ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. CABANE

Sur les transformations linéaires modulo un

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 2 (1979), p. 187-193
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_2_187_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XV, n° 2, 1979, p. 187-193. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur les transformations linéaires modulo un

par

R. CABANE (*)

RÉSUMÉ. — Pour les transformations de la forme $Tx = \beta x + \alpha$ mod. 1, avec $\beta > \sqrt{2}$ ou $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, nous étudions le support de la mesure invariante, et prouvons l'ergodicité et l'existence d'une partition faiblement Bernoulli, ce qui généralise des résultats déjà connus pour $\beta > 2$.

ABSTRACT. — We consider the transformation $Tx = \beta x + \alpha$ mod. 1, with $\beta > \sqrt{2}$, or $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. We describe the support of the invariant measure, and then prove its ergodicity and weak bernoullicity. These results are known for $\beta > 2$.

INTRODUCTION

Nous étudions ici les transformations linéaires modulo un, définies par : $Tx = \beta x + \alpha$ mod. 1, avec $|\beta| > 1$ et $0 \leq \alpha < 1$. Leur étude remonte à Renyi [*1*] et Parry [*2*] qui a construit, pour $\beta > 1$ une probabilité μ T-invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m. De plus, quand μ charge les ouverts, $\frac{d\mu}{dm}$ est bornée supérieurement et inférieurement, et c'est le cas pour $\beta > 2$.

(*) 24, Avenue Lombart, 92260 Fontenay-aux-Roses, France.

Nous décrivons ici le support de μ pour $\beta > \sqrt{2}$ et pour $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

D'autre part, Smorodinsky [*3*] et Wilkinson [*4*] ont prouvé que (T, μ) est faiblement Bernoulli pour $\beta > 2$. Nous prouvons ce résultat pour $|\beta| > \sqrt{2}$ en faisant appel à des théorèmes dûs à Kowalski, Ratner et Bowen.

Énoncé du théorème

Pour α et β vérifiant : $0 \leq \alpha < 1$ et $|\beta| > 1$ nous définissons une transformation de [0, 1] par $Tx = \beta x + \alpha \bmod. 1$. Soit m la mesure de Lebesgue ; il existe, d'après [*6*] une mesure μ, absolument continue (par rapport à m) sur [0, 1], et T-invariante. Notons J le support de μ, et Q la partition de [0, 1] déduite des discontinuités de T.

Nous aurons besoin de la condition suivante :

(A) T a un point fixe P tel que : si $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, on a : $T^{-1}\{P\} = \{P\}$: si $\beta > \sqrt{2}$, on a : $T^{-1}\{P\} = \{P\}$, ou : $T^{-1}\{P\} = \{P, 0\}$, ou : $T^{-1}\{P\} = \{P, 1\}$.

THÉORÈME 1. — *i*) La mesure μ est l'unique probabilité T-invariante absolument continue ; elle est T-ergodique, et son support J est une union finie d'intervalles fermés.

ii) Si $\beta > \sqrt{2}$, ou $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, et que (A) est vérifiée, alors J est formé de deux intervalles disjoints. Si $\beta > \sqrt{2}$, ou $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, et que (A) n'est pas vérifiée, alors on a : J = [0, 1].

iii) Si $|\beta| > \sqrt{2}$ le système (T, Q, μ) est faiblement Bernoulli ([*4*]).

iv) Pour tout β tel que $1 < |\beta| \leq \sqrt{2}$, il existe α tel que (T, μ) ne soit pas faiblement mélangeant.

v) Il existe β et α tels que : $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \leq \beta \leq -\sqrt{2}$, et que J soit composé de trois intervalles disjoints.

Démonstration de (i)

Rappelons les résultats suivants : [0, 1] est une union disjointe de $n(\beta)$ ouverts T-invariants et T-ergodiques (D est T-invariant si TD = D m-p. s. et D est T-ergodique si $F \subset D$ et $T^{-1}F = F$ m-p. s. impliquent $m(F) = 0$

ou $m(\mathrm{F}) = m(\mathrm{D}))$; $n(\beta)$ est plus petit que le nombre de discontinuités de T. (Kowalski [7] théorème 1).

Si D est T-invariant et T-ergodique, l'intérieur de $\mathrm{D} \cap \mathrm{J}$ est de la forme $\bigcup_{0}^{\infty} \mathrm{T}^n\mathrm{I}$, où I est un intervalle ouvert assez petit contenant une certaine discontinuité (Kowalski [8] théorème 2).

Alors, si D_1 et D_2 sont deux ouverts T-invariants et T-ergodiques disjoints, on a : $\mathrm{J} \cap \mathrm{D}_1 = \bigcup_{0}^{\infty} \mathrm{T}^n\mathrm{I}_1$ p. s. et $\mathrm{J} \cap \mathrm{D}_2 = \bigcup_{0}^{\infty} \mathrm{T}^n\mathrm{I}_2$ p. s. ; or TI_1 et TI_2 contiennent un voisinage de 0, et $\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2$ est non vide. Ainsi $n(\beta) = 1$, donc $[0, 1]$ est T-ergodique. Par conséquent, μ est l'unique probabilité T-invariante absolument continue par rapport à m ; et elle est ergodique pour T.

L'intérieur de J est donc de la forme : $\bigcup_{0}^{\infty} \mathrm{T}^n\mathrm{I}$. Par suite, $\mathring{\mathrm{J}}$ est non vide, et contient $\mathrm{T}\mathring{\mathrm{J}}$ ainsi que 0 et 1. Soient J′ et J″ les deux intervalles de $\mathring{\mathrm{J}}$ qui contiennent 0 et 1, et $f = \inf\{ m(\mathrm{J}'), m(\mathrm{J}'') \}$. Soit N l'union des intervalles de $\mathring{\mathrm{J}}$ dont la longueur est supérieure ou égale à f. On a : $\mathrm{TN} \subset \mathrm{N}$. En effet, l'image d'un intervalle contenant une discontinuité se trouve dans $\mathrm{J}' \cup \mathrm{J}''$, et les autres sont dilatés par T. Ainsi N est inclus dans $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{N}$, et par ergodicité on a : $\mathrm{N} = \mathrm{J}$ μ-p. s. Finalement J est, comme N, une union finie d'intervalles.

Démonstration de (ii)

LEMME 1. — La condition (A) équivaut à l'une des conditions suivantes :

$$(\mathrm{A}_2) \qquad \beta > \sqrt{2} \qquad \text{et} \quad 1/\beta \leq \alpha \leq (-\beta^2 + 3\beta - 1)/\beta$$

$$(\mathrm{A}'_2) \qquad \beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \text{et} \quad -(\beta^2 + \beta - 1)/\beta < \alpha < -1/\beta .$$

Preuve. — Si $\beta > 1$, le point fixe de T est $\mathrm{P} = (1 - \alpha)/(\beta - 1)$ et (A) est vérifiée lorsque P est adhérent à un intervalle où T^{-1} est définie. Ce n'est possible que si $\mathrm{T1} \leq \mathrm{P} \leq \mathrm{T0}$, soit encore : $1/\beta \leq \alpha \leq (-\beta^2 + 3\beta - 1)/\beta$. Si $\beta < -1$ il y a deux ou trois points fixes $\mathrm{P}_1 = \alpha/(1 - \beta)$, $\mathrm{P}_2 = (1 + \alpha)/(1 - \beta)$ et éventuellement $\mathrm{P}_3 = (2 + \alpha)/(1 - \beta)$ (quand T a deux discontinuités, soit $\alpha < -1 - \beta$). S'il y a deux discontinuités, on vérifie que $\mathrm{T}^{-1}\{ \mathrm{P}_1 \}$ et $\mathrm{T}^{-1}\{ \mathrm{P}_3 \}$ sont formés chacun de deux points, et que $\mathrm{T}^{-1}\{ \mathrm{P}_2 \} = \{ \mathrm{P}_2 \}$ équivaut à (A'_2). S'il y a une discontinuité $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ implique que $\mathrm{P}_1 > \mathrm{T1}$ et $\mathrm{P}_2 < \mathrm{T0}$, ce qui exclut (A).

LEMME 2. — La condition (A) implique que J^c est non vide.

Preuve. — Le point fixe P appartient à l'adhérence d'un intervalle où T^{-1} est définie. Pour c assez petit, et $L = (P - c, P + c)$, ou éventuellement $(P, P + c)$ ou $(P - c, P)$, au cas où une égalité a lieu dans (A_2), on a : $T^{-1}L \subset L$.

Cela ne peut se produire si $J = [0, 1]$.

LEMME 3. — Si $\beta > \sqrt{2}$, ou $\beta < -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, J est constitué de deux intervalles au plus.

Preuve. — (*a*) Étudions d'abord le cas où T a deux discontinuités. Posons :

$$J = J' \cup J'' \cup J_1 \cup J_2 \cup \bigcup_{k>2} J_k,$$

où J_1 et J_2 contiennent les discontinuités (si les deux discontinuités sont dans J_1, $TJ_1 = J_1 = [0, 1]$). Si $i > 2$, on a : $m(TJ_i) = |\beta|\, m(J_i)$. Nous avons vu plus haut que $TJ \subset J$, et donc $TJ = J$ comme support de μ.

Ainsi, si $i > 2$, il existe k différent de i, tel que : $TJ_i = J_k$, tandis que $T(J_1 \cup J_2) = J' \cup J''$. Le nombre d'intervalles devant se conserver, tout J_i est de la forme T^qJ' ou T^qJ'', et il existe n et p tels que : $J_1 = T^nJ'$, et $J_2 = T^pJ'$, par exemple.

Dès lors, on a :

$$m(J_1) = |\beta|^n m(J'),\ m(J_2) = |\beta|^p m(J''),$$
$$m(J' \cup J'') = m(J') + m(J'') \geq |\beta|^{n+1} m(J') = m(TJ_1).$$

De même on a :

$$m(J') + m(J'') \geq |\beta|^{p+1} m(J''),$$

d'où :

$$(*)\ (|\beta|^{n+1} - 1)(|\beta|^{p+1} - 1) \leq 1.$$

Comme $|\beta| > \sqrt{2}$, on a nécessairement $((\sqrt{2})^{n+1} - 1)((\sqrt{2})^{p+1} - 1) \leq 1$, soit $p = 0$ et $n \leq 2$, ou inversement. En conjuguant éventuellement par $\xi : x \to 1 - x$, on peut supposer $p = 0$.

Nous distinguons à présent différents cas.

(a_0) Si $|\beta| > \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, (*) implique $n = p = 0$, soit $J = J' \cup J''$.

(a_1) Si $\sqrt{2} < \beta \leq \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $p = 0$ et $n = 1$, on a $J_1 = TJ'$.

Les discontinuités ne peuvent être dans J', car l'image de J' est un intervalle. On a donc : $T0 = \inf TJ' = \alpha < (1 - \alpha)/\beta$ ce qui est incompatible avec : $(2 - \alpha)/\beta < 1$ et $\beta \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

(a_2) Si $\sqrt{2} < \beta < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $p = 0$ et $n = 2$, on a : $J_1 = T^2J'$.

TJ' se place entre J_1 et J'', car on a vu que nécessairement $T0 \geq (1 - \alpha)/\beta$. On a :

$$T1 \in J', \quad T^2 1 \in TJ', \quad T^3 1 \in J_1 .$$

Par conséquent : $T0 = \alpha > T^3 1$, d'où : $\alpha < (-\beta^3 + 2\beta^2 + 1)/(\beta + \beta^2)$. Par ailleurs, $T^2 0 = \inf J_1$, d'où : $T^3 0 \in J''$.

Enfin, P ne peut appartenir à J'' car : $TJ'' \subset J' \cup J''$, d'où : $P < T^3 0$. Ceci implique :

$$\alpha > (\beta^2 - \beta + 1)/\beta^3$$

Comme $\beta < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, les deux inégalités sont contradictoires.

Il ne reste en fin de compte que le cas $n = 0$, soit : $J = J' \cup J''$.

(b) Dans le cas où T n'a qu'une discontinuité, on a cette fois :

$$J = J' \cup J'' \cup J_1 \cup \bigcup_{k>2} J_k ,$$

et, comme en (a), $J_1 = T^n J' = T^p J''$, ce qui entraîne l'inégalité (*), et de nouveau $p = 0$ et $n \leq 2$, ou inversement.

(b_0) Si $|\beta| > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $n = p = 0$ et $J = J' \cup J''$.

(b_1) Si $\sqrt{2} < \beta < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $p = 0, n \leq 2$, J_1 contient l'extrémité de $[0, 1]$ la plus proche de la discontinuité : sinon on aurait : $J_1 \cup TJ_1 = [0, 1]$ et $n = 0$. Si par exemple 1 est dans J_1, on a : $J' = [0, T1]$ et $TJ' = [T0, T^2 1]$. TJ' rencontre nécessairement J', donc $n = 0$ et $J = J' \cup J''$, ce qui achève la preuve du lemme 3.

On déduit alors (ii) des lemmes précédents. En effet, comme 0 et 1 sont dans J, si J^c est non vide, c'est nécessairement un intervalle, et le point fixe P s'obtient par : $\bigcap_n \overline{T^{-n}J^c}$, d'où :

$$T^{-1}\{P\} = \bigcap_n T^{-1}(\overline{T^{-n}J^c}) \subset \bigcap_n \overline{T^{-n}J^c} \cup \{0, 1\} = \{P, 0, 1\}.$$

En examinant les différents cas, on obtient bien la condition (A).

Démonstration de (iii)

Nous utilisons ici le théorème 7 de Ratner [5], selon lequel (T, P, μ) est faiblement Bernoulli si (T, μ) est totalement ergodique. D'après le théorème 1 de Kowalski [7], déjà cité, T^n ne sera pas ergodique si le support de μ se décompose en plusieurs ouverts T^n-invariants et T^n-ergodiques disjoints, soit :

$$\overset{\circ}{J} = \bigcup_{i=1}^{i=m} D_i .$$

On vérifie aisément que T réalise une permutation sur les D_i ; d'autre part, on obtient ainsi une décomposition de $\overset{\circ}{J}$ en intervalles (éventuellement contigus). Comme plus haut, on montre qu'il s'agit d'une union finie d'intervalles, soit :

$$\overset{\circ}{J} = K' \cup K'' \cup K_1 \cup K_2 \cup \bigcup_{i>2} K_i ;$$

le même argument relatif aux longueurs s'applique, d'où : $K_1 = T^tK'$, $K_2 = T^sK''$, $t = 0$, $s \leq 2$ (ou inversement). Alors $K_1 = K'$ rencontre TK_1, ce qui impose $m = 1$. T^n est ainsi ergodique.

Démonstration de (iv) (exemple communiqué par W. Parry)

Pour $1 < \beta < \sqrt{2}$ on prend $\alpha = 1 - \beta/2$, $P_1 = \beta/2(\beta + 1) = T^2P_1$, et c assez petit, de sorte que si $E = (P_1 - c, P_1 + c)$ et $F = (TP_1 - c, TP_1 + c)$, alors $T^{-1}E \subset F$ et $T^{-1}F \subset E$. On a donc : $J = J_1 \cup J' \cup J''$, avec $TJ_1 = J' \cup J''$, $TJ' = TJ'' = J_1$. Donc -1 est valeur propre de T. Pour $\beta = \sqrt{2}$ et $\alpha = 1 - \sqrt{2}/2$ on vérifie directement que T^2 n'est pas ergodique.

Pour $-\sqrt{2} < \beta < -1$ on prend $\alpha = -\beta/2$ et $E = (P_1 - c, P_1 + c)$, $F = (P_2 - c, P_2 + c)$, P_1 et P_2 étant les deux points fixes, d'où la même conclusion. Pour $\beta = -\sqrt{2}$, la vérification est la même que pour $\beta = \sqrt{2}$.

Démonstration de (v)

On prend $\beta = -1{,}5$ et $\alpha = 0, 2$, pour lesquels :

$$E = (T^2 1, T1) \cup (T^3 0, T^2 0)$$

vérifie : $T^{-1}E \subset E$; J^c est formé de deux intervalles au moins.

Le théorème est ainsi démontré.

REMERCIEMENTS

Je suis très reconnaissant à M. François Ledrappier pour ses encouragements inlassables.

RÉFÉRENCES

[1] A. RENYL, Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, t. **8**, 1957, p. 477-493.
[2] W. PARRY, Representations for real numbers. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, t. **15**, 1964, p. 95-105.
[3] M. SMORODINSKY, β-automorphisms are Bernoulli. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, t. **24**, 1973, p. 273-278.
[4] K. M. WILKINSON, Ergodic properties of certain linear modulo one transformations. *Adv. in Math.*, t. **14**, 1974, p. 64-72.
[5] M. RATNER, Bernoulli flows over maps of the interval. *Israel Journal of Math.*, t. **31**, 1978, p. 298-313.
[6] A. LASOTA, Y. YORKE, On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **186**, 1973, p. 481-488.
[7] Z. S. KOWALSKI, Invariant measures for piecewise monotonic transformations, 1975, Springer Lecture Notes 472, 77-94.
[8] Z. S. KOWALSKI, Some remarks about the invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math.*, t. **25**, n° 1, 1977, p. 7-12.
[9] R. BOWEN, Bernoulli maps of the unit interval. *Israel Journal of Math.*, t. **28**, 1977, p. 161-168.

(Manuscrit reçu le 4 avril 1979)