

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL VALADIER

## Sur l'espérance conditionnelle multivoque non convexe

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 16, n° 2 (1980), p. 109-116

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1980\\_\\_16\\_2\\_109\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_2_109_0)

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur l'espérance conditionnelle multivoque non convexe

par

Michel VALADIER (\*)

### § 1. INTRODUCTION

Étant donné  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  un espace probabilisé,  $\mathfrak{B}$  une sous-tribu de  $\mathfrak{A}$ ,  $E$  un localement convexe,  $\Gamma$  une multi-application  $\mathfrak{A}$ -mesurable de  $\Omega$  dans  $E$ , on peut définir et étudier l'espérance conditionnelle  $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$ . Cela a été fait successivement pour  $\Gamma$  à valeurs convexes compactes, puis convexes fermées, puis fermées par Van Cutsem [23], Bismut [1], Valadier [18] (repris dans Castaing-Valadier [3]), Neveu [10], Van Cutsem [24], Daurès [4], Dynkin-Evstigneev [6], Hiai-Umegaki [7], Sainte-Beuve [14], Valadier [19] [20], Castaing [2].

Une question qui vient naturellement à l'esprit est : lorsqu'existe une famille de lois conditionnelles  $(P(\cdot | \omega))_{\omega \in \Omega}$ , a-t-on

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) = \int \Gamma(\omega') P(d\omega' | \omega) ?$$

Lorsque  $\Gamma$  est à valeurs convexes, il est facile de le vérifier en utilisant la fonction d'appui (Daurès [4], Valadier [19] [20]). On se propose d'établir cette propriété en l'absence de convexité.

On déduira de ce résultat que, si les  $P(\cdot | \omega)$  sont sans atomes (ce qui très généralement équivaut à l'absence d'atomes conditionnels),  $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$  est à valeurs convexes. Cela étend un des résultats de Dynkin-Evstigneev où  $E = \mathbb{R}^n$  et  $\Gamma$  est intégralement majorée.

---

(\*) Université des Sciences et Techniques du Languedoc, place Eugène-Bataillon, 34060 Montpellier Cedex (France).

## § 2. HYPOTHÈSES ET RAPPELS

Soit  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  un espace de probabilité,  $\mathfrak{B}$  une sous-tribu de  $\mathfrak{A}$ ,  $E$  un Banach séparable,  $\Gamma$  une multi-application  $\mathfrak{A}$ -mesurable de  $\Omega$  dans les fermés de  $E$  (cf. Castaing-Valadier [3], ch. III, déf. 10, p. 68). On note  $\mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  l'ensemble

$$\{ u \in \mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathfrak{A}, P) \mid u(\omega) \in \Gamma(\omega) \text{ p. s. } \}$$

et  $L_E^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  désigne le quotient formé par les classes d'équivalence pour l'égalité presque sûre. On suppose  $\mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathfrak{A}, P) \neq \emptyset$ .

On peut définir  $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$  comme l'unique (classe de) multi-application  $\mathfrak{B}$ -mesurable  $\Theta$  à valeurs dans les fermés de  $E$  telle que

$$L_{\Theta}^1(\Omega, \mathfrak{B}, P) = \text{adh } E^{\mathfrak{B}}(L_E^1(\Omega, \mathfrak{A}, P))$$

où  $\text{adh}$  désigne l'adhérence relative à la norme de  $L_E^1(\Omega, \mathfrak{B}, P)$  (cf. Hiai et Umegaki [7], th. 5.1, p. 169, où  $\Gamma$  est supposée intégralement majorée). On peut montrer ([19]) que  $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$  est aussi la borne supérieure essentielle (cf. [17], prop. 1.14, p. 278) des singletons  $\mathfrak{B}$ -aléatoires  $\omega \rightarrow \{ E^{\mathfrak{B}}(u)(\omega) \}$ ,  $u \in L_E^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  (cette idée remonte à 1971, cf. [18]).

## § 3. LIEN ENTRE ESPÉRANCE CONDITIONNELLE ET LOIS CONDITIONNELLES

On suppose qu'il existe une famille de lois conditionnelles, c'est-à-dire une probabilité de transition  $(\omega, A) \mapsto P(A \mid \omega)$  de  $(\Omega, \mathfrak{B})$  vers  $(\Omega, \mathfrak{A})$  telle que

$$(1) \quad \forall A \in \mathfrak{A}, \forall B \in \mathfrak{B}, P(A \cap B) = \int_{\mathfrak{B}} P(A \mid \omega) P(d\omega).$$

Cela revient à dire que  $(P(\cdot \mid \omega))_{\omega \in \Omega}$  est une désintégration de l'image de  $P$  par

$$\begin{cases} \omega \mapsto (\omega, \omega) \\ (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\Omega \times \Omega, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A}). \end{cases}$$

La formule (1) s'étend à  $\varphi : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty]$  où  $\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A}$  mesurable, intégrable si elle est à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

$$(2) \quad \int_{\Omega} \varphi(\omega, \omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} \varphi(\omega, \omega') P(d\omega' \mid \omega) \right] P(d\omega)$$

On retrouve (1) en prenant  $\varphi(\omega, \omega') = \chi_A(\omega')\chi_B(\omega)$ . On sait (Doob [5], th. 9.1, p. 27 et Loève [9], th. A, § 26.1, p. 354) que pour  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P(\cdot | \omega)) \text{ pour presque tout } \omega$$

et

$$E^{\mathfrak{B}}(f)(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega')P(d\omega' | \omega)$$

(cf. aussi les formules « symboliques » de Kolmogorov [8], ch. V, § 4, formules (12) et (14)). Cela passe sans difficulté à  $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  (en scalarisant). Pour une multi-application à valeurs convexes fermées (dans le dual d'un Fréchet séparable) cette propriété a été démontrée dans [19], [20] (cf. aussi Daurès [4], l'idée de factoriser était de Tortrat).

THÉORÈME 1. — *Si  $\mathfrak{A}$  est dénombrablement engendrée on a presque sûrement*

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) = \text{adh} \left\{ \int_{\Omega} u(\omega')P(d\omega' | \omega) \mid u \in \mathcal{L}^1_{\Gamma}(\Omega, \mathfrak{A}, P(\cdot | \omega)) \right\}$$

où adh désigne l'adhérence dans E (pour la norme).

Le second membre peut être noté  $\int_{\Omega} \Gamma(\omega')P(d\omega' | \omega)$ .

*Preuve.* — 1) Soit  $\bar{u} \in \mathcal{L}^1_{\Gamma}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ . En appliquant la formule (2) à  $\varphi(\omega, \omega') = \|\bar{u}(\omega')\|$ , on voit que  $\bar{u} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, P(\cdot | \omega))$  pour presque tout  $\omega$ . De plus  $\bar{u}(\omega) \in \Gamma(\omega)$  sauf si  $\omega \in N_0$  où  $N_0$  est P-négligeable. Or un P-négligeable  $N_0$  est, pour presque tout  $\omega$ ,  $P(\cdot | \omega)$  négligeable (appliquer (1) avec  $A = N_0$ ,  $B = \Omega$ ). Donc  $\bar{u} \in \mathcal{L}^1_{\Gamma}(\Omega, \mathfrak{A}, P(\cdot | \omega))$  pour presque tout  $\omega$ , soit pour  $\omega \notin N$  où  $N$  est P-négligeable.

2) Montrons que le second membre  $\Theta(\omega)$  contient p. s.  $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega)$ . D'après les propriétés de la borne supérieure essentielle ([17], prop. 1.14 ou [20] th. 1), il existe une suite  $(u_n)$  dans  $L^1_{\Gamma}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  telle que

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) = \text{adh} \{ E^{\mathfrak{B}}(u_n)(\omega) \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ p. s.}$$

Comme

$$E^{\mathfrak{B}}(u_n)(\omega) = \int u_n(\omega')P(d\omega' | \omega) \text{ p. s.}$$

on a

$$E^{\mathfrak{B}}(u_n)(\omega) \in \Theta(\omega) \text{ p. s.}$$

d'où

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) \subset \Theta(\omega) \text{ p. s.}$$

3) On va mettre en évidence en 4) une famille dénombrable de sections

P-intégrables de  $\Gamma$  qui soient, pour presque tout  $\omega$ , denses dans  $L^1_r(\Omega, \mathfrak{A}, P(\cdot | \omega))$ . Notons  $(w_n)$  cette famille. Alors

$$\Theta(\omega) = \text{adh} \left\{ \int w_n(\omega') P(d\omega' | \omega) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \text{ p. s.}$$

Par ailleurs

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) \ni E^{\mathfrak{B}}(w_n)(\omega) \text{ p. s.}$$

et comme

$$E^{\mathfrak{B}}(w_n)(\omega) = \int w_n(\omega') P(d\omega' | \omega) \text{ p. s.}$$

on en déduit

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) \supset \Theta(\omega) \text{ p. s.}$$

4) Soit  $(v_n)$  une suite dense de sections mesurables de  $\Gamma$ . Posons pour  $k \in \mathbb{N}$

$$u_{n,k}(\omega) = \begin{cases} v_n(\omega) & \text{si } \|v_n(\omega) - \bar{u}(\omega)\| \leq k \\ \bar{u}(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $u_{n,k} - \bar{u}$  est bornée et

$$\Gamma(\omega) = \text{adh} \{ u_{n,k}(\omega) \mid (n, k) \in \mathbb{N}^2 \}.$$

Pour  $\omega \in \Omega - N$  ( $N$  est défini en 1)), on a  $u_{n,k} \in L^1_r(\Omega, \mathfrak{A}, P(\cdot | \omega))$ . Pour simplifier, notons  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  la famille  $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ . D'après le lemme 1.3 de Hiai et Umegaki ([7], p. 153, je l'ai repris dans [19], lemme 6, p. 13), si  $\varepsilon > 0$  et  $u \in L^1_r(\Omega, \mathfrak{A}, P(\cdot | \omega))$  sont fixés, il existe une  $\mathfrak{A}$ -partition de  $\Omega$ ,  $A_0, \dots, A_n$  telle que

$$\left\| u - \sum_{i=0}^n \chi_{A_i} u_i \right\| \leq \varepsilon \quad (\text{pour la norme de } L^1_r(\Omega, \mathfrak{A}, P(\cdot | \omega))).$$

Soit  $\mathfrak{A}_0$  une algèbre dénombrable engendrant  $\mathfrak{A}$ . On va utiliser la densité de  $\mathfrak{A}_0$  dans  $\mathfrak{A}$  pour l'écart  $(A, B) \mapsto P(A \Delta B | \omega)$  (Neveu [11], exercice I.5.1, p. 23).

Soit  $\eta > 0$  tel que

$$\forall i \leq n, P(A | \omega) < \eta \Rightarrow \int_A \|u_i(\omega')\| P(d\omega' | \omega) < \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Il existe une  $\mathfrak{A}_0$ -partition  $\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n$  telle que

$$\forall i \leq n, P(A_i \Delta \bar{A}_i | \omega) < \eta$$

(on peut approcher les  $A_i$  par des  $\bar{A}_i$  pas forcément disjoints, remplacer  $\bar{A}_i$

par  $\bar{A}_i - \bigcup_{j < i} \bar{A}_j$ , puis ajouter à  $\bar{A}_0$  la partie de  $\Omega$  non encore recouverte), d'où

$$\left\| \sum_{i=0}^n \chi_{A_i} u_i - \sum_{i=0}^n \chi_{\bar{A}_i} u_i \right\| \leq 2\varepsilon$$

et

$$\left\| u - \sum_{i=0}^n \chi_{\bar{A}_i} u_i \right\| \leq 3\varepsilon.$$

Or la famille des  $\sum_{i=0}^n \chi_{\bar{A}_i} u_i$  où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n$  est une  $\mathfrak{A}_0$ -partition de  $\Omega$ , est dénombrable. C'est la famille annoncée en 3).

**COROLLAIRE.** — Si les  $P(. | \omega)$  sont presque toutes sans atomes,  $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega)$  est p. s. convexe.

*Preuve.* — On sait que si  $P(. | \omega)$  est sans atomes,

$$\int \Gamma(\omega') P(d\omega' | \omega)$$

est convexe (Hiai et Umegaki [7], th. 4.2, p. 165); si le lecteur n'a pas cet article sous la main, il peut retrouver la démonstration en particulierisant celle du théorème 2 ci-dessous.

*Remarque.* — D'après Rohlin ([13], p. 51) (cf. aussi [21]), sous l'hypothèse que  $P$  est portée par un lusinien et  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  sont dénombrablement engendrées, dire que presque toutes les  $P(. | \omega)$  sont sans atomes équivaut à dire que  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  est sans  $\mathfrak{B}$ -atomes. Dans le paragraphe suivant on va montrer directement (sans utiliser le th. 1) que «  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  sans  $\mathfrak{B}$ -atomes » implique la convexité de  $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega)$ .

#### § 4. APPLICATION DU THÉORÈME DE LIAPUNOV-SOLER

**THÉORÈME 2.** — Si  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  est sans  $\mathfrak{B}$ -atomes,  $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$  est p. s. à valeurs convexes.

*Remarque.* — Ce résultat est obtenu par Dynkin Evstigneev ([6]) pour  $E = \mathbb{R}^n$  et  $\Gamma$  intégralement majorée. Ils obtiennent même mieux (cf. th. 1.2,

p. 327)  $E^{\mathfrak{B}}(L_{\Gamma}^1) = E^{\mathfrak{B}}(L_{\text{co } \Gamma}^1)$ . Dans le cas de l'intégration ( $\mathfrak{B} = \{ \emptyset, \Omega \}$ ) cette formule signifie

$$\left\{ \int u dP \mid u \in L_{\Gamma}^1 \right\} = \left\{ \int u dP \mid u \in L_{\text{co } \Gamma}^1 \right\}$$

et est connue au moins depuis 1963 (Richter [12], th. 2, p. 86).

*Preuve.* — Il suffit de montrer que  $\text{adh } E^{\mathfrak{B}}(L_{\Gamma}^1)$  est convexe (on peut en déduire que  $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$  est convexe soit en utilisant les propriétés de la borne supérieure essentielle, soit en citant Hiai et Umegaki [7], th. 1.5, p. 154). Soit  $u$  et  $v \in L_{\Gamma}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\varepsilon > 0$ . On va montrer qu'il existe  $A \in \mathfrak{A}$  tel que

$$\| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A u + \chi_{\Omega-A} v) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha u + (1 - \alpha)v) \| \leq \varepsilon.$$

Il suffit pour cela de montrer

$$\| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A(u - v)) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha(u - v)) \| \leq \varepsilon.$$

Soit  $w \in L_{\mathbb{E}}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  étagée telle que  $\| (u - v) - w \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  (idée due à Uhl [16]). Comme  $w$  prend ses valeurs dans un sous-espace de  $E$  de dimension finie, on peut appliquer le théorème de Soler ([15], prop. IV.12, p. 94 ; [22]) : il existe  $A \in \mathfrak{A}$  tel que  $E^{\mathfrak{B}}(\chi_A w) = \alpha E^{\mathfrak{B}}(w)$ . On a

$$\begin{aligned} \| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A(u - v)) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha(u - v)) \| & \\ & \leq \| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A(u - v)) - E^{\mathfrak{B}}(\chi_A w) \| + \| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A w) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha w) \| \\ & \quad + \| E^{\mathfrak{B}}(\alpha w) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha(u - v)) \| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

COROLLAIRE. — Si  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  est sans  $\mathfrak{B}$ -atomes,

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma) = E^{\mathfrak{B}}(\overline{\text{co } \Gamma}).$$

*Preuve.* — Il suffit de montrer :

$$L_{E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)}^1(\mathfrak{B}) = L_{E^{\mathfrak{B}}(\overline{\text{co } \Gamma})}^1(\mathfrak{B})$$

(on écrit  $\mathfrak{B}$  au lieu de  $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ ). Comme il y a convexité, il suffit de vérifier l'égalité des fonctions d'appui en  $v \in L_{E_s}^{\infty}(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ .

On a d'abord

$$\delta^*(v \mid L_{E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)}^1(\mathfrak{B})) = \sup \{ \langle v, E^{\mathfrak{B}}(u) \rangle \mid u \in L_{\Gamma}^1(\mathfrak{A}) \}.$$

(puisque

$$\begin{aligned} L_{E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)}^1(\mathfrak{B}) &= \text{adh } E^{\mathfrak{B}}(L_{\Gamma}^1(\mathfrak{A})) \\ &= \sup \{ \langle v, u \rangle \mid u \in L_{\Gamma}^1(\mathfrak{A}) \} \\ &= \int \delta^*(v(w) \mid \Gamma(\omega)) P(d\omega) \end{aligned}$$

(résulte de Castaing-Valadier [3], th. VII.7, p. 200 appliqué à

$$f(\omega, x) = \delta(x \mid \Gamma(\omega)), \mathcal{L}_E = \mathcal{L}_E^1(\mathfrak{A}) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{E'} = \mathcal{L}_{E'}^{\infty}(\mathfrak{A}).$$

Pour les mêmes raisons

$$\begin{aligned} \delta^*(v \mid L_{E^{\mathfrak{B}}(\overline{\text{co}} \Gamma)}^1(\mathfrak{B})) &= \int \delta^*(v(\omega) \mid \overline{\text{co}} \Gamma(\omega)) P(d\omega) \\ &= \int \delta^*(v(\omega) \mid \Gamma(\omega)) P(d\omega). \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. M. BISMUT, Intégrales convexes et probabilités. *J. of Math. An. and Appl.*, t. 42 (3), 1973, p. 639-673.
- [2] C. CASTAING, *Compacité et inf-équi-continuité dans certains espaces de Köthe-Orlicz*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1979, Exposé n° 6.
- [3] C. CASTAING et M. VALADIER, Convex analysis and measurable multi-functions. Springer-Verlag. *Lecture Notes*, n° 580, 1977.
- [4] J.-P. DAURÈS, Version multivoque du théorème de Doob. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. B IX (2), 1973, p. 167-176.
- [5] J. L. DOOB, *Stochastic process*. John Wiley, 1953.
- [6] E. B. DYNKIN et I. V. EVSTIGNEEV, Regular conditional expectations of correspondances. *Theory of probability and its applications*, t. 21, 1976, p. 325-328 (traduit du russe).
- [7] F. HIAI et H. UMEGAKI, Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions. *J. of multivariate an.*, t. 7, 1977, p. 149-182.
- [8] A. N. KOLMOGOROV, *Foundations of the theory of probability*. Chelsea, 1950 (édition originelle en allemand, 1933).
- [9] M. LOEVE, *Probability theory*, 3<sup>e</sup> édition, Van Nostrand, 1963.
- [10] J. NEVEU, Convergence presque sûre de martingales multivoques. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. B VIII (1), 1972, p. 1-7.
- [11] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson, 1964.
- [12] H. RICHTER, Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Mass-theorie. *Math. Ann.*, t. 150, 1963, p. 85-90.
- [13] V. A. ROHLIN, On the fundamental ideas of measure theory. *Amer. Math. Soc. Transl.*, t. 71, 1952, 1-54.
- [14] M.-F. SAINTE-BEUVE, Some topological properties of vector measures with bounded variations and its applications. *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, t. CXVI, 1978, 317-379.
- [15] J. L. SOLER, *Notion de liberté en statistique mathématique*. Thèse de 3<sup>e</sup> cycle. Grenoble, 1970 (a été traduite en russe aux éditions MIR).

- [16] J. J. UHL, The range of a vector-valued measure. *Proc. A. M. S.*, t. **23** (1), 1969, p. 158-163.
- [17] M. VALADIER, Multi-applications mesurables à valeurs convexes compactes. *J. Math. Pures et Appl.*, t. **50**, 1971, p. 265-297.
- [18] M. VALADIER, Espérance conditionnelle d'un convexe fermé aléatoire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **273**, 1971, p. 1265-1267 (version détaillée : Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, Exposé n° 1).
- [19] M. VALADIER, *Sur l'espérance conditionnelle multivoque*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1978, Exposé n° 9.
- [20] M. VALADIER, On conditional expectation of random sets. *A paraître dans Annali di Mat. pura ed appl.*
- [21] M. VALADIER, *Structure des atomes conditionnels d'un espace de probabilité*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1980, Exposé n° 1.
- [22] M. VALADIER, *Le théorème de Liapunov-Soler*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1980, Exposé n° 2.
- [23] B. VAN CUTSEM, *Éléments aléatoires à valeurs convexes compactes*. Thèse Grenoble. 1971.
- [24] B. VAN CUTSEM, Martingales de convexes fermés aléatoires en dimension finie. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. B VIII (4), 1972, p. 365-385.

(Manuscrit reçu le 28 février 1980).