice de covariance de $X(0)$ est égale à celle de $\dot{X}(0)$, c'est-à-dire à P .

Montrons à présent comment s'exprime la *dualité* dans $\mathcal{M}$. A toute RMM X dans $\mathcal{M}$, on associe un processus $\tilde{X} = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ en posant

$$(8.10) \quad \tilde{X}(n) = P^{-1}X(-n) \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

où P désigne la covariance de $X(0)$. D'après la Proposition 1.5, X est une RMM à valeurs dans $\mathcal{H}$ du processus $\tilde{Y} = (\tilde{Y}(n) = Y(1-n), n \in \mathbb{Z})$. Remarquons alors que le triplet associé à $\tilde{X}$ est précisément (F', H', G') , ce qui justifie d'appeler $\tilde{X}$ la *RMM duale* de X .

Le reste du chapitre est consacré à construire une RMM X dans $\mathcal{M}$ associée à une matrice P de $\mathcal{P}$ [cf. le Lemme 8.1]. S'inspirant des résultats du chapitre V, il est naturel d'écrire

$$(8.11) \quad X = \hat{X} + Z,$$

où $\hat{X} = (\hat{X}(n) = U^n E[X(0) | \mathcal{Y}_p], n \in \mathbb{Z})$ est le filtre de Kalman de X et $Z = (Z(n) = U^n E[X(0) | \mathcal{Y}_p^\perp], n \in \mathbb{Z})$ est l'antifiltre de X . Dans le paragraphe suivant nous allons montrer comment construire $\hat{X}$ à partir de Y .

VIII.2. Construction de $\hat{X}$

Il est bien connu (cf. [FCG], p. 195) que $\hat{X}$ vérifie le modèle suivant

$$(8.12) \quad Y(n) = H\hat{X}(n) + I(n),$$

$$(8.13) \quad \hat{X}(n+1) = F\hat{X}(n) + KI(n),$$

où $I = (I(n), n \in \mathbb{Z})$ est le processus d'innovation de Y (cf. [KaG]) défini par

$$(8.14) \quad I(n) = U^n(Y(0) - E[Y(0) | \mathcal{Y}_p]) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que I est un bruit blanc tel que $I(0)$ est une base (non nécessairement orthonormale) de l'innovation propre $\mathcal{I}$. Dans la suite on notera R la matrice de covariance (définie positive) de $I(0)$. Dans la terminologie classique du filtrage, on appelle K la matrice de *gain de filtrage* et $F_* = F - KH$ la matrice *bouclée de filtrage*. Une littérature abondante est consacrée à la détermination de K à partir du triplet (F, G, H) et de $\Lambda(0)$. Citons l'approche passant par la résolution d'une équation de « Riccati algébrique » (cf. [Fau-2], [Ruc-3]) ou l'approche directe conduisant aux équations dites de « Chandrasekhar » (cf. [KMS], [Lin], [Ruc-1]).

Les équations (8.12) et (8.13) entraînent que

$$(8.15) \quad \widehat{X}(n+1) = F_* \widehat{X}(n) + KY(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sachant que $\widehat{X}(n)$ est non dégénéré, on peut écrire

$$(8.16) \quad \widehat{X}(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} F_*^k KY(n-k),$$

si et seulement si F_* est asymptotiquement stable. Soit la fonction matricielle $\Gamma_1(z)$ de dimensions $(p \times p)$ définie par

$$(8.17) \quad \Gamma_1(z) = (I_p + Hz(I_q - Fz)^{-1}K)R^{1/2},$$

où I_p [resp. I_q] désigne la matrice identité dans $\mathbb{R}^p$ [resp. $\mathbb{R}^q$] et où $R^{1/2}$ désigne une racine carrée de R . D'après (8.12) et (8.13) il vient que $\Gamma_1(z)$ est une factorisation de N (cf. [Roz-1]), i. e.

$$N(t) = \frac{1}{2\pi} \Gamma_1(e^{-it}) \Gamma_1^*(e^{-it}) \quad \forall t \in]\pi, \pi[$$

[Γ_1^* désignant la matrice transconjuguée de Γ_1]. On renvoie le lecteur à [Ruc-9] où on montre que $\widehat{X}$ est caractérisé par le fait que $\Gamma_1(z)$ est la factorisation *extérieure* (cf. [SzF-2]) de N .

LEMME 8.2. — *Le déterminant de $\Gamma_1(z)$ est une fonction rationnelle en z sur la sphère de Riemann $(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ dont les pôles et les zéros sont les inverses des valeurs propres de F et F_* respectivement.*

Preuve. — Sachant que $\widehat{X}$ est une RMM, il est clair que $\widehat{X}$ est une réalisation canonique du système décrit par les équations (8.12) et (8.13). Par conséquent les couples (H, F) et (F, K) sont respectivement observable et commandable. On en déduit que les pôles du déterminant de $\Gamma_1(z)$ sont exactement les inverses des valeurs propres de F (cf. [AnV], p. 111).

Si nous écrivons les équations (8.12) et (8.15) sous la forme

$$\begin{aligned} I(n) &= -H\widehat{X}(n) + Y(n), \\ \widehat{X}(n+1) &= F_*\widehat{X}(n) + KY(n), \end{aligned}$$

nous obtenons immédiatement l'inverse de $\Gamma_1(z)$:

$$(8.18) \quad \Gamma_1^{-1}(z) = R^{-1/2}[I_p - Hz(I_q - F_*z)^{-1}K].$$

Or l'observabilité de (H, F) entraîne celle de (H, F_*) (cf. [AnV], p. 91) et la commandabilité de (F, K) entraîne celle de (F_*, K) (cf. [AnV], p. 85). On en déduit alors que les pôles du déterminant de $\Gamma_1^{-1}(z)$ [donc les zéros du déterminant de $\Gamma_1(z)$] sont les inverses des valeurs propres de F_* . ■

COROLLAIRE 8.3. — *La matrice bouclée F_* est stable (i. e. ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1). En outre F_* est asymptotiquement stable si et seulement si N est coercif, i. e. s'il existe c_1 et c_2 positifs tels que*

$$(8.19) \quad c_1 I_p \leq N(t) \leq c_2 I_p \quad (12) \quad \text{pour tout } t \text{ dans } [-\pi, +\pi[.$$

Preuve. — Sachant que Γ_1 est extérieure, on en déduit que le déterminant de Γ_1 est une fonction extérieure rationnelle (cf. le Corollaire 6.3 de [SzF-2], p. 220) et n'a donc pas de zéros dans D . Le Lemme 8.2 entraîne alors que F_* est stable. L'asymptotique stabilité de F_* revient à imposer que le déterminant de Γ_1 n'a pas de zéros sur le cercle unité. Autrement dit $N(t)$ doit être inversible pour tout t dans $[-\pi, +\pi[$. Puisque $N(t)$ est rationnelle en e^{it} , cela est équivalent à la condition (8.19). ■

D'après le Théorème 3.9, toutes les RMM dans $\mathcal{M}$ ont même filtre de Kalman dont les coordonnées engendrent le filtre propre $\mathcal{Y}_*$. On remplacera donc dans la suite la notation $\widehat{X}$ par Y_* . Si P_* désigne la matrice de covariance de $Y_*(0)$, on a

$$(8.20) \quad P_* \leq P,$$

pour toute matrice P de $\mathcal{P}$. D'après le Lemme 8.1, (8.20) est en effet une conséquence immédiate de

$$(8.21) \quad Y_*(0) = E[X(0) | \mathcal{Y}_p],$$

pour toute RMM X dans $\mathcal{M}$.

Appelons $Y^* = (Y^*(n), n \in \mathbb{Z})$ le processus de $\mathcal{M}$ associé au cofiltre propre $\mathcal{Y}^*$. Montrons comment construire Y^* à partir de Y . Pour toute

(12) Soient M et $\dot{M}$ deux matrices carrées de même dimension, on écrira $M \geq \dot{M}$ si et seulement si $M - \dot{M}$ est une matrice semi-définie positive.

RMM X dans $\mathcal{M}$ dont X est la RMM duale, considérons le processus $\tilde{X} = (\tilde{X}(n), n \in \mathbb{Z})$ défini par

$$(8.22) \quad \tilde{X}(n) = U^{-n}E[\tilde{X}(0) | \mathcal{Y}_f].$$

Remarquons que $\tilde{X}$ apparaît comme le filtre de Kalman de $\tilde{X}$ par le processus $\tilde{Y} = (\tilde{Y}(n) = Y(1 - n), n \in \mathbb{Z})$. On en déduit que $\tilde{X}$ peut être construit à partir de Y de la même manière que Y_* . D'après le Théorème 3.9, $\tilde{X}$ coïncide avec la RMM duale de Y^* . Par conséquent, si P et P^* désignent les matrices de covariance de $X(0)$ et de $Y^*(0)$ respectivement, il vient d'après (8.10) que

$$(8.23) \quad (P^*)^{-1}Y^*(-n) = P^{-1}U^{-n}E[X(0) | \mathcal{Y}_f] \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

soit

$$(8.24) \quad Y^*(n) = P^*P^{-1}U^nE[X(0) | \mathcal{Y}_f].$$

On déduit de (8.23) que

$$(P^*)^{-1} \leq P^{-1},$$

d'où l'on tire

$$(8.25) \quad P \leq P^*.$$

Les relations (8.20) et (8.25) entraînent alors que, quelle que soit la matrice P de $\mathcal{P}$, on a

$$P_* \leq P \leq P^*.$$

On remarquera que cette double inégalité, mise pour la première fois en évidence par Faurre [Fau-2], peut être considérée comme la traduction algébrique de (5.12).

Introduisons alors le processus $Z_* = (Z_*(n), n \in \mathbb{Z})$ défini par

$$(8.26) \quad Z_*(n) = Y^*(n) - Y_*(n).$$

Il est clair que $Z_*(0)$ engendre l'antifiltre propre $\mathcal{Z}_*$. Le paragraphe suivant est consacré à étudier les propriétés de Z_* qu'on utilisera dans la construction des RMM dans $\mathcal{M}$.

VIII.3. Propriétés de Z_*

Montrons d'abord que Z_* est un processus de Markov de matrice de transition F_* . En fait nous allons montrer que cette propriété est vraie pour l'antifiltre de toute RMM dans $\mathcal{M}$.

LEMME 8.4. — *Pour toute RMM X dans $\mathcal{M}$, son antifiltre $Z = X - \hat{X}$ est Markovien de matrice de transition F_* .*

Preuve. — Si X est une RMM dans $\mathcal{M}$, (8.3) entraîne que

$$(8.27) \quad X(n+1) = F_* X(n) + KH X(n) + LW(n). \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

De même on déduit de (8.2) et (8.15) que

$$(8.28) \quad \widehat{X}(n+1) = F_* \widehat{X}(n) + KH X(n) + KJW(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En soustrayant membre à membre (8.28) à (8.27), on obtient

$$Z(n+1) = F_* Z(n) + (L - KJ)W(n). \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sachant que $W(n)$ est clairement orthogonal à $Z(n)$, on en déduit que Z est Markovien de matrice de transition F_* . ■

Le Lemme suivant explicitant les liens entre Z_* et le spectre de F_* est démontré de manière purement algébrique dans [FCG] (Proposition 4.19, p. 91).

LEMME 8.5. — Dans la base où F_* s'écrit sous la forme

$$(8.29) \quad F_* = \begin{pmatrix} F_*^1 & 0 \\ 0 & F_*^2 \end{pmatrix},$$

où F_*^1 est asymptotiquement stable et où F_*^2 est oscillatoire (valeurs propres de module 1), on a

$$(8.30) \quad Z_* = \begin{pmatrix} Z_*^1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où Z_*^1 est non dégénéré.

Preuve. — D'après le Lemme 8.4, la décomposition (8.29) entraîne nécessairement (8.30). Il reste donc à montrer que Z_*^1 est non dégénéré. Or on a

$$\text{rang } Z_*^1 = \dim \mathcal{Z}_* = q - \dim (\mathcal{Y}_p \cap \mathcal{Y}_f).$$

On peut montrer (cf. [Ruc-9]) que la dimension de $(\mathcal{Y}_p \cap \mathcal{Y}_f)$ est égale au nombre de zéros du déterminant de $\Gamma_1(z)$ sur le cercle unité. Il résulte alors du Lemme 8.2 que la dimension de $(\mathcal{Y}_p \cap \mathcal{Y}_f)$ est égale à la dimension de F_*^2 . Par conséquent on a

$$\text{rang } Z_*^1 = \dim F_*^1 = \dim Z_*^1,$$

qui entraîne que Z_*^1 est non dégénéré. ■

Dans la suite on désignera par Σ_* la matrice de covariance de $Z_*(0)$. D'après (8.26) on a

$$(8.31) \quad \Sigma_* = P^* - P_*.$$

Le Corollaire 8.3 et le Lemme 8.5 permettent alors d'énoncer la Proposition suivante (cf. [FCG], p. 96).

PROPOSITION 8.6. — *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (8.32) N est coercif,
 (8.33) Σ_* est définie positive,
 (8.34) F_* est asymptotiquement stable.

Pour le reste de ce chapitre on supposera pour simplifier que les conditions de la Proposition 8.6 sont satisfaites. On peut construire Z_* directement à partir de Y , sans passer par (8.26). Pour cela on remarque que $\mathcal{Z}_*$ est inclus dans $\mathcal{Y}_p^0 = \mathcal{J}_+$. Par conséquent on peut écrire

$$(8.35) \quad Z_*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} E[Z_*(n) | I(n+k)] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Or on a pour tout n

$$(8.36) \quad Y(n) = HY_*(n) + I(n) = HY^*(n) + I^*(n),$$

où $I^* = (I^*(n) = U^n I^*(0), n \in \mathbb{Z})$ est associé à l'innovation du cofiltre propre $\mathcal{J}^*$ [$I^*(0)$ est une base orthonormale de $\mathcal{J}^*$]. On déduit de (8.36) que

$$(8.37) \quad I(n) = HZ_*(n) + I^*(n). \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sachant que $\mathcal{Z}_*$ est orthogonal à $\mathcal{J}_+^*$, (8.37) entraîne que (8.35) s'écrit sous la forme

$$Z_*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} E[Z_*(n)Z'_*(n+k)]H'R^{-1}I(n+k) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

D'après le Lemme 8.4, Z_* est Markovien de matrice de transition F_* et par conséquent

$$(8.38) \quad Z_*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \Sigma_* F_*'^k H'R^{-1}I(n+k) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Introduisons alors le processus $\tilde{Z}_* = (\tilde{Z}_*(n), n \in \mathbb{Z})$ défini par

$$(8.39) \quad \tilde{Z}_*(n) = \Sigma_*^{-1} Z_*(-n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que

$$(8.40) \quad \tilde{Z}_*(n) = F_*' \tilde{Z}_*(n-1) + H'R^{-1}I(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

d'où il résulte que $\tilde{Z}_*$ est un processus de Markov de matrice de transition F_*' qu'on peut construire à partir de Y [puisque l'innovation peut être générée en utilisant (8.36)]. En prenant les covariances des deux membres de (8.40) on obtient (cf. [FCG], p. 95)

$$(8.41) \quad \Sigma_*^{-1} - F_*' \Sigma_*^{-1} F_* = H'R^{-1}H,$$

qui permet de calculer directement Σ_* sans passer par (8.31).

REMARQUE 8.7. — La relation (8.40) entraîne que

$$(8.42) \quad E[\tilde{Z}_*(0) \mid \mathcal{Y}_p^0] = F'_* \tilde{Z}_*(0),$$

d'où l'on déduit que la matrice de $S^* \mid \mathcal{Z}_*$ relative à la base $\tilde{Z}_*(0)$ de $\mathcal{Z}_*$ coïncide avec la matrice bouclée de filtrage F_* .

Nous sommes maintenant en mesure de reprendre le problème formulé à la fin du paragraphe VIII.1, à savoir construire une RMM X dans $\mathcal{M}$ associée à une matrice P donnée de $\mathcal{P}$. D'après (8.11) on a

$$(8.43) \quad X = Y_* + Z,$$

et il ne reste plus qu'à construire Z . Appelons Σ la matrice de covariance de $Z(0)$, qui vérifie d'après (8.43)

$$(8.44) \quad \Sigma = P - P_*.$$

Par raison de simplicité nous allons nous contenter dans la suite de construire Z , donc X , dans les deux cas principaux suivants :

a) Z est *non dégénéré* (i. e. Σ est définie positive) ce qui va faire l'objet du paragraphe suivant;

b) X est *interne* (i. e. $\mathcal{Z}$ est inclus dans $\mathcal{Y}_\infty$) ce qui fera l'objet du paragraphe VIII.5.

VIII.4. Construction des RMM à antifiltre non dégénéré

A tout antifiltre non dégénéré Z , on associe le processus $\tilde{Z} = (\tilde{Z}(n), n \in \mathbb{Z})$ défini par

$$(8.44) \quad \tilde{Z}(n) = \Sigma^{-1} Z(-n) \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

où Σ désigne la matrice de covariance de $Z(0)$. D'après la Proposition 5.4, $\mathcal{Z}$ est inclus dans $\mathcal{Z}_* \oplus \mathcal{Y}_\infty^\perp$, d'où il vient que

$$(8.45) \quad \tilde{Z}(0) = E[\tilde{Z}(0) \mid \mathcal{Z}_*] + E[\tilde{Z}(0) \mid \mathcal{Y}_\infty^\perp].$$

LEMME 8.8.

$$E[\tilde{Z}(0) \mid \mathcal{Z}_*] = \tilde{Z}_*(0).$$

Preuve. — Il suffit de montrer que

$$(8.46) \quad E[\tilde{Z}(0)\tilde{Z}'_*(0)] = E[\tilde{Z}_*(0)\tilde{Z}'_*(0)].$$

Par définition de $\tilde{Z}$ et $\tilde{Z}_*$, (8.46) équivaut à

$$(8.47) \quad E[Z(0)Z'_*(0)] = \Sigma,$$

autrement dit

$$(8.48) \quad E[X(0)(Y^*(0) - Y_*(0))'] = \Sigma.$$

Or les relations (8.21) et (8.24) entraînent respectivement que

$$E[X(0)Y_*'(0)] = P_* \quad \text{et} \quad E[X(0)Y^{*'}(0)] = P,$$

d'où l'on déduit immédiatement (8.48). ■

Introduisons alors le processus $R = (R(n), n \in \mathbb{Z})$ défini par

$$(8.49) \quad R(n) = U^n E[\tilde{Z}(0) | \mathcal{Y}_\infty^\perp].$$

En traduisant par U^n les deux membres de (8.45), on obtient d'après le Lemme 8.8 que

$$(8.50) \quad \tilde{Z}(n) = \tilde{Z}_*(n) + R(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La Proposition 5.4 implique alors que R est un processus de Markov ayant même matrice de transition que $\tilde{Z}_*$. D'après (8.40) R est donc un processus de Markov de matrice de transition F_*' . Par conséquent on a

$$(8.51) \quad R(n) = F_*' R(n-1) + W_r(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

où $W_r = (W_r(n) = U^n W_r(0), n \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc externe⁽¹³⁾. Notons respectivement Σ_r et A la matrice de covariance de $R(0)$ et de $W_r(0)$. En prenant les covariances dans (8.51) on obtient la relation suivante :

$$(8.52) \quad \Sigma_r - F_*' \Sigma_r F_* = A.$$

On déduit de (8.49) que

$$(8.53) \quad \Sigma^{-1} = \Sigma_*^{-1} + \Sigma_r.$$

En regroupant les relations (8.41), (8.52) et (8.53) il vient que Σ vérifie

$$(8.54) \quad \Sigma^{-1} - F_*' \Sigma^{-1} F_* = H' R^{-1} H + A.$$

Le Théorème suivant détermine l'ensemble des RMM dans $\mathcal{M}$ à antifiltre non dégénéré. Pour simplifier l'énoncé on s'est placé dans le cadre de l'hypothèse (H7).

THÉORÈME 8.9. — *Toutes les RMM $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ dans $\mathcal{M}$ à antifiltre non dégénéré s'obtiennent par la formule :*

$$(8.55) \quad \begin{aligned} X(n) &= Y_*(n) + \Sigma \Sigma_*^{-1} Z_*(n) + \Sigma R(-n), \\ &= (I_q - \Sigma \Sigma_*^{-1}) Y_*(n) + \Sigma \Sigma_*^{-1} Y^*(n) + \Sigma R(-n), \end{aligned}$$

⁽¹³⁾ On dira dans la suite qu'un processus est *externe* lorsque l'espace Gaussien engendré est inclus dans $\mathcal{Y}_\infty^\perp$.

où Σ et $R = (R(n), n \in \mathbb{Z})$ vérifient les conditions suivantes :

a) Σ est une matrice définie positive ($q \times q$) telle qu'il existe une matrice A semi-définie positive ($q \times q$) satisfaisant à

$$(8.56) \quad \Sigma^{-1} - F'_* \Sigma^{-1} F_* = H' R^{-1} H + A ;$$

b) R est un processus de Markov défini par

$$(8.57) \quad R(n) = F'_* R(n-1) + W_r(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

où $W_r = (W_r(n), n \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc externe dont U translate les coordonnées et dont la matrice de covariance à l'instant 0 est égale à A .

Preuve. — Si X est une RMM dans $\mathcal{M}$ à antifiltre non dégénéré, le Théorème découle de ce qui précède en prenant Σ égal à la matrice de covariance à l'instant 0 de l'antifiltre de X [la relation (8.55) étant une conséquence triviale de (8.43) et de (8.50)]. Réciproquement soit A une matrice quelconque ($q \times q$) semi-définie positive. Remarquons que (8.56) définit une matrice Σ définie positive. En outre, si k désigne le rang de A , l'hypothèse (H7) entraîne l'existence d'un sous-espace de dimension k , $\mathcal{W}_r$, ambulant dans $\mathcal{Y}_\infty^\perp$. On peut donc trouver un vecteur $W_r(0)$ de dimension k engendrant $\mathcal{W}_r$ et de matrice de covariance A . Par translation $W_r(0)$ donne naissance à un bruit blanc externe $W_r = (W_r(n) = U^n W_r(0), n \in \mathbb{Z})$. La relation (8.57) définit alors un processus de Markov R de matrice de transition F'_* et dont la matrice de covariance Σ_r à l'instant 0 vérifie (8.52). Soit maintenant $\tilde{Z} = (\tilde{Z}(n), n \in \mathbb{Z})$ le processus défini par (8.49). L'espace Gaussien $\mathcal{Z}$ engendré par $\tilde{Z}(0)$ satisfait aux conditions de la Proposition 5.4, d'où l'on déduit que le processus $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ défini par (8.55) est une RMM. En outre X appartient à $\mathcal{M}$ puisque le triplet d'opérateurs associé (F, G, H) est le même que celui de Y_* . ■

REMARQUE 8.10. — Il est clair que la matrice Σ intervenant dans la formule (8.56) est nécessairement la matrice de covariance à l'instant 0 de l'antifiltre de X . On notera aussi que la relation (8.56) est apparue pour la première fois dans la littérature dans [Fau-2] comme paramétrisation de l'ensemble $\mathcal{P}$.

VIII.5. Construction des RMM internes

D'après le Corollaire 5.5 les RMM $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ internes dans $\mathcal{M}$ s'obtiennent par

$$(8.58) \quad X(n) = Y_*(n) + Z(n),$$

où l'espace Gaussien $\mathcal{Z}$ engendré par $Z(0)$ est un sous-espace de $\mathcal{Z}_*$ invariant par S^* .

Soit Σ la matrice de covariance de $Z(0)$. D'après la relation (8.47) [qui reste vraie même lorsque Σ n'est pas définie positive], $\mathcal{Z}$ est un sous-espace de $\mathcal{Z}_*$ si et seulement si on a

$$(8.59) \quad Z(0) = \Sigma \Sigma_*^{-1} Z_*(0).$$

Posons alors

$$(8.60) \quad \Pi = \Sigma \Sigma_*^{-1}.$$

Par translation (8.59) entraîne que

$$(8.61) \quad Z(n) = \Pi Z_*(n). \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

En prenant les covariances dans (8.59), il vient que

$$(8.62) \quad \Sigma = \Sigma \Sigma_*^{-1} \Sigma,$$

d'où l'on déduit que

$$(8.63) \quad \Pi = \Pi^2.$$

Par conséquent Π est une matrice de projection dans $\mathbb{R}^q$. En outre (8.60) entraîne que $\Pi \Sigma_*$ est nécessairement symétrique, c'est-à-dire

$$(8.64) \quad \Pi \Sigma_* = \Sigma_* \Pi'.$$

Il reste à exprimer la condition que $\mathcal{Z}$ est invariant par S^* , ce qui fait l'objet du Lemme suivant.

LEMME 8.11. — *Avec les notations précédentes, $\mathcal{Z}$ est invariant par S^* si et seulement si on a*

$$(8.65) \quad F_* \Pi = \Pi F_* \Pi.$$

Preuve. — Utilisant (8.63), on vérifie aisément que le vecteur $(I_q - \Pi)Z_*(0)$ engendre l'espace $\mathcal{Z}_* \ominus \mathcal{Z}$. Par conséquent $\mathcal{Z}$ sera invariant par S^* si et seulement si on a

$$(8.66) \quad (I_q - \Pi)Z_*(0) \perp E[Z(-1) | \mathcal{Y}_p^0].$$

Les relations (8.61) et (8.38) impliquent alors

$$E[Z(-1) | \mathcal{Y}_p^0] = \Pi E[Z_*(-1) | \mathcal{Y}_p^0] = \Pi \Sigma_* F'_* \Sigma_*^{-1} Z_*(0),$$

d'où l'on déduit que (8.66) équivaut à

$$(8.67) \quad (I_q - \Pi)F_* \Sigma_* \Pi' = 0_q$$

[0_q désigne la matrice ($q \times q$) dont tous les éléments sont nuls]. D'après

(8.64) il est clair que les relations (8.65) et (8.67) sont équivalentes, ce qui termine la démonstration du Lemme. ■

THÉORÈME 8.12. — *Toutes les RMM $X = (X(n), n \in \mathbb{Z})$ dans $\mathcal{M}$ internes s'obtiennent par*

$$(8.68) \quad \begin{aligned} X(n) &= Y_*(n) + \Pi Z_*(n), \\ &= (I_q - \Pi)Y_*(n) + \Pi Y^*(n), \end{aligned}$$

où Π est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^q$ sur un espace invariant de F_* , soit E , parallèlement à l'espace $\Sigma_* E^\perp$ ($E^\perp$ désignant l'orthogonal de E dans $\mathbb{R}^q$ pour le produit scalaire euclidien).

Preuve. — En vertu de ce qui précède on a juste à vérifier que les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} i) & \quad \Pi = \Pi^2, \\ ii) & \quad \Pi \Sigma_* = \Sigma_* \Pi', \\ iii) & \quad F_* \Pi = \Pi F_* \Pi, \end{aligned}$$

caractérisent la classe des matrices de projection ayant les propriétés énoncées dans le Théorème. ■

REMARQUE 8.13. — On déduit du Théorème 8.12 que, lorsque F_* est asymptotiquement stable, il y a autant de RMM internes dans $\mathcal{M}$ que de sous-espaces invariants de F_* . Dans le cas général on pourrait montrer qu'il y a autant de RMM internes dans $\mathcal{M}$ que de sous-espaces invariants de F_*^1 , partie asymptotiquement stable de F_* .

Suivant la terminologie classique, on dira qu'une matrice M de dimensions $(q \times q)$ est *cyclique* s'il existe un vecteur x dans $\mathbb{R}^q$ tel que les vecteurs $(M^n x, n \geq 0)$ engendrent $\mathbb{R}^q$. Il est bien connu (cf. [SzF-1]) que M est cyclique si et seulement si, dans la décomposition de Jordan de M , il n'existe pas deux blocs de Jordan associés à une même valeur propre de M . Utilisant les résultats de [SzF-1], il est facile de montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M ait un nombre fini de sous-espaces invariants est que M soit cyclique. On en déduit alors la

PROPOSITION 8.14. — *Il y a un nombre fini de RMM internes dans $\mathcal{M}$ si et seulement si F_* est une matrice cyclique.*

Comme conséquence de la Proposition 8.14, les processus scalaires à spectre rationnel n'ont qu'un nombre fini de RMM internes. En effet la

commandabilité du couple (F_*, K) [cf. le Lemme 8.2] s'exprime par

$$\text{rang}(K, F_*K, F_*^2K, \dots) = q,$$

ce qui entraîne la cyclicité de F_* . On en déduit que le nombre de RMM internes dans $\mathcal{M}$ est minoré par 1 (auquel cas F_* est purement oscillatoire) et majoré par 2^q (auquel cas toutes les valeurs propres de F_* sont réelles et distinctes).

ANNEXE

REPRÉSENTATIONS MARKOVIENNES DES PROCESSUS CONTINUS

Le but de cette annexe est essentiellement de montrer comment ramener l'étude des Représentations Markoviennes d'un processus Gaussien fini-dimensionnel $Y = (Y(t), t \in \mathbb{R})$ à accroissements centrés stationnaires dans le cadre géométrique développé dans ce travail.

On rappelle qu'un processus $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ est une RM de Y lorsqu'il vérifie le modèle suivant :

$$(a.1) \quad dY(t) = CX(t)dt + DdB(t),$$

$$(a.2) \quad dX(t) = AX(t)dt + EdB(t),$$

où $B = (B(t), t \in \mathbb{R})$ est un processus de Wiener standard fini-dimensionnel et (A, C, D, E) est un quadruplet de matrices de dimensions convenables avec A ayant toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative.

Le paragraphe A.1 est consacré à donner une formulation géométrique équivalente au modèle décrit par les équations (a.1) et (a.2). On notera la grande analogie avec le paragraphe I.2. Dans le paragraphe A.2 on montrera comment ramener cette formulation géométrique dans notre cadre Hilbertien abstrait. Pour cela nous aurons besoin de certains éléments de la Théorie des groupes continus d'opérateurs unitaires (cf. [LaP], [SzF-2] par exemple) que nous rappelons ci-dessous.

Soit $(U(t), t \in \mathbb{R})$ un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$. Le générateur infinitésimal G du groupe est un opérateur à domaine dense dans $\mathcal{H}$ défini par

$$(a.3) \quad G = \lim_{t \downarrow 0+} \frac{U(t) - I}{t},$$

I désignant l'opérateur identité dans $\mathcal{H}$. On définit le *cogénérateur* U du semi-groupe comme la transformée de Cayley de G , soit

$$(a.4) \quad U = (G + I)(G - I)^{-1}.$$

On a alors les résultats suivants :

— U est unitaire dans $\mathcal{H}$. On peut écrire U directement en fonction du groupe $(U(t), t \in \mathbb{R})$:

$$(a.5) \quad U = I - 2 \int_0^\infty e^{-t} U(t) dt,$$

de même

$$(a.6) \quad U^{-1} = I - 2 \int_0^\infty e^{-t} U(-t) dt.$$

En outre pour tout opérateur unitaire U dans $\mathcal{H}$ il existe un groupe d'opérateurs unitaires $(U(t), t \in \mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}$ dont U est le cogénérateur si et seulement si I n'est pas une valeur propre de U .

— Pour tout sous-espace $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$, on a

$$(a.7) \quad \bigvee_{t \geq 0} U(t)\mathcal{G} = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathcal{G},$$

$$(a.8) \quad \bigvee_{t \leq 0} U(t)\mathcal{G} = \bigvee_{n=-\infty}^0 U^n \mathcal{G}.$$

— Pour tout sous-espace $\mathcal{G}$ invariant par les $(U(t), t \leq 0)$ [donc par U^{-1} d'après (a.6)] on a

$$(a.9) \quad \bigcap_{t \leq 0} U(t)\mathcal{G} = \bigcap_{n=-\infty}^0 U^n \mathcal{G}.$$

A.1. Formulation géométrique équivalente

Soit $Y = (Y(t), t \in \mathbb{R})$ le processus Gaussien du modèle décrit par les équations (a.1) et (a.2), on définit les espaces Gaussiens « accroissements passés » $\mathcal{Y}_p$ et « accroissements futurs » $\mathcal{Y}_f$ par

$$(a.10) \quad \mathcal{Y}_p = \sigma(Y(t) - Y(s), s \leq t \leq 0),$$

$$(a.11) \quad \mathcal{Y}_f = \sigma(Y(t) - Y(s), t \geq s \geq 0).$$

Comme dans le cas discret l'espace Gaussien $\mathcal{Y}_\infty$ engendré par les accroissements de Y vérifie

$$(a.12) \quad \mathcal{Y}_\infty = \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Y}_f.$$

Sachant que Y est un processus à accroissements stationnaires et à trajectoires continues, il existe (cf. [Mas]) un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires $(U_1(t), t \in \mathbb{R})$ de $\mathcal{Y}_\infty$ dans lui-même tel que

$$(a.13) \quad U_1(t)[Y(v) - Y(u)] = Y(v+t) - Y(u+t).$$

Il est clair que, pour tout t non négatif, on a

$$(a.14) \quad U_1(-t)\mathcal{Y}_p \subset \mathcal{Y}_p \quad \text{et} \quad U_1(t)\mathcal{Y}_f \subset \mathcal{Y}_f.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace Gaussien muni d'un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires $(U(t), t \in \mathbb{R})$. Suivant la terminologie adoptée dans le cas discret on dira que $\{\mathcal{H}, (U(t), t \in \mathbb{R})\}$ est une dilatation de $\{\mathcal{Y}_\infty, (U_1(t), t \in \mathbb{R})\}$ si $\mathcal{Y}_\infty$ est un sous-espace de $\mathcal{H}$ réduisant tous les $U(t)$ et si, pour tout t , $U_1(t)$ coïncide avec la restriction de $U(t)$ à $\mathcal{Y}_\infty$. Pour tout sous-espace $\mathcal{G}$ de $\mathcal{H}$ on posera

$$(a.15) \quad \mathcal{G}_- = \bigvee_{t \leq 0} U(t)\mathcal{G} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_+ = \bigvee_{t \geq 0} U(t)\mathcal{G}.$$

PROPOSITION a.1. — *Un processus $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ est une RM si et seulement si il existe une dilatation $\{\mathcal{H}, (U(t), t \in \mathbb{R})\}$ de $\{\mathcal{Y}_\infty, (U_1(t), t \in \mathbb{R})\}$ telle que $X(t) = U(t)X(0)$ pour tout t et que l'espace Gaussien $\mathcal{X}$ engendré par les coordonnées de $X(0)$ vérifie les conditions suivantes :*

$$(a.16) \quad \mathcal{X} \text{ est un sous-espace de dimension finie de } \mathcal{H},$$

$$(a.17) \quad \bigcap_{t \in \mathbb{R}} U(t)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \{0\},$$

$$(a.18) \quad (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \perp (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \mid \mathcal{X}.$$

Preuve :

a) CONDITION NÉCESSAIRE

Soit X une RM satisfaisant aux équations (a.1) et (a.2). On note $\mathcal{H}$ l'espace Gaussien engendré par les accroissements de B . Il est clair que (a.16) est vérifié. Sachant que B est un processus continu à accroissements stationnaires, il existe un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires $(U(t), t \in \mathbb{R})$ translatant les coordonnées des accroissements de B . Les équations (a.1) et (a.2) entraînent que $\{\mathcal{H}, (U(t), t \in \mathbb{R})\}$ est bien une dilatation de $\{\mathcal{Y}_\infty, (U_1(t), t \in \mathbb{R})\}$. En outre on a les relations suivantes :

$$(a.19) \quad \mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p \subset \sigma(B(t) - B(s), s \leq t \leq 0),$$

$$(a.20) \quad \mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f \subset \mathcal{X} \oplus \sigma(B(t) - B(s), t \geq s \geq 0).$$

Les accroissements de B étant indépendants, on déduit de (a.19) et (a.20) les relations (a.17) et (a.18).

b) CONDITION SUFFISANTE

Soit $\{\mathcal{H}, (U(t), t \in \mathbb{R})\}$ une dilatation de $\{\mathcal{Y}_\infty, (U_1(t), t \in \mathbb{R})\}$ et $\mathcal{X}$ un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}$ vérifiant (a.17) et (a.18). Notons $X(0)$ une base quelconque (écrite sous forme vectorielle) de $\mathcal{X}$ supposé de dimension q . On définit un processus stationnaire X de dimension q en posant

$$X = (X(t) = U(t)X(0), t \in \mathbb{R}).$$

Considérons alors le processus Gaussien $Z = (Z(t), t \geq 0)$ de dimension $(p + q)$ défini par

$$(a.21) \quad Z(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) - Y(0) \end{pmatrix}.$$

Montrons que Z est Markovien par rapport à la filtration croissante de sous-espaces $\{U(t)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p), t \geq 0\}$. Plus précisément on a le

LEMME a.2. — Pour tous s et t positifs on a

$$(a.22) \quad E[Z(t + s) \mid U(s)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] = \exp(Qt)Z(s),$$

avec

$$(a.23) \quad Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

où A est une matrice $(q \times q)$ dont les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative et où C est une matrice $(p \times q)$ quelconque (0 désignant une matrice à éléments nuls de dimensions convenables).

Preuve du Lemme a.2. — Il est clair que, pour tout t positif, les coordonnées de $Z(t)$ appartiennent à $U(t)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)$. En outre (a.18) assure l'existence, pour tout t positif, de matrices $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ de dimensions respectives $(q \times q)$ et $(p \times q)$ telles que, pour tout s positif, on a

$$(a.24) \quad E[X(t + s) \mid U(s)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] = Q_1(t)X(s),$$

$$(a.25) \quad E[Y(t + s) - Y(0) \mid U(s)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] = Q_2(t)X(s) + (Y(s) - Y(0)).$$

Posons alors

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & 0 \\ Q_2(t) & I_p \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$E[Z(t+s) \mid U(s)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] = Q(t)Z(s),$$

d'où il résulte que Z est Markovien pour la filtration croissante $\{U(t)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p), t \geq 0\}$. Il est bien connu (cf. [Man]) que la famille $(Q(t), t \geq 0)$ forme alors un semi-groupe de matrices dépendant continûment de t . Il existe donc une matrice Q de la forme (a.23) telle que

$$(a.26) \quad Q(t) = \exp(Qt).$$

Or la relation (a.24) donne par translation

$$E[X(0) \mid U(-t)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p)] = U(t)Q_1(t)X(0),$$

d'où l'on déduit, d'après (a.17), que

$$Q_1(t)X(0) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \uparrow \infty.$$

Sachant que $X(0)$ est non dégénéré, il vient que les valeurs propres de A sont nécessairement à partie réelle strictement négative. ■

Reprenons la démonstration de la Proposition a.1. On définit alors le processus $M = (M(t), t \geq 0)$ par

$$(a.27) \quad M(t) = \exp(-Qt)Z(t).$$

D'après (a.22) il est clair que M est une martingale Gaussienne (cf. [Nev-2]) adaptée à la filtration $\{U(t)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p), t \geq 0\}$. Considérons alors le processus $W = (W(t), t \geq 0)$ défini (à une constante additive près) par l'équation différentielle stochastique

$$(a.28) \quad dW(t) = \exp(Qt)dM(t).$$

D'après [Nev-2], W est une martingale Gaussienne. Utilisant la relation (a.27) on obtient

$$(a.29) \quad dW(t) = -QZ(t)dt + dZ(t).$$

On déduit de (a.29) que W est une martingale Gaussienne à accroissements stationnaires. Par conséquent il existe un processus de Wiener standard $B = (B(t), t \geq 0)$ de dimension k [inférieure ou égale à $(p+q)$] tel que

$$(a.30) \quad dW(t) = \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} dB(t),$$

avec D et E étant deux matrices quelconques de dimensions respectives $(p \times k)$ et $(q \times k)$. Il résulte alors des relations (a.23), (a.29) et (a.30) que, pour tout t positif, on a

$$\begin{aligned} dY(t) &= CX(t)dt + DdB(t), \\ dX(t) &= AX(t)dt + EdB(t). \end{aligned}$$

En translatant par $U(t)[t \leq 0]$, on obtient les équations (a.1) et (a.2). ■

A.2. Équivalence des modèles géométriques discret et continu

Soit $\{\mathcal{H}, (U(t), t \in \mathbb{R})\}$ une dilatation de $\{\mathcal{Y}_\infty, (U_1(t), t \in \mathbb{R})\}$ et $\mathcal{X}$ un sous-espace de $\mathcal{H}$ vérifiant les conditions de la Proposition a.1. Notons U le cogénérateur du groupe $(U(t), t \in \mathbb{R})$. Les relations (a.7) et (a.8) entraînent que

$$(a.31) \quad U^{-1}\mathcal{Y}_p \subset \mathcal{Y}_p \quad \text{et} \quad U\mathcal{Y}_f \subset \mathcal{Y}_f.$$

En outre $\mathcal{X}_+$ et $\mathcal{X}_-$ vérifient les relations :

$$(a.32) \quad \mathcal{X}_- = \bigvee_{n=-\infty}^0 U^n \mathcal{X} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_+ = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathcal{X}.$$

Enfin on déduit de (a.9) que

$$(a.33) \quad \bigcap_{t \in \mathbb{R}} U(t)(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p).$$

Par conséquent, si U_1 désigne le cogénérateur du groupe d'opérateurs unitaires $(U_1(t), t \in \mathbb{R})$ défini par (a.14), on peut énoncer la

PROPOSITION a.3. — *Un processus $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ est une RM si et seulement si il existe une dilatation $(\mathcal{H}, U)$ de $(\mathcal{Y}_\infty, U_1)$ vérifiant les conditions suivantes :*

- i) 1 n'est pas valeur propre de U ;
- ii) le groupe d'opérateurs unitaires $(U(t), t \in \mathbb{R})$ dont U est le cogénérateur est tel que

$$X(t) = U(t)X(0) \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

- iii) L'espace Gaussien $\mathcal{X}$ engendré par $X(0)$ est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}$ tel que

$$(a.34) \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) = \{0\},$$

$$(a.35) \quad (\mathcal{X}_+ \vee \mathcal{Y}_f) \perp (\mathcal{X}_- \vee \mathcal{Y}_p) \mid \mathcal{X},$$

où $\mathcal{X}_-$ et $\mathcal{X}_+$ sont définis par (a.32).

On remarquera que la condition i) est nécessaire pour assurer l'existence d'un groupe d'opérateurs unitaires $(U(t), t \in \mathbb{R})$ dont U soit le cogénérateur. A cette légère différence près on constate donc que les modèles géométriques discret et continu sont équivalents.

Pour terminer montrons que l'hypothèse (H1') est vérifiée par tout processus Gaussien fini-dimensionnel $Y = (Y(t), t \in \mathbb{R})$ à accroissements centrés stationnaires. D'après [Mas], l'intégrale stochastique

$$(a.36) \quad M = \int_0^\infty e^{-t}(Y(t) - Y(0))dt$$

existe et définit un vecteur dont les coordonnées appartiennent à $\mathcal{Y}_f$ [cf. (a.11)]. On définit $\mathcal{Y}$ comme l'espace Gaussien engendré par les coordonnées de M . On a alors la

PROPOSITION a.4. — *Si U_1 désigne le cogénérateur du groupe d'opérateurs unitaires $(U_1(t), t \in \mathbb{R})$ associés à Y et si $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{Y}_f$ désignent les espaces accroissements passés et futurs respectivement, alors on a*

$$(a.37) \quad \mathcal{Y}_p = U_1^{-1}\mathcal{Y}_- \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_f = \mathcal{Y}_+,$$

où $\mathcal{Y}_-$ et $\mathcal{Y}_+$ sont définis comme en (a.32).

Preuve. — D'après Masani ([Mas], p. 14), Y admet la représentation suivante

$$(a.38) \quad Y(t) - Y(s) = \left[U_1(t) - U_1(s) - \int_s^t U_1(u)du \right](M).$$

Par définition de $\mathcal{Y}_f$, (a.38) entraîne immédiatement que

$$\mathcal{Y}_f \subset \bigvee_{t \geq 0} U_1(t)\mathcal{Y}.$$

Sachant que $\mathcal{Y}$ est inclus dans $\mathcal{Y}_f$, on en déduit que

$$\mathcal{Y}_f = \bigvee_{t \geq 0} U_1(t) \mathcal{Y}.$$

En appliquant (a.7) il vient que $\mathcal{Y}_f^\dagger = \mathcal{Y}_+$. D'après le Lemme a.5 ci-dessous on a

$$U_1^{-1}(M) = - \int_0^\infty e^{-t} (Y(-t) - Y(0)) dt,$$

et par conséquent on peut appliquer ce qui précède au processus retourné $(Y(-t), t \in \mathbb{R})$. On obtient alors

$$\bigvee_{t \leq 0} U_1(t) [U_1^{-1}(\mathcal{Y})] = \mathcal{Y}_p,$$

qui, d'après (a.8), entraîne que

$$\mathcal{Y}_p = U_1^{-1} \mathcal{Y}_-.$$

LEMME a.5. —

$$U_1^{-1}(M) = - \int_0^\infty e^{-t} (Y(-t) - Y(0)) dt.$$

Preuve. — Désignons par $\{E(\lambda), -\infty < \lambda < \infty\}$ la résolution de l'identité associée au groupe $(U_1(t), t \in \mathbb{R})$ par le Théorème de Stone (cf. [RiS], p. 378), soit

$$U_1(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} E(d\lambda) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'après (a.38) on a

$$(a.39) \quad Y(t) - Y(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{i\lambda} (i\lambda - 1) E(d\lambda) M.$$

Utilisant (a.39), on a tous calculs faits

$$\int_0^\infty e^{-t} (Y(-t) - Y(0)) dt = - \int_{\mathbb{R}} \frac{i\lambda - 1}{i\lambda + 1} E(d\lambda) M.$$

Mais (a.4) entraîne que U_1^{-1} peut s'écrire

$$U_1^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{i\lambda - 1}{i\lambda + 1} E(d\lambda)$$

et par conséquent on a bien

$$U_1^{-1}(M) = - \int_0^\infty e^{-t} (Y(-t) - Y(0)) dt.$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Aka-1] H. AKAIKE, Stochastic theory of minimal realizations. *I. E. E. Trans. Automatic Control*, AC-19, 1974, p. 667-674.
- [Aka-2] H. AKAIKE, Markovian representation of stochastic processes by canonical variables. *S. I. A. M. J. Control.*, t. 13, 1975, p. 162-173.
- [And] B. D. O. ANDERSON, The inverse problem of stationary covariance generation. *J. Statistical Physics*, t. 1, 1969, p. 133-147.

- [AnK] B. D. O. ANDERSON et T. KAILATH, Forwards, backwards and dynamically reversible Markovian models of second order processes. *Proc. 1978 I. E. E. International Symposium on Circuits and Systems*, New York, p. 981-986.
- [AnV] B. D. O. ANDERSON et S. VONGPANITLERD, *Network analysis and synthesis. A modern System Theory approach*, Prentice-Hall, New Jersey, 1973.
- [BaB] J. S. BARAS et R. W. BROCKETT, H^2 -functions and infinite dimensional realization theory. *S. I. A. M. J. Control*, t. 13, 1975, p. 221-241.
- [BaD] J. S. BARAS et P. DEWILDE, Invariant subspace methods in linear multivariable-distributed systems and lumped-distributed network synthesis. *Proc. I. E. E. E.*, t. 64, 1976, p. 160-178.
- [BBF] J. S. BARAS, R. W. BROCKETT et P. A. FUHRMANN, State-space model for infinite dimensional systems. *I. E. E. E. Trans. Automatic Control*, AC-19, 1974, p. 693-700.
- [Ben] A. BENSOUSSAN, *Filtrage optimal des systèmes linéaires*, Dunod, Paris, 1971.
- [Bir] G. BIRKHOFF, Lattice theory. *Amer. Math. Soc.*, Coll. Publ., vol. 25, Providence, Rhode Island, 1948.
- [BIG] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, *Markov processes and potential theory*, Academic Press, New York, 1968.
- [BoJ] G. E. P. BOX et G. M. JENKINS, *Time series analysis: forecasting and control*, Holden Day, San Francisco, 1976.
- [Bro] R. W. BROCKETT, *Finite dimensional linear systems*, J. Wiley and Sons, New York, 1970.
- [Cas] J. L. CASTI, Dynamical systems and their applications: Linear theory. *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 135, Academic Press, New York, 1977.
- [Che] C. T. CHEN, *Introduction to linear system theory*. H. R. W. Series in Electrical Engineering, Electronics and Systems, Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [CuP] R. F. CURTAIN et A. J. PRITCHARD, Infinite dimensional linear systems theory. *Lecture notes in Control and Information Science*, vol. 8, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [Dav] M. C. DAVIS, Factoring the spectral matrix. *I. E. E. E. Trans. Automatic Control*, AC-8, 1963, p. 296-305.
- [Doo-1] J. L. DOOB, The elementary Gaussian processes. *Annals of Math. Stat.*, t. 15, 1944, p. 229-282.
- [Doo-2] J. L. DOOB, *Stochastic processes*, J. Wiley and Sons, New York, 1953.
- [DSS] R. G. DOUGLAS, H. S. SHAPIRO et A. L. SHIELDS, Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. 20, 1970, p. 37-76.
- [Dun] T. E. DUNCAN, *A geometric approach to linear control and estimation* (à paraître).
- [DuS] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, vol. 1, Interscience, New York, 1957.
- [DyM] H. DYM et H. P. MCKEAN, *Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem*, Academic Press, New York, 1976.
- [Fau-1] P. FAURRE, *Representation of stochastic processes*, Ph. D. Dissertation, Stanford University, February 1967.
- [Fau-2] P. FAURRE, Réalisations Markoviennes de processus stationnaires. *Rapport de recherche*, n° 13, 1973, I. R. I. A., 78150 Le Chesnay.
- [FCG] P. FAURRE, M. CLERGET et F. GERMAIN, Opérateurs rationnels positifs. Application à l'hyperstabilité et aux processus aléatoires. *Méthodes Mathématiques de l'informatique*, t. 8, Dunod, Paris, 1979.
- [Fuh-1] P. A. FUHRMANN, Realization theory in Hilbert space for a class of transfer functions. *J. Funct. Anal.*, t. 18, 1975, p. 338-349.
- [Fuh-2] P. A. FUHRMANN, Exact controllability and observability and realization theory in Hilbert space. *J. of Math. Anal. and applications*, t. 53, 1976, p. 377-392.

- [Fuh-3] P. A. FUHRMANN, *Linear operators and systems in Hilbert space* (à paraître), McGraw-Hill.
- [Ger] F. GERMAIN, Algorithmes de calcul de réalisations Markoviennes. Cas singuliers et stabilité. *Rapport de recherche*, n° 66, 1973, I. R. I. A., 78150 Le Chesnay.
- [Hal] P. R. HALMOS, Shifts on Hilbert spaces. *J. Reine Angew. Math.*, t. **208**, 1961, p. 102-112.
- [Han] E. J. HANNAN, *Multiple time series*, Wiley and Sons, New York, 1970.
- [Hel-1] H. HELSON, *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, New York, 1964.
- [Hel-2] J. W. HELTON, Discrete time systems, operator models and scattering theory. *J. Funct. Anal.*, t. **16**, 1974, p. 15-38.
- [Hel-3] J. W. HELTON, Systems with infinite-dimensional state space: the Hilbert space approach. *Proc. I. E. E. E.*, t. **64**, 1976, p. 145-160.
- [Hof] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [IbR] I. IBRAHIMOV et Y. A. ROZANOV, *Processus aléatoires Gaussiens*, Éditions de Moscou, 1974.
- [Kai] T. KAILATH, A view of three decades of linear filtering theory. *I. E. E. E. Trans. Info. Theory*, IT-20, vol. **2**, 1974, p. 146-181.
- [KaG] T. KAILATH et R. A. GEESEY, An innovations approach to least-squares estimation. Part IV: Recursive estimation given lumped covariance functions. *I. E. E. E. Trans. Automatic Control*, AC-16, 1971, p. 720-727.
- [KMS] T. KAILATH, M. MORF et S. SIDHU, Some new algorithms for recursive estimation in constant discrete-time linear systems. *Proc. seventh Princeton Symp. on Information and system science*, 1973, p. 344-352.
- [Kal-1] R. E. KALMAN, A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., J. Basic Engineering*, t. **82**, 1960, p. 35-45.
- [Kal-2] R. E. KALMAN, Linear stochastic filtering. Reappraisal and outlook. *Proc. Symposium on System Theory*, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1965, p. 197-205.
- [Kal-3] R. E. KALMAN, *Lectures on controllability and observability*. C. I. M. E. Summer course 1968, Cremonese, Roma, 1969, p. 1-149.
- [KFA] R. E. KALMAN, P. L. FALB et M. A. ARBIB, *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [Kat] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [Kol] A. KOLMOGOROV, Stationary sequences in Hilbert space (en russe). *Bull. Math. Univ. Moscou*, vol. **2**, n° 6, 1941, p. 1-40.
- [LaP] P. D. LAX et R. S. PHILLIPS, *Scattering theory*, Academic Press, New York, 1967.
- [Lin] A. LINDQUIST, A new algorithm for optimal filtering of discrete-time stationary processes. *S. I. A. M. J. Control*, t. **12**, 1974, p. 736-746.
- [LiP-1] A. LINDQUIST et G. PICCI, On the stochastic realization problem. *S. I. A. M. J. Control* (à paraître).
- [LiP-2] A. LINDQUIST et G. PICCI, On the structure of minimal splitting subspaces in stochastic realization theory. *Proc. 1977 Conf. Decision and Control*, New Orleans, 1977, p. 42-48.
- [LiP-3] A. LINDQUIST et G. PICCI, A state-space theory for stationary stochastic processes. *Proc. 21st Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Ames, Iowa, August 1978.
- [LiP-4] A. LINDQUIST et G. PICCI, A Hardy space approach to the stochastic realization problem. *Proc. 1978 Conf. Decision and Control*, San Diego, January 1979.
- [LiP-5] A. LINDQUIST et G. PICCI, Realization theory for multivariate stationary Gaussian processes I: State space construction. *4th Int. Symposium on the Mathematical theory of Networks and Systems*, Delft (Pays-Bas), 1979, p. 140-148.
- [LPR] A. LINDQUIST, G. PICCI et G. RUCKEBUSCH, On minimal splitting subspaces and Markovian representations. *Mathematical Systems Theory*, t. **12**, 1979, p. 271-279.

- [LjK] L. LJUNG et T. KAILATH, Backwards Markovian models for second-order stochastic processes. *I. E. E. Trans. Info. Theory*, IT-22, 1976, p. 488-491.
- [Man] V. MANDREKAR, On multivariate wide-sense Markov processes. *Nagoya Math. J.*, vol. 33, 1968, p. 7-19.
- [Mas] P. MASANI, On helices in Hilbert space I. *Theory of Proba. and its applications*, vol. 17, 1972, p. 1-19.
- [MaR] P. MASANI et J. ROBERTSON, The time-domain of continuous parameter weakly stationary stochastic processes. *Pacific J. Math.*, t. 12, 1962, p. 1361-1378.
- [MeL] R. K. MEHRA et D. G. LAINIOTIS, *Systems identification: advances and case studies*, Academic Press, New York, 1977.
- [MeP] M. METIVIER et J. PELLAUMAIL, *Stochastic Integration*, Academic Press, à paraître.
- [Mey] P. A. MEYER, *Processus de Markov*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [Nev-1] J. NEVEU, *Processus aléatoires Gaussiens*, Presses de l'Université de Montréal, 1968.
- [Nev-2] J. NEVEU, *Intégrales stochastiques et applications*, Cours de 3^e cycle, Université de Paris VI, 1971-1972.
- [Pic] G. PICCI, Stochastic realization of Gaussian processes. *Proc. I. E. E. E.*, t. 64, 1976, p. 112-122.
- [Pot] V. P. POTAPOV, The multiplicative structure of J contractive matrix functions. *Amer. Math. Soc. Transl.*, t. 15, 1960, p. 131-243.
- [RiS] F. RIESZ et B. SZ.-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [Roz-1] Y. A. ROZANOV, *Stationary random processes*, Holden Day, San Francisco, 1967.
- [Roz-2] Y. A. ROZANOV, On two selected topics connected with Stochastic System Theory. *Applied Math. and Optimization*, vol. 3, n° 1, 1976, p. 73-80.
- [Roz-3] Y. A. ROZANOV, On Markov extensions of a random process. *Theory of Proba. and its applications*, vol. 22, 1977, p. 190-195.
- [Ruc-1] G. RUCKEBUSCH, *Représentations Markoviennes de processus Gaussiens stationnaires*. Thèse de 3^e cycle, Lab. de Calcul des Probabilités, Université de Paris VI, mai 1975.
- [Ruc-2] G. RUCKEBUSCH, Représentations Markoviennes de processus Gaussiens stationnaires. *C. R. Acad. Sciences*, Paris, Série A, t. 282, 1976, p. 649-651.
- [Ruc-3] G. RUCKEBUSCH, Représentations Markoviennes de processus Gaussiens stationnaires et applications statistiques. Journées de Statistique des processus stochastiques, Grenoble, 1977, Springer-Verlag, Berlin, *Lecture Notes in Mathematics*, t. 636, p. 115-139.
- [Ruc-4] G. RUCKEBUSCH, On the theory of Markovian Representation. Proc. Measure theory-applications to stochastic analysis, Oberwolfach (Allemagne), 1977, Springer-Verlag, Berlin, *Lecture Notes in Mathematics*, t. 695, p. 77-87.
- [Ruc-5] G. RUCKEBUSCH, A state space approach to the stochastic realization problem. *Proc. 1978 I. E. E. International Symposium on Circuits and Systems*, New York, p. 972-977.
- [Ruc-6] G. RUCKEBUSCH, Factorisations minimales de densités spectrales et représentations Markoviennes. *Proc. 1^{er} Colloque A. F. C. E. T.-S. M. F. de Mathématiques Appliquées*, t. I, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, 1978, p. 365-375.
- [Ruc-7] G. RUCKEBUSCH, A geometric approach to the stochastic realization problem. *Rapport interne*, n° 41, Centre de Math. Appliquées, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, novembre 1978, soumis à publication.
- [Ruc-8] G. RUCKEBUSCH, Observability and constructibility in the theory of Markovian representation. *4th Int. Symposium on the Mathematical theory of Networks and Systems*, Delft (Pays-Bas), 1979, p. 128-132.
- [Ruc-9] G. RUCKEBUSCH, *Théorie géométrique de la Représentation Markovienne*. Thèse d'État, Lab. de Calcul des Probabilités, Université de Paris VI, avril 1980.

- [Sal] G. SALUT, *Identification optimale des systèmes linéaires stochastiques*. Thèse d'État, Université Paul-Sabatier, Toulouse, 1976.
- [SzF-1] B. SZ.-NAGY et C. FOIAS, Opérateurs sans multiplicité. *Acta Sci. Math.*, t. **30**, 1969, p. 1-18.
- [SzF-2] B. SZ.-NAGY et C. FOIAS, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North Holland, Amsterdam, 1970.
- [Tay] A. E. TAYLOR, *Introduction to functional analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1958.
- [Urb] K. URBANIK, *Lectures on Prediction Theory*, Springer-Verlag, New York, 1967.
- [VaV] C. VAN PUTTEN et J. H. VAN SCHUPPEN, On stochastic dynamical systems. *4th Int. Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, Delft (Pays-Bas), 1979, p. 350-356.
- [WiM] N. WIENER et P. MASANI, The prediction theory of multivariate stochastic processes, Part I. *Acta Math.*, t. **98**, 1957, p. 111-150; Part II, *Acta Math.*, t. **99**, 1958, p. 93-137.
- [Wil-1] J. C. WILLEMS, Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *I. E. E. Trans. Automatic Control*, **AC-16**, 1971, p. 621-634.
- [Wil-2] J. C. WILLEMS, Dissipative dynamical systems, Part II: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, t. **45**, 1972, p. 352-393.
- [WiV] J. C. WILLEMS et J. H. VAN SCHUPPEN, *Stochastic systems and the problem of state space realization* (à paraître).
- [Wol] H. WOLD, *A study in the analysis of stationary time series*, Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1938.
- [Won] W. M. WONHAM, Linear multivariable control. A geometric approach, Springer-Verlag, Berlin, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, t. **101**, 1974.
- [Yos] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

(Manuscrit reçu le 29 mai 1980)