ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. ROUSSIGNOL

Un processus de saut sur R a une infinité de particules

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, nº 2 (1980), p. 101-108
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_2_101_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré
Vol. XVI, n° 2, 1980, p. 101-108.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Un processus de saut sur $\mathbb{R}$ a une infinité de particules

par

M. ROUSSIGNOL (*)

ABSTRACT. — We study a jump process on $\mathbb{R}$ in continuous time similar to a process studied by H. M. Pierson in discrete time. We prove ergodic theorems by coupling and martingale methods.

I. INTRODUCTION

Nous allons étudier le processus de saut sur $\mathbb{R}$ à une infinité de particules qui évolue de la manière suivante : pendant un intervalle de temps dt, la probabilité pour que deux, ou plus, particules sautent vaut $o(dt)$; pendant cet intervalle de temps, une particule située en x peut sauter dans l'intervalle $[y, y + dy]$ compris entre x et la position z de la particule voisine de gauche avec la probabilité $p\left(\frac{y-x}{z-x}\right) \frac{dy}{x-z} dt$ où $p(.)$ est une densité de probabilité sur $[0, 1]$. Ce modèle est semblable à celui étudié par Pierson dans [*1*] en temps discret. Comme Pierson dans le cas discret, mais avec des méthodes différentes, nous allons montrer que, partant de certaines configurations homogènes dans l'espace, ce processus évolue vers des configurations invariantes dont nous donnerons des propriétés.

Nous ne nous intéressons qu'à des configurations initiales de loi invariante par translation sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors, comme Pierson dans [*1*], nous ramener à l'étude du processus d'évolution des intervalles.

(*) Laboratoire de Probabilités, tour 56, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

Nous notons $E = (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}$, $\mathscr{D}(E)$ l'espace des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ bornées et ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées.

Si ξ appartient à E et si x appartient à [0, 1], soit $C_i^x\xi$ l'élément de E défini par : $(C_i^x\xi)_j = \xi_j$ si j est différent de i et $i + 1$; $(C_i^x\xi)_i = x\xi_i$; $(C_i^x\xi)_{i+1} = \xi_{i+1} + (1 - x)\xi_i$.

Si f appartient à $\mathscr{D}(E)$, considérons le générateur :

$$Lf(\xi) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \int_0^1 p(x)dx[f(C_i^x\xi) - f(\xi)]$$

Ce générateur décrit l'évolution des intervalles du processus qui nous intéresse. Plus précisément, sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathscr{F}_t, t \geq 0), P)$ et pour toute variable aléatoire α à valeurs dans E de loi invariante par la translation sur $\mathbb{Z}$, nous allons construire un processus $\xi^\alpha(t)$ à valeurs dans E tel que :

— $P[\xi^\alpha(0) = \alpha] = 1$

— si f appartient à $\mathscr{D}(E)$

$$f(\xi^\alpha(t)) - f(\alpha) - \int_0^t Lf(\xi^\alpha(s))ds \text{ est une } (P, \mathscr{F}_t)\text{-martingale.}$$

II. CONSTRUCTION DU PROCESSUS

Sur $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+)$, donnons-nous un processus ponctuel de Poisson marqué par des variables aléatoires à valeurs dans [0, 1], indépendantes et de même loi $p(.)$. Soit $\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée par le processus ponctuel restreint à $(\mathbb{Z} \times [0, t[)$. Nous avons donc un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathscr{F}_t, t \geq 0), P)$.

Pour chaque réalisation du processus de Poisson, nous avons une suite de points marqués sur chaque fibre $(i \times \mathbb{R}^+)$. Chacun de ces points représente un lieu et un instant de saut : si le point (i, t) est chargé et a la marque x, alors à l'instant t, $\xi^\alpha(t_-)$ est changé en $\xi^\alpha(t) = C_i^x\xi^\alpha(t_-)$. Avec cette règle, il est facile de construire une évolution sur $(\mathbb{R}^+)^B$ où B est une partie bornée de $\mathbb{Z}$, d'état initial donné.

Pour faire la construction sur $\mathbb{Z}$ entier, on peut remarquer que, sur $\mathbb{Z} \times [0, T]$, il existe presque sûrement une infinité de fibres chargées par aucun point. Entre deux de ces fibres consécutives, on peut alors construire l'évolution entre les instants 0 et T, et donc en recollant les morceaux, on construit une évolution entre 0 et T. On recommence alors entre T et 2T et ainsi de suite. Il est clair que l'évolution $\xi^\alpha(t)$ construite est indépendante de T. Nous avons bien $P[\xi^\alpha(0) = \alpha] = 1$.

D'autre part, par construction,

$$f(\xi^\alpha(t)) - f(\xi^\alpha(0)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \iint 1_{(0<s\leq t)}[f(C_i^x\xi^\alpha(s_-)) - f(\xi^\alpha(s_-))]\mu_i(ds, dx)$$

où $\mu_i(ds, dx)$ désigne la mesure de Poisson marquée sur la fibre $(i \times \mathbb{R}^+)$. Or, la propriété de projection prévisible de ces mesures de Poisson donne que

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \iint 1_{(0<s\leq t)}[f(C_i^x\xi^\alpha(s_-)) - f(\xi^\alpha(s_-))][\mu_i(ds, dx) - p(x)dxds]$$

est une $(\mathscr{F}_t, \mathrm{P})$-martingale.

C'est bien la propriété de martingale demandée.

III. ÉTUDE DU PROCESSUS

Nous notons $\mathrm{C} = \mathrm{E}\alpha_i$.

PROPOSITION 1. — $\mathrm{E}\xi_i^\alpha(t) = \mathrm{C}$.

Démonstration. — On note f_i l'application de E dans $\mathbb{R}^+$: $\xi \mapsto \xi_i$.
Alors

$$\mathrm{L}(f_i(\xi)\wedge n) = \int p(x)dx \{ (x\xi_i\wedge n) - (\xi_i\wedge n) + ((\xi_i + (1-x)\xi_{i-1})\wedge n) - (\xi_i\wedge n) \}$$

et

$$\mathrm{E}(\xi_i^\alpha(t) \wedge n) = \mathrm{E}(\alpha_i \wedge n) + \int_0^t ds \mathrm{EL}(f_i(\xi^\alpha(s) \wedge n),$$

ce qui s'écrit :

$$\mathrm{E}(\xi_i^\alpha(t) \wedge n) = \mathrm{E}(\alpha_i \wedge n) + \int_0^t ds \int p(x)dx \{ \mathrm{E}(x\xi_i^\alpha(s) \wedge n) - \mathrm{E}(\xi_i^\alpha(s) \wedge n)$$
$$+ \mathrm{E}((\xi_i^\alpha(s) + (1-x)\xi_{i-1}^\alpha(s)) \wedge n) - \mathrm{E}(\xi_i^\alpha(s) \wedge n) \}.$$

Si n croît vers $+\infty$, on obtient alors :

$$\mathrm{E}\xi_i^\alpha(t) = \mathrm{E}\alpha_i + \int_0^t ds \int p(x)dx \{ (x-1)\mathrm{E}\xi_i^\alpha(s) + (1-x)\mathrm{E}\xi_{i-1}^\alpha(s) \}.$$

Or $\xi^\alpha(s)$ est, comme α, homogène dans l'espace, donc $\mathrm{E}\xi_i^\alpha(s) = \mathrm{E}\xi_{i-1}^\alpha(s)$ et donc $\mathrm{E}\xi_i^\alpha(t) = \mathrm{E}\alpha_i$. ■

Nous allons maintenant étudier le comportement des moments de second ordre.

Nous posons si $|i| \geq 1$

$$g_i(t) = \mathrm{E}\xi_0^\alpha(t)\xi_i^\alpha(t) - \mathrm{C}^2 \qquad \text{et} \qquad g_0(t) = \mathrm{E}(\xi_0^\alpha(t))^2 - \frac{a}{b}\mathrm{C}^2$$

où

$$a = \int (1 - x)p(x)dx \qquad \text{et} \qquad b = \int x(1 - x)p(x)dx\ ;$$

nous notons $\mathrm{G}(t) = \{ g_i(t);\ i \in \mathbb{Z} \}$.

Soit $\mathrm{A} = \{ (a_{ij});\ (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \}$ la matrice définie par : $a_{00} = -2b$, $a_{ii} = -2a$ si $i \neq 0$, $a_{0,1} = a_{0,-1} = b$, $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = a$; tous les autres coefficients sont nuls.

PROPOSITION 2. — $\mathrm{G}'(t) = \mathrm{G}(t)\mathrm{A}$.

Démonstration. — Nous appliquons la propriété de martingales aux fonctions $f_0^2 \wedge n$ et $f_0 f_i \wedge n$. En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient si $s \leqslant t$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\xi_0^\alpha(t))^2 &= \mathrm{E}\xi_0^\alpha(s))^2 + \int_s^t du \int p(x)dx \{ (x^2 - 1)\mathrm{E}(\xi_0^\alpha(u))^2 \\
&\qquad + (1-x)^2\mathrm{E}(\xi_{-1}^\alpha(u))^2 + 2(1-x)\mathrm{E}\xi_0^\alpha(u)\xi_{-1}^\alpha(u) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\xi_0^\alpha(t)\xi_1^\alpha(t) &= \mathrm{E}\xi_0^\alpha(s)\xi_1^\alpha(s) + \int_s^t du \int p(x) \{ (1-x)\mathrm{E}\xi_{-1}^\alpha(u)\xi_1^\alpha(u) \\
&\qquad + 2(x-1)\mathrm{E}\xi_0^\alpha(u)\xi_1^\alpha(u) + x(\mathrm{I}-x)\mathrm{E}(\xi_0^\alpha(u))^2 \}
\end{aligned}$$

et si $|i| \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\xi_0^\alpha(t)\xi_1^\alpha(t) &= \mathrm{E}\xi_0^\alpha(s)\xi_i^\alpha(s) + \int_s^t du \int p(x)dx \{ (1-x)\mathrm{E}\xi_{-1}^\alpha(u)\xi_i^\alpha(u) \\
&\qquad + 2(x-1)\mathrm{E}\xi_0^\alpha(u)\xi_i^\alpha(u) + (1-x)\mathrm{E}\xi_0^\alpha(u)\xi_{i-1}^\alpha(u) \}
\end{aligned}$$

d'où le résultat en utilisant l'homogénéité dans l'espace. ■

A est la matrice du générateur infinitésimal d'un processus de saut sur $\mathbb{Z}$ de probabilité de transition 1/2 et 1/2 sur les voisins de droite et de gauche de chaque point et de vitesse de saut $2b$ en 0 et $2a$ en tous les autres points. Ce processus est récurrent nul.

PROPOSITION 3. — Si $\sum_{i \in \mathbb{Z}} | \mathrm{E}\alpha_0\alpha_i - \mathrm{C}^2 | < \infty$, alors

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mathrm{E}\xi_0^\alpha(t)\xi_i^\alpha(t) = \mathrm{C}^2 \qquad \text{si} \qquad |i| \geq 1$$

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mathrm{E}[\xi_0^\alpha(t)]^2 = \frac{a}{b}\mathrm{C}^2.$$

Démonstration. — Vu la forme de la matrice A, si $\sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i(0)$ existe, alors

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i(0).$$

On peut alors considérer $\dfrac{G(t)}{\sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i(0)}$ comme la loi de l'évolution d'un processus de saut gouverné par A et de loi initirale $\dfrac{G(0)}{\sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i(0)}$. Le processus étant récurrent nul, on en déduit que $\lim_{i \uparrow \infty} g_i(t) = 0$, d'où le résultat. ■

Pour étudier le comportement asymptotique du processus, nous commençons par étudier le processus ayant comme configuration initiale $\alpha = (\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ où $\alpha_i = C$ pour tout i. Nous notons ce processus $\xi^C(t)$. Nous allons montrer que $\xi^C(t)$ converge en loi si t tend vers l'infini. Pour cela nous allons définir un processus $\tilde{\xi}^C(t)$ ayant même loi que $\xi^C(t)$ et dont la convergence est plus facile à étudier.

Nous construisons $\tilde{\xi}^\alpha(t)$ de la même manière que $\xi^\alpha(t)$, mais avec comme processus de Poisson sous-jacent sur $\mathbb{Z} \times [0, t]$ le symétrique par rapport à la droite horizontale d'ordonnée $t/2$ du processus de Poisson servant à la construction de $\xi^\alpha(t)$. Si $s < t$, le processus de Poisson servant à la construction de $\xi^\alpha(s)$ est la restriction à $\mathbb{Z} \times [0, s]$ de celui ayant servi à la construction de $\xi^\alpha(t)$; par contre, cette propriété n'est plus vraie pour $\tilde{\xi}^\alpha(t)$; $\tilde{\xi}^\alpha(t)$ n'est plus un processus markovien. Cependant $\tilde{\xi}^\alpha(t)$ a même loi que $\xi^\alpha(t)$.

PROPOSITION 4. — $\tilde{\xi}^C(t)$ est une $(P, \mathscr{F}_t)$-martingale.

Démonstration. — Si $s \leq t$, nous avons : $E[\tilde{\xi}^C(t)/\mathscr{F}_s] = E[\tilde{\xi}^{\bar{\xi}^{C(t-s)}}(s)/\mathscr{F}_s]$ où nous avons noté $\bar{\xi}^C(t-s)$ la version de $\xi^C(t-s)$ construite sur la même réalisation du processus de Poisson que $\tilde{\xi}^C(t)$. Or, l'application $\alpha \mapsto \tilde{\xi}^\alpha(s)$ est linéaire en α et $\bar{\xi}^C(t-s)$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$, donc

$$E[\tilde{\xi}^C(t)/\mathscr{F}_s] = \tilde{\xi}^C(s). \quad ■$$

PROPOSITION 5. — $\xi^C(t)$ converge en loi si t tend vers l'infini.

Démonstration. — $\xi^C(t)$ a la même loi que $\tilde{\xi}^C(t)$ qui converge si t tend vers l'infini. ■

On a alors le résultat général suivant :

PROPOSITION 6. — Si $\sum_{i \in \mathbb{Z}} | E(\alpha_0 \alpha_i) - (E\alpha_0)^2 | < \infty$ la loi de $\xi^\alpha(t)$ converge vers la même limite que la loi de $\xi^C(t)$ où $C = E\alpha_0$.

Démonstration. — On va coupler $\xi^\alpha(t)$ et $\xi^C(t)$ en les faisant évoluer sur le même processus de Poisson sous-jacent. Le générateur qui gouverne l'évolution s'écrit :

$$\widehat{L}f(\eta, \xi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int p(x)dx[f(C_i^x\eta, C_i^x\xi) - f(\eta, \xi)].$$

On peut considérer les fonctions

$$h_i(t) = E[\xi_i^\alpha(t) - \xi_i^C(t)][\xi_0^\alpha(t) - \xi_0^C(t)].$$

De la même manière que dans la proposition 3, on montre que $\lim_{t \uparrow \infty} h_i(t) = 0$, d'où en particulier la convergence dans L^2, ce qui démontre le résultat. ∎

On en déduit :

THÉORÈME 7. — Si $\alpha = (\alpha_i, i \in \mathbb{Z})$ est tel que $\sum_{i \in \mathbb{Z}} | E(\alpha_0 \alpha_i) - (E\alpha_0)^2 | < \infty$, alors la loi de $\xi^\alpha(t)$ converge vers une probabilité ν sur E telle que :

$$\nu(\xi_0) = E\alpha_0 \; ; \; \nu(\xi_0^2) = \frac{a}{b}(E\alpha_0)^2 \quad \text{et si } | i | \geq 1 \quad \nu(\xi_0\xi_i) - \nu(\xi_0)\nu(\xi_i) = 0.$$

Démonstration. — La seule chose à démontrer est le passage à la limite des moments. Or, la martingale positive $\tilde{\xi}^C(t)$ est bornée dans L^2 uniformément en t, donc converge dans L^1 et dans L^2. Cela donne le résultat. ∎

APPENDICE

Dans [2] et [3], F. Spitzer et T. M. Liggett viennent d'étudier plusieurs modèles d'évolution à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}$. Le modèle étudié dans les paragraphes précédents est, à peu près, un cas particulier d'un des modèles étudiés dans [2] et [3], le modèle du Potlatch. Ce processus est défini de la manière suivante. On se donne une famille de lois de probabilités sur $\mathbb{Z}(q_x, x \in [0, 1])$ et une loi de probabilité $p(dx)$ sur [0, 1]. Si x appartient à [0, 1] et si ξ appartient à E, on peut définir $C_i^x\xi$ l'élément de E tel que :

$$(C_i^x\xi)_i = \xi_i q_x(0) \; ; \qquad (C_i^x\xi)_j = \xi_j + \xi_i q_x(j - i).$$

Soit alors le générateur L défini pour les fonctions f appartenant à $\mathscr{D}(E)$ par :

$$Lf(\xi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_0^1 p(dx) \{ f(C_i^x\xi) - f(\xi) \}$$

De la même façon que dans le paragraphe I, on appelle processus du Potlatch un processus dont la loi résout le problème des martingales associé à L.

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié le processus avec les lois particulières : $q_x(0) = x$, $q_x(1) = 1 - x$, $q_x(i) = 0$ si $i \neq 0$ et $i \neq 1$.

Dans [2] et [3], Spitzer et Liggett définissent le processus du Potlatch avec une seule loi q sur $\mathbb{Z}$, ce que l'on retrouve ici en prenant comme mesure $p(dx)$ une mesure de Dirac. Nous allons montrer qu'il est possible d'étudier ce processus par nos méthodes et retrouver ainsi facilement les principaux résultats de [2] et [3].

Pour ce qui est de la construction et de l'existence du processus, la méthode utilisée dans le paragraphe II ne fonctionne que si la portée des lois q_x est uniformément finie. Dans le cas général, on est amené à construire une suite de processus sur les espaces $(\mathbb{R}^+)^{[-n,n]}$ et à montrer que les lois de ces processus sont tendues, d'où l'existence d'un processus-limite. Pour l'étude du processus, on peut reprendre les différentes propositions du paragraphe III. On note $\xi^\alpha(t)$ le processus du Potlatch construit d'état initial α. Il est clair que, de la même manière que dans la proposition I, on a $E\xi_i^\alpha(t) = E\alpha_i = C$. Pour étudier les moments de second ordre, posons $F(t) = \{ f_i(t) ; i \in \mathbb{Z} \}$ et $A = \{ (a_{ij}), (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \}$ la matrice définie par :

$$a_{00} = \int_0^1 p(dx)\Big(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (q_x(i))^2 - 1\Big) \; ; \qquad a_{0j} = \int_0^1 p(dx)\Big(\sum_{i \in \mathbb{Z}} q_x(i)q_x(i + j)\Big) :$$

si $i \neq 0$

$$a_{ii} = \int_0^1 p(dx)(2q_x(0) - 2) \; ;$$

si $i \neq 0$ et $i \neq j$

$$a_{ij} = \int_0^1 p(dx)(q_x(j - i) + q_x(i - j))$$

On a alors de la même manière que dans la proposition 2 :

PROPOSITION 8. — $F'(t) = F(t)A$.

A est la matrice du générateur infinitésimal d'un processus de saut sur $\mathbb{Z}$. Ce processus de saut est une marche aléatoire perturbée en 0. Il est facile de constater que ce processus est récurrent nul et que si $q_x(i) = q_x(-i)$, il admet comme mesure invariante β :

$$\beta(0) = \frac{2}{\int_0^1 p(dx)(1 + q_x(0))} \; ; \qquad \text{si } i \neq 0 \quad \beta(i) = \frac{\int_0^1 p(dx)(1 + q_x(0) - q_x(i))}{\int_0^1 p(dx)(1 + q_x(0)}$$

Posons $G(t) = F(t) - \beta C^2$. Il est clair que $G'(t) = G(t)A$.

D'autre part, si $\sum_{i \in \mathbb{Z}} | E\alpha_0\alpha_i - C^2 | < +\infty$ alors $\sum_{i \in \mathbb{Z}} | E\alpha_0\alpha_i - C^2\beta(i) | < +\infty$ et on peut refaire le même raisonnement que dans la proposition 3 pour obtenir :

PROPOSITION 9. — Si $\sum_{i \in \mathbb{Z}} | E\alpha_0\alpha_i - C^2 | < +\infty$ et si $q_x(i) = q_x(-i)$ alors

$$\lim_{t \nearrow +\infty} E(\xi_0(t))^2 = C^2 \frac{2}{\int_0^1 p(dx)(1 + q_x(0))} \; ; \qquad \text{si} \quad | i | \geqslant 1$$

$$\lim_{t \nearrow +\infty} E\xi_0(t)\xi_i(t) = C^2 \frac{\int_0^1 p(dx)(1 + q_x(0) - q_x(i))}{\int_0^1 p(dx)(1 + q_x(0))}$$

Maintenant, on peut refaire la même chose que dans les propositions 4, 5, 6 et 7. En effet, la proposition 4 n'utilise que le caractère linéaire de la transformation et le fait que $E\xi_i(t)$ soit constante. On obtient alors :

THÉORÈME 10. — Si $q_x(i) = q_x(-i)$ et si $\alpha = (\alpha, i \in \mathbb{Z})$ est tel que

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} | E(\alpha_0\alpha_i) - (E\alpha_0)^2 | < +\infty,$$

alors la loi de $\xi^\alpha(t)$ converge vers une probabilité ν sur E invariante par translation telle que :

$$\nu(\xi_0) = E\alpha_0 \; ; \qquad \nu\left(\xi_0^2\right) = (E\alpha_0)^2 \frac{2}{\int_0^1 p(dx)(1 + q_x(0))}$$

et si $| i | \geqslant 1$

$$\nu(\xi_0\xi_i) = (E\alpha_0)^2 \frac{\int_0^1 p(dx)(1 + q_x(0) - q_x(i))}{\int_0^1 p(dx)(1 + q_x(0))}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. M. PIERSON, On a class of random motions of point processes involving interaction. *Adv. Appl. Prob.*, t. **10**, 1978, p. 613-632.

[2] F. SPITZER, Infinite systems with locally interacting systems, 1980, *(à paraître)*.

[3] T. M. LIGGETT et F. SPITZER, Ergodic theorems for coupled random walks and other systems with locally interacting components, 1980, *(à paraître)*.

(Manuscrit reçu le 25 janvier 1980).