ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. COCOZZA
A. GALVES
M. ROUSSIGNOL

Étude de deux évolutions markoviennes de processus ponctuels sur R par des méthodes d'association

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 3 (1979), p. 235-259
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_3_235_0>

© Gauthier-Villars, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XV, n° 3, 1979, p. 235-259.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Étude de deux évolutions markoviennes de processus ponctuels sur $\mathbb{R}$ par des méthodes d'association

par

C. COCOZZA (**), A. GALVES (*), M. ROUSSIGNOL (**)
Laboratoire de Probabilités, Tour 56,
Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous étudions deux modèles d'évolution de processus ponctuels sur $\mathbb{R}$. Le premier (resp. : deuxième) modèle est semblable au processus de contact (resp. : processus d'exclusion simple) sur $\mathbb{Z}$. Dans le premier cas, nous démontrons que, si le coefficient de naissance est assez petit, le système est ergodique, et si ce coefficient est suffisamment grand, il y a seulement deux probabilités invariantes extrémales. Dans le second cas nous exhibons une famille de mesures invariantes. Notre outil principal est la méthode d'association due à Harris *et al.*, généralisée de manière appropriée à $\mathbb{R}$.

SUMMARY. — In this paper, we study two models of evolutions for point processes on $\mathbb{R}$. The first (resp. : second) model is similar to the contact process (resp. : the symmetric exclusion process) on $\mathbb{Z}$. In the first case, we prove that, if the birth coefficient is small enough, the system is ergodic, and if this coefficient is sufficiently big, there are only two invariant extremal probabilities. In the second case we exhibit a family of invariant measures. Our main tool is the association method due to Harris *and al.*, conveniently developed on $\mathbb{R}$.

(*) Instituto de Mátematica e Estatistica, Universidade de S. Paulo, Caixa Postal 20570 (Ag. Iguatemi), Sao Paulo, Brésil.
(**) Membre du Laboratoire Associé au C. N. R. S., n° 224, Processus stochastiques et Applications.

© Gauthier-Villars.

I. INTRODUCTION

Les évolutions de processus ponctuels sur $\mathbb{R}$ ont encore été peu étudiées. Des résultats d'existence et d'unicité des évolutions et l'existence de mesures invariantes ont été obtenus dans [*2*], [*3*], [*8*], [*9*], [*13*].

Ici nous nous proposons d'étudier deux modèles particuliers et de donner des théorèmes ergodiques à l'aide de méthodes d'association. Cette notion a été utilisée dans [*1*], [*4*], [*5*], [*6*], [*7*], [*10*], [*12*], pour étudier des évolutions sur $\mathbb{Z}$. Elle permet de ramener l'étude d'un système infini de particules à celle d'un système fini. Nous montrons qu'elle peut être généralisée fructueusement à des systèmes sur $\mathbb{R}$: nous associons à des évolutions markoviennes de processus ponctuels sur $\mathbb{R}$ des processus à valeurs sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ qui sont plus simples à étudier.

Le premier modèle est semblable au processus de contact sur $\mathbb{Z}$ étudié dans [*4*], [*5*], [*6*], [*7*]. Il s'agit d'un processus de naissance et mort. Une particule ne peut apparaître en un point que s'il y a déjà au moins une autre particule dans un voisinage de ce point. D'autre part les particules peuvent disparaître spontanément. Nous donnons des conditions qui impliquent dans un cas la disparition du système et dans un autre cas l'existence d'exactement deux probabilités invariantes extrémales dont nous précisons les domaines d'attraction.

Le deuxième modèle est apparenté au processus d'exclusion simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ étudié dans [*10*] et [*12*]. Le processus évolue par permutation d'intervalles de $\mathbb{R}$. Nous montrons qu'il admet un associé du même type et nous exhibons une famille de mesures invariantes.

L'essentiel de nos techniques repose sur l'additivité c'est-à-dire le fait qu'il existe des versions de ces processus pour lesquelles la configuration du système à chaque instant, partant d'une configuration initiale η, est la réunion des configurations obtenues en partant de chaque point de η. Ces versions sont construites à l'aide de processus ponctuels de Poisson sur l'espace temps.

II. ÉTUDE DU PROCESSUS DE CONTACT

1. Notations et définitions.

Nous notons E l'espace des sous-ensembles dénombrables de $\mathbb{R}$ sans point d'accumulation (dans $\mathbb{R}$) et $\hat{\mathrm{E}}$ l'ensemble des réunions dénombrables d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ telles que sur tout compact il n'y ait qu'un nombre fini d'intervalles. Nous munissons $\hat{\mathrm{E}}$ de la tribu $\hat{\mathscr{E}}$ engendrée par les fonc-

tions θ_K, où K est un compact de $\mathbb{R}$, définies de la façon suivante : pour tout A dans $\hat{E}$, $\theta_K(A) = 1$ si $A \cap K \neq \emptyset$ et $\theta_K(A) = 0$ sinon. Nous désignons par $\mathscr{E}$ la trace sur E de $\hat{\mathscr{E}}$. $(E, \mathscr{E})$ n'est rien d'autre que l'espace des mesures ponctuelles simples sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu habituelle. Les lettres grecques η, ξ, ζ, ... désignent des éléments de E ; les lettres latines majuscules désignent des éléments de $\hat{E}$. Nous appelons $\mathscr{F}$ (resp $\hat{\mathscr{F}}$) l'ensemble des fonctions mesurables bornées de E (resp $\hat{E}$) dans $\mathbb{R}$ qui ne dépendent que de ce qui se passe dans un compact (c'est-à-dire que pour toute fonction f de $\mathscr{F}$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ tel que si $\xi \cap K = \eta \cap K$ alors $f(\xi) = f(\eta)$).

Nous nous donnons deux nombres positifs M et N.

DÉFINITION 1. — Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, (\mathfrak{A}_t ; t \in \mathbb{R}_+), P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration. Nous appelons processus de contact sur E de paramètres M et N un processus de Markov sur E, $[(\xi_t^\eta, t \in \mathbb{R}_+), \eta \in E]$, adapté à la filtration $(\mathfrak{A}_t)$, homogène dans le temps et tel que :

— $P(\xi_0^\eta = \eta) = 1$,

— pour toute fonction f de $\mathscr{F}$,

$$f(\xi_t^\eta) - f(\xi_0^\eta) - \int_0^t Lf(\xi_s^\eta)ds$$

soit une $(P, \mathfrak{A}_t)$ martingale où $Lf(\eta)$ s'écrit pour tout η dans E :

$$Lf(\eta) = \int_{\mathbb{R}} dx \theta_{[x-N, x+N]}(\eta) [f(\eta \cup \{x\}) - f(\eta)] + \int_{\mathbb{R}} [f(\eta \setminus]x - M, x + M[) - f(\eta)]dx$$

DÉFINITION 2. — Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, (\mathfrak{A}_t ; t \in \mathbb{R}_+), P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration. Nous appelons processus de contact sur $\hat{E}$ de paramètres M et N un processus de Markov sur $\hat{E}$, $[(C_t^A, t \in \mathbb{R}_+), A \in \hat{E}]$, adapté à la filtration $(\mathfrak{A}_t)$, homogène dans le temps et tel que :

— $P(C_0^A = A) = 1$,

— pour toute fonction f de $\hat{\mathscr{F}}$,

$$f(C_t^A) - f(C_0^A) - \int_0^t \hat{L}f(C_s^A)ds$$

soit une $(P, \mathfrak{A}_t)$ martingale où $\hat{L}f(A)$ s'écrit pour tout A dans $\hat{E}$:

$$\hat{L}f(A) = \int_{\mathbb{R}} \theta_{\{x\}}(A) [f(A \cup [x - N, x + N]) - f(A)]dx + \int_{\mathbb{R}} [f(A \setminus]x - M, x + M[) - f(A)]dx$$

DÉFINITION 3. — Soient deux processus de Markov $[(\xi_t^\eta, t \in \mathbb{R}_+), \eta \in E]$ et $[(C_t^A, t \in \mathbb{R}_+), A \in \hat{E}]$ définis sur deux espaces probabilisés

$$(\Omega, \mathfrak{A}, (\mathfrak{A}_t ; t \in \mathbb{R}_+), P) \qquad \text{et} \qquad (\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{A}}, (\bar{\mathfrak{A}}_t ; t \in \mathbb{R}_+), \bar{P}),$$

à valeurs dans E et $\hat{E}$, tels que $P(\xi_0^\eta = \eta) = 1$ et $\bar{P}(C_0^A = A) = 1$, homogènes dans le temps. Ils sont dits associés si pour tout couple (η, A) tel que η ou A soit un compact de R et pour tout t de $\mathbb{R}_+$:

$$P(\xi_t^\eta \cap A \neq \emptyset) = \bar{P}(C_t^A \cap \eta \neq \emptyset)$$

2. Construction du processus.

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espace de probabilité sur lequel sont définis deux processus ponctuels de Poisson indépendants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ d'intensité la mesure de Lebesgue. Le premier processus de Poisson contrôlera les morts du processus de contact, le deuxième les naissances. Nous désignons par N^1 et N^2 ces deux processus. A chaque élément ω de Ω, les deux processus de Poisson font correspondre un ensemble dénombrable de points de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Chaque point $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ de cet ensemble, chargé par le processus de mort, sera entouré par un intervalle horizontal de longueur 2M, soit $]x - M, x + M[\times \{ t \}$. De même chaque point (x, t) de cet ensemble chargé par le processus de naissance sera entouré par un intervalle horizontal de longueur 2N, soit $[x - N, x + N] \times \{ t \}$. Nous pouvons supposer que chaque ω de Ω ne charge au plus qu'un point sur chaque droite horizontale $\mathbb{R} \times \{ t \}$ pour tout t de $\mathbb{R}_+$.

Maintenant pour chaque ω de Ω et chaque x de $\mathbb{R}$, nous définissons l'évolution $t \to \xi_t^x(\omega)$ de la mesure ponctuelle simple de support initial $\{ x \}$ par le dessin suivant sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$: partant du point $(x, 0)$, on trace la demi-droite verticale $\{ (x, s), s \geq 0 \}$ et on l'arrête dès qu'elle rencontre un intervalle horizontal entourant un point de mort, c'est-à-dire à l'instant $\inf \{ s \geq 0 / N^1(\omega,]x - M, x + M[\times [0, s]) = 1 \}$.

D'autre part avant cet instant, chaque fois que cette demi-droite rencontre un intervalle entourant un point de naissance, une nouvelle demi-droite verticale apparaît au centre de cet intervalle. Cette nouvelle demi-droite s'arrêtera et engendrera de nouvelles demi-droites selon les mêmes règles (cf. fig. 1). Nous définissons $\xi_t^x(\omega)$ comme l'ensemble de points de $\mathbb{R}$ obtenu par l'intersection de la droite horizontale $\mathbb{R} \times \{ t \}$ avec toutes les demi-droites verticales obtenues ainsi et qui n'auront pas encore été coupées par un intervalle de mort. Maintenant nous définissons le pro-

FIG. 1. — × : point chargé par N^1 ; • : point chargé par N^2.

cessus $(\xi_t^\eta)_{t \geq 0}$ décrivant l'évolution du système ayant $\eta \in E$ comme configuration initiale par :

$$\xi_t^\eta(\omega) = \bigcup_{x \in \eta} \xi_t^x(\omega).$$

Cette construction est la généralisation naturelle pour des systèmes sur $\mathbb{R}$ de celles faites dans [*1*] et [*7*] et est très proche de celle faite dans [*9*].

Nous nous bornerons donc ici à signaler les propriétés les plus importantes du processus ainsi défini. Les propriétés d'indépendance et d'invariance par translation du processus de Poisson ont pour conséquence le caractère markovien et homogène dans le temps du processus construit.

Nous allons montrer que

$$f(\xi_t^\eta) - f(\xi_0^\eta) - \int_0^t \mathrm{L} f(\xi_s^\eta) ds$$

est une $(\mathfrak{A}_t, \mathrm{P})$ martingale, où L est l'opérateur donné dans la définition 1 et $\mathfrak{A}_t$ la tribu engendrée par les processus de Poisson jusqu'à l'instant t c'est-à-dire par les variables aléatoires $N^i(\Gamma \times]0, s])$ $(i = 1, 2, \Gamma$ borélien de $\mathbb{R}$, $0 < s \leqslant t)$.

Les processus N^1 et N^2 n'ayant aucun saut commun, la construction du processus ξ^η montre que :

$$f(\xi_t^\eta) - f(\xi_0^\eta) = \int 1_{0<s\leqslant t}[f(\xi_{s^-}^\eta \cup \{x\}) - f(\xi_{s^-}^\eta)]\theta_{[x-\mathrm{N}, x+\mathrm{N}]}(\xi_{s^-}^\eta)\mathrm{N}^2(dx, ds)$$
$$+ \int 1_{0<s\leqslant t}[f(\xi_{s^-}^\eta \setminus]x - \mathrm{M}, x + \mathrm{M}[) - f(\xi_{s^-}^\eta)]\mathrm{N}^1(dx, ds)$$

Les fonctions intégrées par rapport aux processus N^i $(i = 1, 2)$ étant adaptées et continues à gauche, les propriétés de projection prévisible des processus de Poisson (c'est-à-dire le fait que, pour tout borélien borné Γ, $\int 1_\Gamma(x) 1_{0<s\leq t}(N^i(dx, ds) - dxds)$ soit une martingale) donnent la propriété cherchée.

Nous avons donc bien vérifié que le processus construit est un processus de contact au sens de la définition 1.

Passons maintenant à la construction du processus de contact sur $\hat{E}$. Il est défini lui aussi sur un espace $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ servant de base à deux processus ponctuels de Poisson indépendants N^1 et N^2 et dont les points seront à nouveau entourés par des intervalles de longueurs 2M et 2N respectivement. Nous nous donnons un point ω de Ω et un intervalle compact K de $\mathbb{R}$. Nous allons définir la trajectoire $s \geq 0 \rightarrow C_s^K(\omega) \in \hat{E}$ de la façon suivante : partant du segment horizontal $K \times \{0\}$ nous « faisons monter » une bande verticale, c'est-à-dire que nous construisons l'ensemble $\{(x, s), x \in K, s \geq 0\}$ jusqu'à ce que nous rencontrions, soit un point chargé par le processus de naissance, soit un intervalle entourant un point de mort. Dans le premier cas, soit (x, u) le premier point de naissance rencontré ; à partir de l'ordonnée u, nous élargissons la bande de façon à ce que sa section horizontale devienne $K \cup [x - N, x + N]$. Dans le deuxième cas, si (x, u) est le centre du premier intervalle de mort rencontré, alors nous rognons la bande de manière à ce que sa section horizontale devienne à partir de l'ordonnée u, $K \setminus]x - M, x + M[$ (cf. fig. 2). Nous recommençons ainsi à chaque

FIG. 2.

rencontre soit d'un point de naissance, soit d'un intervalle de mort. Nous définissons $C_s^K(\omega)$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ comme le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par l'intersection entre la droite horizontale $\mathbb{R} \times \{ s \}$ et la bande que nous avons construite. Maintenant pour tout A dans $\hat{E}$ et pour tous s dans $\mathbb{R}_+$, nous définissons $C_s^A(\omega) = \bigcup_n C_s^{K_n}(\omega)$ où $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles compacts de $\mathbb{R}$ tels que $\bigcup_n K_n = A$; $C_s^A(\omega)$ ne dépend pas de la suite (K_n) choisie. Nous avons ainsi défini un processus de Markov, homogène dans le temps à valeurs $\hat{E}$ et d'état initial A. Il est facile de vérifier comme précédemment que pour toute fonction f de $\hat{\mathscr{F}}$,

$$f(C_t^A) - f(C_0^A) - \int_0^t \hat{L} f(C_s^A) ds$$

est une $(\mathfrak{A}_t, P)$ martingale où :

$$\hat{L} f(A) = \int_{\mathbb{R}} [f(A \setminus]x - M, x + M[) - f(A)] dx + \int_{\mathbb{R}} \theta_{\{x\}}(A) [f(A \cup [x - N, x + N]) - f(A)] dx$$

et donc que le processus construit est bien un processus de contact à valeurs $\hat{E}$, au sens de la définition 2.

PROPOSITION 1. — Les deux processus de contact sur E et $\hat{E}$ construits précédemment sont associés.

Démonstration. — Nous allons considérer deux versions de ces processus définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ et avec l'aide des mêmes processus de Poisson N^1 et N^2 sur $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Le processus de contact $\{ (\xi_s^\eta)_{s \geq 0}, \eta \in E \}$ à valeurs dans E est construit comme ci-dessus. Maintenant pour tout $t > 0$, nous allons construire une version $\{ ({}_tC_s^K)_{0 \leq s \leq t}, K \in \hat{E} \}$ du processus de contact sur $\hat{E}$ entre 0 et t, en suivant le procédé décrit plus haut, mais en renversant le temps : si K est compact, à partir de la droite $\mathbb{R} \times \{ t \}$, nous faisons descendre une bande verticale, de section horizontale K ; lorsque cette bande rencontre un point de naissance ou un intervalle de mort elle augmente ou se rétrécit en suivant le procédé déjà décrit. Pour tout s appartenant à $[0, t]$ nous définissons ${}_tC_s^K$ comme le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ intersection de la bande descendante et de la droite horizontale $\mathbb{R} \times \{ t - s \}$. Si K appartient à $\hat{E}$ mais n'est pas compact, K est réunion d'une suite de compacts K_n et nous posons ${}_tC_s^K = \bigcup_n {}_tC_s^{K_n}$. Compte tenu de l'invariance des lois des processus de

Poisson par symétrie et par translation le processus $\{ ({}_tC_s^K)_{0 \leq s \leq t}, K \in \hat{E} \}$ est bien une version du processus de contact sur $\hat{E}$ entre 0 et t. Maintenant comme nous avons utilisé les mêmes processus de Poisson sous-jacents, il est clair vu notre procédé de construction (cf. fig. 3) que si K est un intervalle compact

$$\xi_t^x(\omega) \cap K \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in {}_tC_t^K(\omega).$$

FIG. 3.

Ceci entraîne que pour tout η et K appartenant à E et $\hat{E}$ respectivement

$$\xi_t^\eta(\omega) \cap K \neq \emptyset \Leftrightarrow \eta \cap {}_tC_t^K(\omega) \neq \emptyset$$

ce qui démontre la propriété d'association. ■

Remarque. — Il est possible de définir un processus de contact sur E lorsque $N = +\infty$. On construit de la même manière que lorsque $N < \infty$ le processus sur un compact de $\mathbb{R}$. Étant donné une partition de $\mathbb{R}$ en compacts K_n, le processus sur $\mathbb{R}$ tout entier est alors la réunion des processus sur chaque K_n.

3. **Étude du processus de contact à valeurs dans** E.

L'espace E des mesures ponctuelles simples sur $\mathbb{R}$ est muni de la topologie de la convergence faible ; $\mathscr{E}$ est alors la tribu borélienne. On désigne

par $S(t)$ le semi-groupe du processus de Markov ξ_t de contact à valeurs dans E construit au paragraphe précédent.

Étant donnés deux nombres positifs N_1 et N_2 $(0 < N_1 < N_2 \leqslant \infty)$ désignons par $\xi_{t,1}^{\eta}$ et $\xi_{t,2}^{\eta}$ les processus dont les intervalles de naissances sont de taille $2N_1$ et $2N_2$ respectivement et dont les intervalles de mort sont de taille 2M, construits sur les mêmes processus de Poisson sous-jacents. La construction montre que $\xi_{t,1}^{\eta}(\omega) \subset \xi_{t,2}^{\eta}(\omega)$. Le processus de contact est donc croissant en N.

Le processus de contact est attractif dans le sens suivant :

PROPOSITION 2. — Si m_1 et m_2 sont deux probabilités sur $(E, \mathscr{E})$ telles que $m_1 \leq m_2$ (c'est-à-dire telles que pour toute fonction f positive, croissante, borélienne de E dans $\mathbb{R}$, $\int f dm_1 \leq \int f dm_2$) alors pour tout t, $m_1 S(t) \leq m_2 S(t)$.

Démonstration. — La propriété d'additivité $\xi_t^{\eta} = \bigcup_{x \in \eta} \xi_t^x$ entraîne que pour tout $t \geq 0$ et toute fonction croissante f, la fonction $\eta \to E f(\xi_t^{\eta})$ est croissante ; donc

$$\int f d(m_1 S(t)) = \int m_1(d\eta) E[f(\xi_t^{\eta})] \leq \int m_2(d\eta) E[f(\xi_t^{\eta})]$$
$$\leq \int f d(m_2 S(t)) \qquad \blacksquare$$

Nous allons chercher à identifier les mesures invariantes du processus. L'état vide étant absorbant, la mesure de Dirac sur le vide ε_{ϕ} est toujours invariante. Le problème est de savoir si c'est la seule et dans le cas contraire de déterminer les mesures invariantes extrémales.

PROPOSITION 3. — Il existe une mesure de probabilité m sur E telle que pour tout η dans E, pour tout $t \geq 0$, pour toute fonction f de E dans $\mathbb{R}$, positive et croissante, $\varepsilon_{\eta} S(t)(f) \leq m_{\eta}(f)$ où m_{η} est l'image de m par l'application de E dans E qui à $\xi \in E$ associe $\xi \cup \eta$.

Démonstration. — Appelons $T(t)$ le semi-groupe du processus de contact ζ_t^{η} à valeurs dans E de paramètres M et $+\infty$.

Il est clair que si f est une fonction positive croissante de E dans $\mathbb{R}$, $\varepsilon_{\eta} S(t)(f) \leq \varepsilon_{\eta} T(t)(f)$. Considérons maintenant la mesure ponctuelle $\mu(\omega)$ sur $\mathbb{R}$ construite de la manière suivante : on projette sur $\mathbb{R}$ les points du

processus de Poisson de naissance N^2 qui n'ont pas d'intervalle de mort sous eux soit

$$\mu(.) = \sum_x \varepsilon_x 1_{\{N^2(x,B(x))=1;N^1(]x-M,x+M[\times[0,B(x)])=0\}}$$

où $B(x)$ est l'ordonnée du point d'abscisse x chargé par N^2 s'il existe. μ est bien un processus ponctuel simple car pour tout compact et presque tout ω, il y a un nombre fini d'intervalles de mort qui, projetés sur $\mathbb{R}$ recouvrent ce compact, donc un nombre fini de point de naissance se projettent pour donner $\mu(\omega)$. Considérons maintenant ζ_t^ϕ :

$$\zeta_t^\phi = \sum_x \varepsilon_x 1_{\{N^2(x,B(x))=1;B(x)\leq t;N^1(]x-M,x+M[\times[B(x),t])=0\}}$$

L'invariance par symétrie de la loi des processus de Poisson montre que ζ_t^ϕ a même loi que :

$$\sum_x \varepsilon_x 1_{\{N^2(x,B(x))=1;B(x)\leq t;N^1(]x-M,x+M[\times[0,B(x)]=0\}}$$

Donc si f est positive, croissante $\varepsilon_\phi T(t)(f) \leq m(f)$ où m est la loi de μ. Si la configuration initiale est η, $\mu \cup \eta$ est encore presque sûrement une mesure ponctuelle simple et $\varepsilon_\eta T(t)(f) \leq m_\eta(f)$. ■

LEMME 4. — Si $N(\eta, K)$ représente le nombre de points de η dans K, pour tout K intervalle borné

$$\mathbb{P}(N(\xi_t^\eta, K) > C) \leq \frac{N(\eta, K) \vee \dfrac{l(K)}{2M}}{C}$$

On désigne par $l(K)$ la longueur de K.

Démonstration. — Si ζ_t^η est le processus utilisé dans la proposition précédente on a :

$$E[N(\xi_t^\eta, K)] \leq E[N(\zeta_t^\eta, K)] ;$$

il est facile de vérifier que la fonction $\eta \mapsto N(\eta, K)$ est dans $L_1(P)$ et qu'on peut lui appliquer la propriété de martingale, ce qui donne :

$$E[N(\zeta_t^\eta, K)] = N(\eta, K) + \int_0^t ds \int dx\, 1_{x\in K} - E\int_0^t ds \int dx N(\zeta_s^\eta,]x-M, x+M[\cap K)$$

Or

$$\int dx \mathrm{N}(\eta,]x - \mathrm{M}, x + \mathrm{M}[\cap \mathrm{K}) = \int dx \sum_{y \in \eta} 1_y(]x - \mathrm{M}, x + \mathrm{M}[) 1_y(\mathrm{K}) = 2\mathrm{M}\mathrm{N}(\eta, \mathrm{K}),$$

donc si $f(t) = \mathrm{E}[\mathrm{N}(\zeta_t^\eta, \mathrm{K})]$, $f(t)$ vérifie l'équation :

$$f(t) = f(0) + l(\mathrm{K})t - 2\mathrm{M}\int_0^t f(s)ds$$

et par conséquent

$$f(t) = \frac{l(\mathrm{K})}{2\mathrm{M}} + e^{-2\mathrm{M}t}\left[\mathrm{N}(\eta, \mathrm{K}) - \frac{l(\mathrm{K})}{2\mathrm{M}}\right].$$

Nous en déduisons

$$\mathrm{E}[\mathrm{N}(\zeta_t^\eta, \mathrm{K})] \leq \mathrm{N}(\eta, \mathrm{K}) \vee \frac{l(\mathrm{K})}{2\mathrm{M}},$$

ce qui démontre le lemme. ■

PROPOSITION 5. — Pour tout η $\{ \varepsilon_\eta \mathrm{S}(t), t \geq 0 \}$ est une famille de probabilités sur $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$ relativement compact.

Démonstration. — Nous allons montrer que $\varepsilon_\eta \mathrm{S}(t)$ est relativement compact dans l'ensemble des probabilités sur l'ensemble des mesures ponctuelles (non nécessairement simples) sur $\mathbb{R}$. Comme $\varepsilon_\eta \mathrm{S}(t) \leq m_\eta$ et que m_η ne charge que les mesures ponctuelles simples, la proposition sera démontrée.

Pour cela il suffit de vérifier le critère de Prohorov, ce qui se fait facilement à l'aide du lemme précédent. ■

THÉORÈME 6. — M étant fixé, il existe un élément N^* de $\mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$ tel que

. si $\mathrm{N} < \mathrm{N}^*$, ε_ϕ est l'unique mesure invariante,

. si $\mathrm{N} > \mathrm{N}^*$ il y a plusieurs mesures invariantes ; de plus dans ce cas si τ^η désigne le temps d'extinction de ξ_t^η, alors $\mathrm{P}(\tau^\eta = \infty)$ est strictement positif.

Démonstration. — Du fait de la « croissance en N » de ξ_t^η, on peut définir N^* tel que :

pour $\mathrm{N} < \mathrm{N}^*$, $\forall \eta$, $\forall \mathrm{K}$ borné, $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{P}(\xi_t^\eta \cap \mathrm{K} \neq \emptyset)dt \xrightarrow[\mathrm{T}\uparrow\infty]{} 0$

$$\text{pour } N > N^*, \quad \exists \eta, \quad \exists K \text{ borné}, \ \overline{\lim_{T\uparrow\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T P(\xi_t^\eta \cap K \neq \emptyset)dt > 0$$

Pour $N < N^*$, si m désigne une mesure invariante on a :

$$m(\xi : \xi \cap K \neq \emptyset) = \int m(d\eta)\frac{1}{T}\int_0^T P(\xi_t^\eta \cap K \neq \emptyset)dt \underset{T\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $m = \varepsilon_\phi$.

Si $N > N^*$, donnons-nous une mesure ponctuelle simple η et un compact K tel que $\lim \frac{1}{T}\int_0^T P(\xi_t^\eta \cap K \neq \emptyset)dt > 0$. Il existe donc une sous-suite T_i telle que :

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} P(\xi_t^\eta \cap K \neq \emptyset)dt = a > 0 .$$

D'après la proposition 5, la famille de probabilités

$$\left\{ \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_\eta S(t)dt \, ; \, T \geqslant 0 \right\}$$

est relativement compacte donc, de la suite T_i, on peut extraire une sous-suite qui converge vers une mesure invariante m. Cette mesure vérifie $m(\xi \, ; \, \xi \cap K \neq \emptyset) \geqslant a > 0$ donc est différente de ε_ϕ.

Comme l'ensemble $(\xi_t^\eta \cap K \neq \emptyset)$ est inclu dans l'ensemble $(\xi_t^\eta \neq \emptyset)$ et que $\lim_{t\uparrow+\infty} \downarrow (\xi_t^\eta \neq \emptyset) = (\tau^\eta = \infty)$, on a :

$$a \leqslant \overline{\lim_T} \frac{1}{T}\int_0^T P(\xi_t^\eta \cap K \neq \emptyset)dt \leqslant \lim_T \frac{1}{T}\int_0^T P(\xi_t^\eta \neq \emptyset)dt = P(\tau^\eta = +\infty)$$

Or $(\tau^\eta = \infty) = \bigcup_{x\in\eta}(\tau^x = \infty)$ et $P(\tau^x = \infty)$ ne dépend pas de x, donc si ξ est quelconque $P(\tau^\xi = \infty) > 0$. ■

PROPOSITION 7. — N^* appartient à $\mathbb{R}$.

Démonstration. — On va se ramener à un processus de contact sur $\mathbb{Z}$ par discrétisation. On divise $\mathbb{R}$ en intervalles $\{ [x_i, x_{i+1}[, \, i \in \mathbb{Z} \}$ de longueur $N/2$, on suppose $N/2 > 2M$. On considère le processus sur $\mathbb{Z}$ défini par :

$$\bar{\xi}_t^\eta(i) = 1_{\{\xi_t^\eta[x_i+M, x_{i+1}-M] > 0\}}$$

$\bar{\xi}_t^\eta(i)$ passe de 0 à 1 si un point de ξ_t^η apparaît au temps t dans $[x_i + M, x_i - M]$ $\left(\text{de longueur } \frac{N}{2} - M\right)$, c'est-à-dire s'il existe, dans le schéma utilisé dans

la construction, un point (x, t) chargé par le processus de naissance et tel que x appartienne à l'ensemble $[x_i + \mathrm{M}, x_{i+1} - \mathrm{M}]$ et vérifie :

$$\xi_t^\eta([x - \mathrm{N}, x + \mathrm{N}]) \geq 1 .$$

On peut donc minorer $\bar{\xi}_t^\eta(.)$ par un processus sur $\mathbb{Z}$ qui passerait de 0 à 1 en i avec un taux égal à $\mathrm{N}/2 - 2\mathrm{M}$ si au moins un voisin est occupé, et nul sinon. $\bar{\xi}_t^\eta(i)$ passe de 1 à 0 si au temps t, tous les points de ξ_t^n dans $[x_i + \mathrm{M}, x_{i+1} - \mathrm{M}]$ sont « détruits » par un intervalle de mort. Au pire cela peut se passer avec un taux 2M et indépendamment sur chaque intervalle. On peut donc minorer $\bar{\xi}_t^\eta(i)$ par un processus de contact sur $\mathbb{Z}$ de générateur :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ 2\mathrm{M}\eta(i) + \left(\frac{\mathrm{N}}{2} - 2\mathrm{M}\right) 1_{\{\eta(i+1)+\eta(i-1) \geq 1\}}(1 - \eta(i)) \right\} [f(\eta^i) - f(\eta)]$$

et on sait d'après [5] que si N est assez grand, ce processus ne s'éteint pas. ■

4. Étude du processus de contact à valeurs dans $\hat{\mathrm{E}}$.

Si C appartient à $\hat{\mathrm{E}}$, C est constitué d'une réunion dénombrable d'intervalles fermés disjoints et sur tout compact, il n'y a qu'un nombre fini de tels intervalles. Les extrémités gauches et droites de ces intervalles constituent deux mesures ponctuelles simples sur $\mathbb{R}$ et nous munissons $\hat{\mathrm{E}}$ de la topologie induite par la topologie de la convergence faible de ces mesures : autrement dit, C_n converge vers C si les deux mesures ponctuelles associées à C_n convergent vers celles associées à C. Alors si K_n désigne le compact $[-n, +n]$, sont compacts les parties $\hat{\mathscr{K}}$ de $\hat{\mathrm{E}}$ ayant la propriété suivante : il existe une suite a_n de nombres positifs tels que si C appartient à $\hat{\mathscr{K}}$ le nombre de composantes connexes de $\mathrm{C} \cap \mathrm{K}_n$ est plus petit que a_n.

On désigne par $\hat{\mathrm{S}}(t)$ le semi-groupe du processus $\mathrm{C}_t^{\mathrm{A}}$ de contact à valeurs dans $\hat{\mathrm{E}}$ construit au premier paragraphe. Ce processus a les mêmes propriétés de croissance en N que le processus de contact à valeurs dans E.

PROPOSITION 8. — Si m_1 et m_2 dont deux probabilités sur $(\hat{\mathrm{E}}, \hat{\mathscr{E}})$ telles que $m_1 \leq m_2$, alors pour tout t, $m_1 \hat{\mathrm{S}}(t) \leq m_2 \hat{\mathrm{S}}(t)$.

Démonstration. — Du fait de l'additivité, la fonction $\mathrm{A} \to \mathrm{E}f(\mathrm{C}_t^{\mathrm{A}})$ est croissante ; on en déduit alors la proposition. ■

COROLLAIRE 9. — Pour toute fonction f positive et croissante, $\varepsilon_{\mathbb{R}} \hat{\mathrm{S}}(t) f$

décroît avec t ; en particulier pour tout sous-ensemble A borné de $\mathbb{R}$, $P(C_t^{\mathbb{R}} \cap A \neq \emptyset)$ décroît (et donc converge) lorsque t croît vers $+\infty$.

L'état ϕ est là aussi absorbant, donc ε_ϕ est une mesure invariante. Nous allons montrer l'existence d'une borne $\hat{N}^*$ ayant, pour le processus de contact sur $\hat{E}$, la même propriété de « séparation » que la borne N^* pour le processus de contact sur E. Pour cela il faut un résultat de compacité sur la famille $\{ \varepsilon_A \hat{S}(t) ; t \geq 0 \}$.

LEMME 10. — Si A appartient à $\hat{E}$ et si K est un intervalle borné, on note $\mathcal{N}(K, A)$ le nombre de composantes connexes de $K \cap A$. Alors

$$E\mathcal{N}(K, C_t^A) \leq \mathcal{N}(K, A) \vee \frac{l(K)}{2M}.$$

Démonstration. — Il est facile de vérifier que la fonction $A \mapsto \mathcal{N}(K, A)$ est dans $L_1(P)$ et qu'on peut lui appliquer la propriété de martingale ce qui donne :

$$\begin{aligned} E\mathcal{N}(K, C_t^A) - E\mathcal{N}(K, C_s^A) = \\ E\int_s^t du \int dx [1_{x \in C_s^A}(\mathcal{N}(K, C_s^A \cup [x - N, x + N] \\ - \mathcal{N}(K, C_s^A)) + (\mathcal{N}(K, C_s^A \setminus]x - M, x + M[) - \mathcal{N}(K, C_s^A))] \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que la quantité

$$\mathcal{N}(K, C_s^A \cup [x - N, x + N]) - \mathcal{N}(K, C_s^A)$$

est négative si $x \in C_s^A$. Pour évaluer l'autre terme, notons C_i, $i = 1, \ldots, n$ les composantes connexes de $C_s^A \cap K$. Alors

$$\begin{aligned} \int dx [\mathcal{N}(K, C_s^A \setminus]x - M, x + M[) - \mathcal{N}(K, C_s^A)] \\ = \sum_{i=1}^{n} (l(C_i) - 2M) \leq l(K) - 2M\mathcal{N}(K, C_s^A). \end{aligned}$$

Donc si nous notons $f(t) = E\mathcal{N}(K, C_t^A)$, cette fonction vérifie l'inéquation $f(t) - f(s) \leq l(K)(t - s) - 2M\int_s^t f(u)du$. On en déduit le résultat en utilisant le lemme de Gronwall. ■

PROPOSITION 11. — Pour tout A dans $\hat{E}$, $\varepsilon_A \hat{S}(t)$ est une famille de probabilités sur $(\hat{E}, \hat{\mathscr{E}})$ relativement compacte.

Démonstration. — Nous voulons vérifier le critère de Prohorov : si $K_n = [-n, n]$, nous devons démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite de constantes a_n telles que : $\forall t$, $P[\mathcal{N}(K_n, C_t^A) \leq a_n, \forall n] \geq 1 - \varepsilon$.

Ceci se fait par le même raisonnement que dans la proposition 5, à l'aide du lemme précédent. ■

THÉORÈME 12. — M étant fixé, il existe $\hat{N}^*$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que :

. si $N < \hat{N}$ ε_ϕ est l'unique mesure invariante et $\varepsilon_A \hat{S}(t) \underset{t \uparrow \infty}{\rightarrow} \varepsilon_\phi$ pour tout A dans $\hat{E}$,

. si $N > \hat{N}^*$ il y a plusieurs mesures invariantes.

Démonstration. — Le corollaire 9 et la propriété de croissance en N du processus permet de définir $\hat{N}^*$ tel que : si $N < \hat{N}^*$ $\forall K$ compact

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(C_t^{\mathbb{R}} \cap K \neq \emptyset) = 0$$

si $N > N^*$ il existe un compact K tel que

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(C_t^{\mathbb{R}} \cap K \neq \emptyset) > 0 .$$

Si $N < \hat{N}^*$ on a également que $\lim_{t \uparrow \infty} P(C_t^A \cap K \neq \emptyset) = 0$ pour tout ensemble A dans $\hat{E}$.

On en déduit, de la même façon que dans le théorème 6 que si m est une mesure invariante elle est nécessairement égale à ε_ϕ et que $\varepsilon_A \hat{S}(t)$ converge faiblement vers ε_ϕ pour tout A dans $\hat{E}$.

Si $N > \hat{N}^*$, l'existence d'une mesure invariante différente de ε_ϕ est claire étant donnée la relative compacité et de la décroissance de la famille $\{\varepsilon_{\mathbb{R}} \hat{S}(t), t \geqslant 0\}$. ■

La proposition suivante est le premier exemple d'un renseignement obtenu sur le processus à valeurs dans E grâce au processus associé.

PROPOSITION 13. — Pour $N < \hat{N}^*$, pour tout η fini, τ^η est presque sûrement fini.

Démonstration. — Si η est fini on a par association

$$P(C_t^{\mathbb{R}} \cap \eta \neq \emptyset) = P(\xi_t^\eta \neq \emptyset) .$$

Par conséquent si N est strictement inférieur à $\hat{N}^*$ on obtient,

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(\xi_t^\eta \neq \emptyset) = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(\tau^\eta > t) = 0 . \quad ■$$

COROLLAIRE 14. — $\hat{N}^*$ appartient à $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Si $\hat{N}^* = \infty$, pour tout η fini et pour tout N, $P(\tau^\eta = \infty) = 0$ ce qui est contradictoire avec les propositions 6 et 7. ■

5. Étude du processus de contact lorsque N < M.

LEMME 15. — Pour tout η fini on a $E|\xi_t^\eta| \leq |\eta| e^{2(N-M)t}$ où $|\eta|$ désigne le nombre de points de η.

Démonstration. — Si $t > u$, on peut écrire

$$\begin{aligned} E|\xi_t^\eta| &= E|\xi_u^\eta| \\ &\quad + E\int_u^t ds \left\{ \int dx\, 1_{\{\xi_s^\eta \cap [x-N, x+N] \neq \emptyset\}} - \int dx \left[|\xi_s^\eta| - |\xi_s^\eta \setminus]x-M, x+M[| \right] \right\} \\ &= E|\xi_u^\eta| + \int_u^t ds E \int dx\, 1_{\{\xi_s^\eta \cap [x-N, x+N] \neq \emptyset\}} - 2M \int_u^t ds E|\xi_s^\eta| \\ &\leq E|\xi_u^\eta| + 2(N-M) \int_u^t ds E|\xi_s^\eta| \end{aligned}$$

On a donc le résultat d'après le lemme de Gronwall. ■

THÉORÈME 16. — Si η est fini et N < M, alors τ^η est p. s. fini.

Démonstration. — Le lemme ci-dessus montre que $\lim_{t \uparrow \infty} E|\xi_t^\eta| = 0$. L'inégalité $|\xi_t^\eta| \geq 1_{\{\xi_t^\eta \neq \emptyset\}}$ entraîne alors $\lim_{t \uparrow \infty} P(\xi_t^\eta \neq \emptyset) = 0$ et donc $P(\tau^\eta = \infty) = 0$. ■

L'étude du processus associé permet de donner des renseignements sur l'évolution de ξ_t^η si $|\eta| = \infty$.

LEMME 17. — $El(C_t^A) \leq l(A) e^{2(N-M)t}$.

Démonstration. — Si $t > u$ nous avons

$$\begin{aligned} El(C_t^A) = El(C_u^A) + E\int_u^t ds \int dx \{ & 1_{x \in C_s^A} [l(C_s^A \cup [x-N, x+N]) - l(C_s^A)] \\ & + [l(C_s^A \setminus]x-M, x+M[) - l(C_s^A)] \} \end{aligned}$$

L'égalité $l(C_s^A) - l(C_s^A \setminus]x-M; x+M[) = l(C_s^A \cap]x-M, x+M[)$ entraîne

$$\int dx\, [l(C_s^A) - l(C_s^A \setminus]x-M, x+M[)] = \int dx \int dy\, 1_{\{y \in C_s^A\}} 1_{|x-y| < M} = 2M l(C_s^A).$$

Un calcul analogue montre que

$$\int dx\, 1_{x \in C_s^A}\left[l(C_s^A \cup]x - N, x + N[) - l(C_s^A)\right] \leq 2N l(C_s^A).$$

Nous obtenons $El(C_t^A) \leq El(C_u^A) + 2(N - M)\int_u^t ds El(C_s^A)$ et le lemme de Gronwall permet de conclure. ■

THÉORÈME 18. — Si $N < M$, pour tout compact K et pour tout η dans E on a $\lim_{t \uparrow \infty} P(\xi_t^\eta \cap K \neq \emptyset) = 0$; par conséquent N^* est supérieur ou égal à M.

Démonstration. — La propriété d'association donne

$$P(\xi_t^\eta \cap K \neq \emptyset) = P(C_t^K \cap \eta \neq \emptyset)$$

il suffit donc de démontrer que $\lim_{t \uparrow \infty} P(C_t^K \neq \emptyset) = 0$, c'est-à-dire que $\hat{\tau}^K$ est p. s. fini si $\hat{\tau}^K$ est le temps d'extinction de C_t^K.

Comme $N < M$, choisissons ε tel que $N < M - 2\varepsilon$ et appelons $\bar{C}_t^{\bar{K}}$ le processus de contact à valeurs dans $\hat{E}$ associé aux paramètres $(N + 2\varepsilon, M - 2\varepsilon)$ partant d'un sous-ensemble $\bar{K}$ contenant K tel que $l(\bar{K}) \geq l(K) + \varepsilon$ et construit sur les mêmes processus de Poisson que C_t^K. Alors

$$\left[l(\bar{C}_t^{\bar{K}}) - l(C_t^K)\right] 1_{C_t^K \neq \emptyset} \geq \varepsilon\, 1_{C_t^K \neq \emptyset} \quad \text{donc} \qquad l(\bar{C}_t^{\bar{K}}) \geq \varepsilon\, 1_{C_t^K \neq \emptyset}$$

vue les propriétés de croissance du processus de contact. Comme $\lim_{t \uparrow \infty} El(\bar{C}_t^{\bar{K}}) = 0$ on en déduit que

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(C_t^K \neq \emptyset) = 0. \qquad ■$$

6. Étude du processus de contact lorsque N est très grand.

PROPOSITION 19. — Soit F un élément de $\mathscr{E}$; si pour $t > 0$ donné $\inf_{\eta \in F} P(\xi_t^\eta = \emptyset) > 0$ alors $\lim_{t \uparrow \infty} P\{\xi_t^\xi \neq \emptyset ; \xi_t^\xi \in F] = 0$ pour tout ξ appartenant à E.

Démonstration. — C'est une propriété classique des processus de Markov due à ce que ϕ est absorbant (cf. [7]). ■

Cette proposition est vraie pour le processus de contact à valeurs dans E et aussi pour celui à valeurs dans $\hat{E}$. On peut en déduire quelques propriétés :

PROPOSITION 20. — Si K est un compact de $\mathbb{R}$ alors

$$\lim_{t\uparrow\infty} P[C_t^A \neq \emptyset, C_t^A \subset K] = 0.$$

Démonstration. — Il faut montrer que $\inf_{A\subset K} P[C_t^A = \emptyset] > 0$. Or t étant fixé, il y a une probabilité strictement positive pour ne pas avoir de naissance dans K avant le temps t et pour avoir suffisamment de morts pour tuer tous les points de K. ■

PROPOSITION 21. — Soit $A_{n,l} = \{ \eta \in E ; \exists n$ intervalles I_i de longueur l tels que $\eta \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \}$ alors $\lim_{t\uparrow\infty} P[\xi_t^\xi \neq \emptyset ; \xi_t^\xi \in A_{n,l}] = 0$ pour tout ξ appartenant à E.

Démonstration. — Il faut démontrer que $\inf_{\eta\in A_{n,l}} P(\xi_t^\eta = \emptyset) > 0$.

Cela se fait de la même façon que ci-dessus. ■

On note R_t^η l'extrémité droite de la mesure ponctuelle ξ_t^η (qui est p. s. finie si $|\eta| < \infty$). Pour étudier R_t^η, nous allons comparer ξ_t^η à un processus $\bar{\xi}_t^\eta$ qui meurt de la même manière que ξ_t^η, mais qui naît seulement s'il y a déjà un point à une distance inférieure à N à gauche du point de naissance potentiel. En utilisant les mêmes processus de Poisson sous-jacents sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, ξ_t^η et $\bar{\xi}_t^\eta$ sont couplés de manière à ce que ξ_t^η contienne $\bar{\xi}_t^\eta$. D'autre part pour $\bar{\xi}_t^\eta$, il ne naît de point qu'à droite des points existants. On sait, de la même façon que pour ξ_t^η, qu'il existe $\bar{N}^* < \infty$ tel que pour $N > \bar{N}^*$, on ait $P(\bar{\tau}^\eta = \infty) > 0$, si $\bar{\tau}^\eta$ désigne le temps d'extinction de $\bar{\xi}_t^\eta$. Comme ξ_t^η contient $\bar{\xi}_t^\eta$, $\bar{N}^*$ est supérieur ou égal à N^*. On note $\bar{R}_s^\eta$ l'extrémité droite de $\bar{\xi}_t^\eta$.

PROPOSITION 22. — Si $|\eta| < \infty$, $a > 0$, $N > \bar{N}^*$, alors

$$\lim_{t\uparrow\infty} P\{ R_t^\eta \leq a, \tau^\eta = \infty \} = 0.$$

Démonstration. — La propriété de Markov donne :

$$P\{ R_{t+s}^\eta \leq a, \tau^\eta = \infty \} = \int P(d\omega)\, 1_{\{\xi_t^\eta(\omega)\neq\emptyset\}} \int P(d\omega')\, 1_{\{R_s^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') \leq a ; \tau^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') = \infty\}}$$

Or

$$\begin{aligned} &P\{ \omega' ; R_s^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') \leqslant a, \tau^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') = \infty \} \\ &\qquad \leqslant P\{ \omega' ; \bar{\tau}^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') < \infty \} + P\{ \omega' ; \bar{R}_s^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') \leqslant a, \bar{\tau}^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') = \infty \} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P\{\omega' ; \bar{R}_s^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') \leqslant a, \bar{\tau}^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') = \infty\} \\ \leqslant P\{\omega' ; \bar{R}_s^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') \leqslant a, \bar{\xi}_s^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') \neq \emptyset\} \\ \leqslant P\{\omega' ; \bar{\xi}_s^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') \neq \emptyset, \bar{\xi}_s^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') \subset A\} \end{aligned}$$

où A est un compact dépendant de $\xi_t^\eta(\omega)$ et de a ; d'après la proposition précédente, $\xi_t^\eta(\omega)$ étant fixé, cette quantité tend vers 0 si s tend vers $+\infty$.

Pour montrer que $\lim_{t\uparrow+\infty} P(\bar{\tau}^{\xi_t^\eta(\omega)}(\omega') < +\infty) = 0$, il suffit de prouver que $\lim_{t\uparrow+\infty} P\left[\bigcap_{x\in\xi_t^\eta(\omega)} (\bar{\tau}^x(\omega') < \infty)\right] = 0$. Comme N est supérieur à $\bar{N}^*$, on sait que $P(\bar{\tau}^0 < \infty)$ est strictement inférieure à 1. Donc pour ε_1 donné, il existe M tel que $[P(\bar{\tau}^0 < \infty)]^{M+1} < \varepsilon_1$. D'après la propriété de mélange du processus de Poisson sous-jacent, pour ε_2 donné, il existe l tel que si on a M + 1 points $x_0, x_1, \ldots, x_M$ mutuellement distants d'une longueur supérieure à l ; alors :

$$\left| P\left[\bigcap_{i=0}^{M} V_{x_i}(\bar{\tau}^0 < \infty)\right] - [P(\bar{\tau}^0 < \infty)]^{M+1} \right| \leq \varepsilon_2$$

où on note V_x la translation de x. Le nombre l étant donné, d'après la proposition précédente, pour tout ε_3, il existe T tel que pour tout t supérieur à T

$$P[\xi_t^\eta \neq \emptyset ; \xi_t^\eta \in A_{M,l}] \leq \varepsilon_3 .$$

Alors

$$\begin{aligned} \int P(d\omega)P(d\omega')\, 1_{\{\xi_t^\eta(\omega)\neq\emptyset\}}\, 1_{\{\bigcap_{x\in\xi_t^\eta(\omega)} V_x(\bar{\tau}^0(\omega')<\infty)\}} \\ \leq P(\xi_t^\eta \in A_{M,l} ; \xi_t^\eta \neq \emptyset) + \int P(d\omega)P(d\omega')\, 1_{\{(\xi_t^\eta(\omega)\notin A_{M,l}) ; \bigcap_{x\in\xi_t^\eta(\omega)} V_x(\bar{\tau}^0(\omega')<\infty)\}} \\ \leq \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \end{aligned}$$

car si $\xi_t^\eta(\omega)$ n'appartient pas à $A_{M,l}$, on peut trouver M + 1 points dans $\xi_t^\eta(\omega)$ à distance mutuelle plus grande que l. ■

En suivant la démarche de [*4*], nous allons donner un critère pour avoir des propriétés ergodiques.

PROPOSITION 23. — Si N est supérieur à $\bar{N}^*$, si η et K sont compacts

$$\begin{aligned} \lim_{t\uparrow\infty} P[\xi_t^\eta \cap K = \emptyset] = \lim_{t\uparrow\infty} P[C_t^K \cap \eta = \emptyset] \\ = P(\tau^\eta < \infty) + P(\tau^\eta = \infty)P(\hat{\tau}^K < \infty) \\ = P(\hat{\tau}^K < \infty) + P(\hat{\tau}^K = \infty)P(\tau^\eta < \infty) \end{aligned}$$

Démonstration. — Considérons les deux versions ξ_t^η et C_t^K des processus de contact sur E et $\hat{E}$ construits comme au paragraphe 1, entre 0 et $2t$, sur les mêmes processus de Poisson sous-jacents, l'un correspondant à des droites montant de 0 à $2t$, l'autre à des bandes descendant de $2t$ à 0. Alors entre 0 et t les deux versions de ξ_s et C_s^K sont indépendantes, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
P[\xi_{2t}^\eta \cap K = \emptyset] &= \int P(d\omega')P[\xi_t^{\xi_t^\eta(\omega')} \cap K = \emptyset] \\
&= \int P(d\omega')P[C_t^K \cap \xi_t^\eta(\omega') = \emptyset] \\
&= P(\xi_t^\eta = \emptyset) + P(C_t^K = \emptyset)P(\xi_t^\eta \neq \emptyset) \\
&\qquad + \int P(d\omega)P(d\omega')\, 1_{\{C_t^K(\omega) \neq \emptyset;\, \xi_t^\eta(\omega') \neq \emptyset;\, C_t^K(\omega) \cap \xi_t^\eta(\omega') = \emptyset\}}.
\end{aligned}$$

On aura montré la proposition si on prouve que

$$\lim_{t \uparrow \infty} \int P(d\omega)P(d\omega')\, 1_{\{\tau^K(\omega) = +\infty;\, \tau^\eta(\omega') = +\infty;\, C_t^K(\omega) \cap \xi_t^\eta(\omega') = \emptyset\}} = 0$$

Soit A un compact contenant η et K. D'après la proposition 20, à une probabilité ε près, on peut supposer que C_{2t}^K n'est pas inclus dans A si t est assez grand ; d'après la proposition 22, si L_t^η et R_t^η sont les extrémités gauche et droite de ξ_t^η, toujours à une probabilité ε près, si t est assez grand on peut supposer que R_{2t}^η n'appartient pas à A et L_{2t}^K n'appartient pas à A. Appelons chemin actif un chemin sur le schéma sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ formé par : comme verticales les morceaux de droite représentant les points de ξ_s^η et comme horizontales les morceaux d'intervalles de naissance joignant un point de naissance aux points de ξ_s^η déjà existants. Alors, à une probabilité 2ε près, il existe deux chemins actifs entre 0 et $2t$ partant de l'intérieur de A et sortant de A l'un vers la droite et l'autre vers la gauche. Pour le processus associé, on définit de la même manière un chemin actif : c'est un chemin partant d'un point de K dont les segments horizontaux sont contenus dans des intervalles de naissance et dont les segments verticaux ne rencontrent pas des intervalles de mort. A une probabilité ε près il existe un chemin actif partant de l'intérieur de A et sortant de A. Donc il existe un point commun à ces chemins actifs, donc il existe un point commun aux deux processus au temps t, ce qui démontre la proposition. ■

THÉORÈME 24. — Si N est supérieur à $\bar{N}^*$, les seules mesures invariantes

extrémales du processus de contact à valeurs dans E sont ε_ϕ et ν définie par :

$$\nu(\{\xi\,;\,\xi \cap K = \emptyset\}) = P(\hat{\tau}^K < \infty)$$

Démonstration. — Supposons η compact ; étant données les propriétés de compacité de la famille $\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_\eta S(t)dt\right\}$, on peut extraire une sous-suite $\varepsilon_\eta S(t_i)$ qui converge faiblement vers une mesure invariante μ.

D'après la proposition 23, on a

$$\mu(\xi\,;\,\xi \cap K) = \emptyset) = P(\tau^\eta < \infty)\varepsilon_\phi(\xi\,;\,\xi \cap K = \emptyset) + P(\tau^\eta = \infty)P(\hat{\tau}^K < \infty)\,,$$

donc il existe une mesure invariante ν définie par

$$\nu(\{\xi,\,\xi \cap K = \emptyset\}) = P(\hat{\tau}^K < \infty)$$

telle que :

$$\mu = P(\tau^\eta < \infty)\varepsilon_\phi + P(\tau^\eta = \infty)\nu$$

Si η n'est pas compact, soit η_n une suite de mesures ponctuelles à support compact qui croissent vers η alors

$$P(\hat{\tau}^K \leq t) \leq P(C_t^K \cap \eta = \emptyset) = P(\xi_t^\eta \cap K = \emptyset) \leq P(\xi_t^{\eta_n} \cap K = \emptyset)$$

d'où

$$P(\hat{\tau}^K < \infty) \leq \varliminf_t P(\xi_t^\eta \cap K = \emptyset) \leq \varlimsup_t P(\xi_t^\eta \cap K = \emptyset) \leq \lim_t P(\xi_t^{\eta_n} \cap K = \emptyset)$$

Nous savons, d'après la proposition 23 que

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(\xi_t^{\eta_n} \cap K = \emptyset) = P(\tau^{\eta_n} < \infty) + P(\tau^{\eta_n} = \infty)P(\hat{\tau}^K < \infty)$$

D'autre part $\lim_{n \uparrow \infty} P(\tau^{\eta_n} < \infty) = 0$ d'après la démonstration de la proposition 22.

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\lim_{t \to +\infty} P(\xi_t^\eta \cap K = \emptyset) &= P(\hat{\tau}^K < \infty)\\ &= P(\tau^\eta < \infty)\varepsilon_\phi(\xi\,;\,\xi \cap K = \emptyset) + P(\tau^\eta = \infty)\nu(\xi\,;\,\xi \cap K = \emptyset)\end{aligned}$$

Le résultat est alors clair. ■

III. LE PROCESSUS DE MÉLANGE

Nous reprenons les notations et définitions du paragraphe II.1.

Soit p une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

— pour tout x de $\mathbb{R}$, $p(x, .)$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue,

— pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, $p(x, y) = p(y, x)$,

— $p(x, y) = 0$ si $|x - y| \leq 2B$ où B est un nombre réel positif fixé.

Nous notons B_x l'intervalle $[x - B, x + B]$ de $\mathbb{R}$ et τ_A la translation de a dans $\mathbb{R}$.

Nous appelons $\hat{\pi}_{xy}$ la transformation qui échange les intervalles B_x et B_y, c'est-à-dire que pour A appartenant à $\hat{E}$, nous posons

$$\hat{\pi}_{xy}(A) = [A \setminus (B_x \cup B_y) \cup \tau_{y-x}(A \cap B_x) \cup \tau_{x-y}(A \cap B_y)]$$

et nous notons π_{xy} la restriction de $\hat{\pi}_{xy}$ à E.

DÉFINITION 25. — Étant donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathfrak{A}, (\mathfrak{A}_t, t \in \mathbb{R}_+), P)$, nous appelons processus de mélange sur E (resp. $\hat{E}$) un processus de Markov sur E (resp. $\hat{E}$), $[(\xi_t^\eta, t \in \mathbb{R}_+), \eta \in E]$ (resp. $[(C_t^A, t \in \mathbb{R}_+), A \in \hat{E}]$), adapté à la filtration $(\mathfrak{A}_t)$, homogène dans le temps, et tel que :

— $P(\xi_0^\eta = \eta) = 1$ (resp. $P(C_0^A = A) = 1$),

— pour toute fonction f (resp. $\hat{f}$) de $\mathscr{F}$ (resp. $\hat{\mathscr{F}}$)

$$f(\xi_t^\eta) - f(\xi_0^\eta) - \int_0^t \mathscr{A} f(\xi_s^\eta) ds$$

soit une $(P, \mathfrak{A}_t)$-martingale, où $\mathscr{A} f$ s'écrit pour tout η dans E :

$$\mathscr{A} f(\eta) = \int\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} p(x, y)[f(\pi_{xy}(\eta)) - f(\eta)] dx dy$$

$\left(\text{resp. } \hat{f}(C_t^A) - \hat{f}(C_0^A) - \int_0^t \hat{\mathscr{A}} \hat{f}(C_s^A)\right) ds$ soit une martingale où $\hat{\mathscr{A}} \hat{f}$ s'écrit pour tout A dans E :

$$\hat{\mathscr{A}} \hat{f}(A) = \int\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} p(x, y)[\hat{f}(\hat{\pi}_{xy}(A)) - \hat{f}(A)] dx dy]$$

Nous allons d'abord construire trajectoire par trajectoire des processus de mélange sur E et $\hat{E}$. Considérons comme objet de base un processus ponctuel de Poisson N sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, ayant comme intensité $p(x, y) dx dy dt$ où (x, y) appartient à $\mathbb{R}^2$ et t à $\mathbb{R}_+$. Comme pour le processus de contact, nous allons construire le processus de mélange sur un diagramme espace-temps $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Pour chaque point (x, y, t) tel que $N(\{x, y, t\}) = 1$, marquons sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ les deux points (x, t) et (y, t) et entourons chacun de ces points d'un intervalle fermé horizontal de longueur 2B. L'hypothèse $p(x, y) = 0$ si $|x - y|$ est inférieur à 2B entraîne, que ces deux intervalles ont une intersection vide presque sûrement.

Traçons maintenant sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ une demi-droite verticale ayant comme point de départ $(z, 0)$. Cette droite monte jusqu'à ce qu'elle rencontre pour la première fois un intervalle horizontal $[x - \mathrm{B}, x + \mathrm{B}]$ entourant un point marqué (x, t). La demi-droite s'arrête là. Soit (y, t) l'autre point marqué sur la droite horizontale $(\mathbb{R} \times t)$. Une autre demi-droite verticale part du point $(z + (y - x), t)$ et montera jusqu'à ce qu'elle rencontre pour la première fois un intervalle et ainsi de suite. Nous définissons ξ_t^z comme l'abscisse du segment vertical contenant l'ordonnée t.

Le processus ξ_t^z est un processus markovien de saut, d'état initial z, de vitesse de saut 1 et de densité de transition

$$q(x, y) = \frac{1}{2\mathrm{B}} \int_{-\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} p(x - r, y - r) dr .$$

Maintenant pour tout η dans E, nous définissons ξ_t^η par $\xi_t^\eta = \bigcup_{z \in \eta} \xi_t^z$.

En utilisant les mêmes techniques que pour le processus de contact, il est facile de vérifier que le processus construit est bien un processus de mélange.

Pour tout ω dans Ω, pour tout $t \geq 0$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \to \xi_t^x(\omega)$ est bijective et laisse la mesure de Lebesgue invariante.

On définit le processus de mélange à valeurs dans E par :

$$\mathrm{C}_t^{\mathrm{A}}(\omega) = \bigcup_{x \subset \mathrm{A}} \xi_t^x(\omega)$$

et on peut également vérifier toutes les propriétés annoncées.

PROPOSITION 26. — Les processus de mélange à valeurs dans E et $\hat{\mathrm{E}}$ sont associés.

Démonstration. — Comme pour le processus de contact, nous allons construire deux versions des processus de mélange sur E et $\hat{\mathrm{E}}$ respectivement entre 0 et t à l'aide du même processus de Poisson sous-jacent. Le processus $(\xi_s^\eta, 0 \leq s \leq t)$ est construit comme plus haut. Étant donné y dans $\mathbb{R}$, il existe un seul point z de $\mathbb{R}$ tel que $\xi_t^z = y$. Nous définissons alors $({}_t\mathrm{C}_s^y, 0 \leq s \leq t)$ par : ${}_t\mathrm{C}_s^y = \xi_{t-s}^z$ et $({}_t\mathrm{C}_s^{\mathrm{A}}, 0 \leq s \leq t)$ par ${}_t\mathrm{C}_s^{\mathrm{A}} = \bigcup_{y \in \mathrm{A}} {}_t\mathrm{C}_s^y$. Le processus $({}_t\mathrm{C}_s^{\mathrm{A}}, 0 \leq s \leq t)$, est bien un processus de mélange car il est construit comme plus haut, mais en renversant le cours du temps et le processus de Poisson sous-jacent est invariant en loi par symétrie.

Étant donnée la manière dont nous avons défini le processus ${}_tC_s^A$, nous avons pour tout ω dans Ω, t positif, x dans $\mathbb{R}$ et F dans $\hat{E}$:

$$\xi_t^x(\omega) \in F \Leftrightarrow x \in {}_tC_t^F(\omega).$$

Cela entraîne que pour tout η dans E

$$P(\xi_t^\eta \cap F \neq \emptyset) = P(\eta \cap {}_tC_t^F \neq \emptyset). \qquad \blacksquare$$

Le même argument entraîne la proposition suivante:

PROPOSITION 27. — Pour tout t positif, A dans $\hat{E}$ et η dans E si $N(\xi, A)$ représente le cardinal de $\xi \cap A$ nous avons $N(\xi_t^\eta(\omega), A) = N(\eta, {}_tC_t^A(\omega))$.

On désigne par $S(t)$ le semi-groupe du processus de mélange sur E. Pour toute fonction α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, mesurable bornée nous notons μ_α la loi du processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}$ d'intensité $\alpha(x)dx$. Nous notons $\mathscr{H}$ la classe de fonctions réelles bornées h telles que

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} h(y)q(x, y)dy \qquad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

Nous allons exhiber une famille de mesures invariantes pour le processus de mélange:

THÉORÈME 28. — Pour tout α dans $\mathscr{H}$, la famille $\mu_\alpha S(t)$ converge vers une probabilité ν_α lorsque t tend vers $+\infty$. L'intensité de ν_α est $\alpha(x)dx$. De plus lorsque α est constante $\mu_\alpha S(t) = \mu_\alpha$ pour tout t positif.

Démonstration. — Nous allons calculer la transformée de Laplace ψ_t de la mesure $\mu_\alpha S(t)$. Pour toute fonction f borélienne positive $\psi_t(f)$ s'écrit:

$$\psi_t(f) = E\left(\int \mu_\alpha(d\eta) \exp\left[-\int f(y)\xi_t^\eta(dy)\right]\right)$$

Or l'application $x \mapsto \xi_t^x(\omega)$ est une bijection sur $\mathbb{R}$ qui conserve la mesure de Lebesgue; par conséquent l'image de μ_α par l'application $\eta \mapsto \xi_t^\eta(\omega)$ qui est l'extension aux mesures de l'application $x \mapsto \xi_t^x(\omega)$ est la loi μ_β où β est l'image de α par cette application. On en déduit:

$$\psi_t(f) = E\int \mu_\beta(d\eta) \exp\left[-\int f(y)\eta(dy)\right] = E\left(\exp\int [1 - e^{-f(y)}]\beta(y)dy\right).$$

La propriété d'association donnant: $x = C_t^y \Leftrightarrow y = \xi_t^x$ on obtient:

$$\psi_t(f) = E\left(\exp - \int (1 - e^{-f(y)}\alpha(C_t^y))dy\right)$$

Si α est constante, ψ_t est la transformée de Laplace de μ_α et par suite $\mu_\alpha = \mu_\alpha S(t)$ pour tout t positif.

Si α appartient à $\mathscr{H}$, $\alpha(\xi_t^x)$ est une martingale bornée, elle converge donc p. s. vers une variable aléatoire Z^x, ce qui donne :

$$\lim_{t \uparrow \infty} \psi_t(f) = \mathrm{E}\left\{ \exp\left(- \int (1 - e^{-f(x)}) Z^x dx \right) \right\}$$

Nous avons ainsi démontré que $\mu_\alpha S(t)$ converge lorsque t tend vers $+\infty$ vers une mesure ν_α (qui est un mélange de processus de Poisson), dont la transformée de Laplace est donnée par l'expression ci-dessus. ■

REMERCIEMENTS

Nous remercions M. F. Ledrappier et M. J. Neveu pour les discussions fructueuses que nous avons eues avec eux lors de la préparation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] F. Bertein et A. Galves, Une classe de systèmes de particules stable par association. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **41**, 1977, p. 73-85.

[*2*] C. Cocozza et C. Kipnis, Processus de vie et de mort sur R ou Z avec interaction selon les particules les plus proches. *C. R. Acad. Sci.*, t. **284**, série A, 1977, p. 1291.

[*3*] C. Cocozza et M. Roussignol, Unicité d'un processus de naissance et mort sur la droite réelle. *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. XV, n° 1, 1979, p. 93-105.

[*4*] D. Griffeath, Limit theorems for non ergodic set valued Markov processes. *Annals of Probability*, vol. **6**, 1978, p. 379-387.

[*5*] T. E. Harris, Contact interaction on a lattice. *Annals of Probability*, vol. **2**, 1974, p. 968-988.

[*6*] T. E. Harris, On a class of set valued Markov processes. *Annals of Probability*, vol. **4**, 1976, p. 175-194.

[*7*] T. E. Harris, Additive set valued Markov processes and percolation methods. *Annals of Probability*, vol. **6**, 1978, p. 355-378.

[*8*] R. A. Holley and D. W. Strook, Nearest neighbour birth and death processes on the real line. *Acta Mathematica*, vol. **140**, 1978.

[*9*] W. C. Lee, Random stirring on the real line. *Annals of Probability*, vol. **2**, 1974, p. 580-592.

[*10*] T. M. Liggett, The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles. *Springer Lecture Notes on Mathematics*, n° 598.

[*11*] J. Neveu, Processus ponctuels. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, n° 598.

[*12*] F. Spitzer, Recurrent random walk on an infinite particle system. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **198**, 1974, p. 191-199.

[*13*] F. Spitzer, Stochastic time evolution of one dimensional infinite particle system. BAMS, vol. **83**, n° 5, septembre 1977, p. 880-890.

(Manuscrit reçu le 8 mai 1979)