ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

SERGE DEGERINE

Lois de von Mises et lois liées

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 1 (1979), p. 63-77
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_1_63_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XV, n° 1, 1979, p. 63-77.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Lois de von Mises et lois liées

par

Serge DEGERINE
Institut de Recherche en Mathématiques avancées,
Université scientifique et médicale de Grenoble,
B. P. n° 53, 38041 Grenoble Cedex

SOMMAIRE. — La loi de von Mises s-dimensionnelle est présentée comme la loi exponentielle canonique par rapport à la loi uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^s$. Alors, les différentes lois de probabilités rencontrées dans les problèmes statistiques associés sont obtenues par une application directe des propriétés des familles exponentielles. Dans le cas uniforme, elles sont données par une formule d'inversion de la fonction caractéristique particulière aux lois de probabilité sphériques.

SUMMARY. — The s-dimensional von Mises distribution is presented as the canonical exponential distribution with respect to the uniform distribution on the unit sphere of $\mathbb{R}^s$. Then, the different probability distributions encountered in related statistical problems are obtained by a straightforward application of properties of exponential families. In the uniform case, they are given by an inversion formula for the characteristic function peculiar to spherical distributions.

I. INTRODUCTION ET NOTATIONS

1. Présentation des lois de von Mises

Les lois de probabilité de von Mises décrivent des phénomènes aléatoires directionnels et semblent devoir jouer, dans ce domaine, un rôle analogue à celui que tiennent les lois normales pour des observations ponctuelles.

Les directions dans $\mathbb{R}^s$ se représentent naturellement par les points de la sphère unité Σ_{s-1} ou, plus précisément, par les vecteurs unitaires correspondants.

La loi de von Mises s-dimensionnelle est une sorte de loi d'erreur par rapport à une direction privilégiée appelée direction modale; elle est de révolution, c'est-à-dire invariante par rotation, autour de cette direction. La « densité » de probabilité est maximum au voisinage de la direction modale et va en diminuant lorsqu'on se rapproche de la direction opposée, parfois appelée antimode. Cette décroissance est mesurée par un paramètre dit de concentration. Celui-ci varie entre zéro et l'infini; la valeur zéro correspond à la répartition uniforme qui est un cas singulier dans lequel la direction modale n'est évidemment pas définie. Lorsque ce paramètre augmente, la masse de probabilité se concentre au voisinage de la direction modale.

La loi de von Mises, introduite en 1918 par von Mises [*12*] dans le cas de directions coplanaires, fut caractérisée par sa densité sur $[0, 2\pi[$:

$$f(\Theta) = \frac{1}{2\pi \mathrm{I}_0(k)} \exp\left[k \cos(\Theta - \Theta_0)\right]$$

où Θ_0 représente la direction modale et k le paramètre de concentration. Elle fut étendue en dimension 3 par Arnold en 1941 [*1*], cas où elle porte aussi le nom de loi de Fisher qui entreprit son étude en 1953 [*4*].

Elle est alors définie par sa densité en coordonnées sphériques :

$$f(\Theta, \Phi) = \frac{k \sin\Theta}{4\pi \operatorname{sh} k} \exp k \left\{ \cos\Theta \cos\Theta_0 + \sin\Theta \sin\Theta_0 \cos(\Phi - \Phi_0) \right\}$$

La généralisation en dimension s, proposée par Stephens en 1962 [*10*], est également faite au moyen de la densité :

$$f(a_1, \ldots, a_{s-1}) = \frac{k^{\frac{s-2}{2}}}{(2\pi)^{s/2}} \frac{\prod_{i=1}^{s-2} (\sin a_i)^{s-i-1}}{\mathrm{I}_{\frac{s-2}{2}}(k)} \exp k \cos a_1$$

où, pour simplifier, la direction modale est définie par $a_1 = 0$.

2. Contenu et situation de l'article

Cet article est basé sur la représentation exponentielle des lois de von Mises par rapport à la loi uniforme, laquelle est également traitée de manière nouvelle.

La distribution uniforme sur la sphère unité Σ_{s-1} de $\mathbb{R}^s$ est définie au § II.1 comme loi de probabilité singulière U_s sur $(\mathbb{R}^s, B_{\mathbb{R}^s})$. Ceci permet de présenter au § III.1 la loi de von Mises s-dimensionnelle P_Θ comme loi exponentielle canonique par rapport à U_s :

$$\frac{dP_\Theta}{dU_s}(x) = \frac{e^{\langle\Theta,x\rangle}}{L_{U_s}(-\Theta)} \tag{1}$$

la direction et la norme du paramètre Θ représentent respectivement la direction modale et le paramètre de concentration.

L'étude statistique, basée sur un échantillon de taille n, $X_1, \ldots, X_n$, fait apparaître la résultante :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

comme statistique fondamentale.

Au § III.2, nous obtenons, à partir de (1) et des propriétés des familles exponentielles, la loi de probabilité de X, celle de sa norme $R = \| X \|$, ainsi que les lois des projections de X sur des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^s$ et des normes correspondantes. Ces lois s'expriment en fonction des lois calculées au § II.3 pour le cas uniforme ($\Theta = 0$). Cette méthode fut en partie utilisée implicitement par Fisher pour $s = 3$ [*4*] qui se servit, pour calculer la loi de X, de l'exhaustivité, par rapport au paramètre de concentration, de la projection de X sur la direction modale.

Nous calculons aussi au § III.3 quelques lois de probabilités conditionnelles. A partir de X, ou de sa projection sur un sous-espace, on retrouve les lois de von Mises par certains conditionnements. Les résultats de Downs [*3*], sur ce sujet, constituent le cas particulier d'un échantillon de taille 1.

Les lois de probabilité, dans le cas uniforme, sont définies directement par leurs densités en inversant la fonction caractéristique par un procédé d'inversion, propre aux lois sphériques, utilisable en particulier lorsque cette fonction caractéristique n'est pas intégrable en module. Ce procédé est présenté au § II.2 et la fonction caractéristique de U_s est calculée au § II.1. Historiquement, la loi de probabilité de la résultante R a été obtenue par Kluyver en 1906 [*6*] qui a calculé la probabilité $P(R \leqslant r)$ pour $s = 2$ en résolvant le problème des marches au hasard introduit par Pearson [*9*], utilisant le facteur de discontinuité suivant :

$$r\int_0^\infty J_1(rt)J_0(\rho t)dt = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \rho < r \\ 0 & \text{si} \quad \rho > r \end{cases}$$

Cette méthode, peu naturelle par la présence de ce facteur, nécessite en outre, pour obtenir la densité, de justifier une dérivation sous le signe intégral.

Elle fut néanmoins reprise et précisée par Lord Rayleigh en 1919 pour $s = 3$ [*8*] et étendue aux autres valeurs de s par G. N. Watson ([*13*], p. 419).

3. Notations

On note B_E la tribu borélienne d'un espace topologique E. Pour tout entier positif k, k' désigne la quantité $\frac{k-2}{2}$, $\mathbb{1}_k$ la matrice unité de $\mathbb{R}^k$ et λ_k la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$ est notée λ_+.

Σ_{s-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^s$:

$$\Sigma_{s-1} = \{ x \in \mathbb{R}^s, \| x \| = 1 \}$$

Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}^s$, est dite radiale lorsqu'elle ne dépend que de $\| x \|$; nous conservons le même symbole f pour représenter la fonction qu'elle définit sur $\mathbb{R}^+$.

Nous utilisons également les fonctions spéciales suivantes :

— série hypergéométrique généralisée :

$${}_0F_1(\nu, z) = \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\nu + n) n\,!} \quad , \quad (\nu, z) \in \mathbb{C}^2$$

— fonction de Bessel d'ordre ν :

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(\nu + n + 1) n\,!} \quad , \quad (\nu, z) \in \mathbb{C}^2$$

— fonction de Bessel modifiée d'ordre ν :

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(\nu + n + 1) n\,!} \quad , \quad (\nu, z) \in \mathbb{C}^2$$

Enfin, nous posons :

$$g(s, h, n\,; b, v) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{(2\pi)^{h'+1}} \int_0^\infty \left\{ \frac{J_{s'}[(\rho^2 - b^2)^{1/2}]}{(\rho^2 - b^2)^{s'/2}} \right\}^n \frac{J_{h'}(\rho v)}{(\rho v)^{h'}} \rho^{h-1} d\rho$$

en effet, ce type de fonction sera fréquemment utilisé; la justification de l'intégrale et les valeurs particulières sont données en annexe.

II. LOI DE PROBABILITÉ UNIFORME SUR Σ_{s-1}

1. Définition et propriétés immédiates

Soit A_{s-1} l'espace des coordonnées sphériques :

$$A_{s-1} = [0, \pi]^{s-2} \times [0, 2\pi[,$$

et T l'application (mesurable) de $(A_{s-1}, B_{A_{s-1}})$ dans $(\mathbb{R}^s, B_{\mathbb{R}^s})$ définie par le passage des coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} T : A_{s-1} &\rightarrow \mathbb{R}^s \\ a &\rightarrow x = T(a) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} x_j = \cos a_j \prod_{i=1}^{j-1} \sin a_i, \; j = 1, \ldots, s-1 \\ x_s = \prod_{i=1}^{s-1} \sin a_i \end{cases}$$

La loi de probabilité uniforme sur Σ_{s-1} est caractérisée par sa densité en coordonnées sphériques; plus précisément elle est définie comme la mesure ν sur $(A_{s-1}, B_{A_{s-1}})$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est égale à :

$$\frac{d\nu}{da} = \frac{\Gamma(s'+1)}{2\pi^{s'+1}} \prod_{i=1}^{s-2} (\sin a_i)^{s-i-1}$$

Il est alors naturel de poser :

II.1.1. Définition. — On appelle loi de probabilité uniforme sur Σ_{s-1} la loi de probabilité U_s définie sur $(\mathbb{R}^s, B_{\mathbb{R}^s})$ par :

$$\forall B \in B_{\mathbb{R}^s}, \; U_s(B) = \nu[T^{-1}(B)]$$

II.1.2. Proposition. — La transformée de Laplace bilatérale de U_s est définie sur C^s par :

$$\forall z \in C^s \quad , \quad L_{U_s}(z) = {}_0F_1\left(s'+1 \,; \frac{1}{4}\langle z, \bar{z}\rangle\right)$$

Démonstration. — Par définition $L_{U_s}(z)$ est l'intégrale :

$$L_{U_s}(z) = \int_{R^s} e^{-\langle z, x\rangle} dU_s(x)$$

Elle est définie pour tout z de C^s et, d'après le théorème de Fubini, on a :

$$\text{(1)} \qquad L_{U_s}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^s} \langle z, x \rangle^n dU_s(x)$$

U_s étant invariante par rotation, on se ramène au cas où z est de la forme:

$$z = z_1 + iz_2$$

avec :

$${}^t z_1 = (0, \ldots, 0, \| z_1 \|, 0), \; {}^t z_2 = (0, \ldots, 0, \| z_2 \| \cos \varphi, \| z_2 \| \sin \varphi)$$

où φ est l'angle de $[0, 2\pi[$, orienté de z_1 vers z_2, défini par ces deux vecteurs :

$$\int_{\mathbb{R}^s} \langle z, x \rangle^n dU_s(x)$$

$$= \frac{\Gamma(s'+1)}{2\pi^{s'+1}} \int_{A_{s-1}} \prod_{i=1}^{s-2} (\sin a_i)^n [\alpha \cos a_{s-1} + \beta \sin a_{s-1}]^n \prod_{i=1}^{s-2} (\sin a_i)^{s-i-1} da$$

$$\text{(2)} \qquad = \frac{\Gamma(s'+1)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\alpha \cos \Theta + \beta \sin \Theta)^n d\Theta$$

avec :

$$\alpha = \| z_1 \| + i \| z_2 \| \cos \varphi, \qquad \beta = i \| z_2 \| \sin \varphi$$

L'intégrale dans (2) est nulle pour n impair ; pour n pair elle est égale à :

$$\frac{2\pi n!}{2^n \left(\frac{n}{2}!\right)^2} (\alpha^2 + \beta^2)^{n/2}$$

En reportant ces valeurs dans (1), on obtient le résultat après avoir remarqué que $(\alpha^2 + \beta^2)$ n'est autre que $\langle z, \bar{z} \rangle$.

Les corollaires suivants sont immédiats :

II.1.3. Corollaire. — La fonction caractéristique $\Omega_s(t)$ de la loi de probabilité U_s est définie sur $\mathbb{R}^s$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^s \quad , \quad \Omega_s(t) = 2^{s'} \Gamma(s'+1) \frac{J_{s'}(\| t \|)}{\| t \|^{s'}}$$

II.1.4. Corollaire. — Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, B_{\mathbb{R}^s})$ de loi de probabilité U_s. X est centré et sa matrice de variance-covariance est égale à $\frac{1}{s} \mathbb{1}_s$.

2. Remarque sur les lois de probabilité sphériques

II.2.1. DÉFINITION [5]. — Un vecteur aléatoire X, à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, \mathrm{B}_{\mathbb{R}^s})$, suit une loi de probabilité sphérique (ou radiale) si et seulement si, pour toute matrice orthogonale A, le vecteur aléatoire AX suit la même loi que X.

Si P est la loi de X définie ci-dessus, nous appellerons profil de P, noté $\tilde{\mathrm{P}}$, la loi de $\| \mathrm{X} \|$ sur $(\mathbb{R}^+, \mathrm{B}_{\mathbb{R}^+})$.

R. D. Lord [7] étudie les lois de probabilité sphériques P absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue λ_s sur $(\mathbb{R}^s, \mathrm{B}_{\mathbb{R}^s})$. En particulier, il montre que, si la fonction caractéristique (radiale) φ de P est intégrable en module, P admet comme unique détermination continue (bornée) de sa densité la fonction radiale :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{s'+1}} \int_0^\infty \varphi(\rho) \frac{\mathrm{J}s'(\rho \| x \|)}{(\rho \| x \|)^{s'}} \rho^{s-1} d\rho$$

Nous examinons ici le cas où φ n'est pas intégrable en module en nous appuyant sur un résultat de H. R. Van der Vaart [11] :

II.2.2. THÉORÈME. — Soit φ la fonction caractéristique d'une loi de probabilité P sur $(\mathbb{R}^s, \mathrm{B}_{\mathbb{R}^s})$; alors la limite,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(t) e^{-i\langle t, x\rangle} e^{-\frac{1}{2}\left\|\frac{t}{r}\right\|^2} dt$$

existe λ_s-p. p. et la fonction ainsi définie est une détermination de la densité de la partie P absolument continue par rapport à λ_s.

II.2.3. COROLLAIRE. — Soit φ la fonction caractéristique (radiale) d'une loi de probabilité sphérique P sur $(\mathbb{R}^s, \mathrm{B}_{\mathbb{R}^s})$; si la limite

$$(1) \qquad \lim_{\mathrm{A} \to +\infty} \frac{1}{(2\pi)^{s'+1}} \int_0^{\mathrm{A}} \varphi(\rho) \frac{\mathrm{J}_{s'}(\rho \| x \|)}{(\rho \| x \|)^{s'}} \rho^{s-1} d\rho,$$

existe λ_s-p. p. par rapport à x, elle définit une détermination de la densité de la partie P absolument continue par rapport à λ_s.

DÉMONSTRATION. — Le théorème II.2.2 appliqué à φ montre qu'une telle détermination est donnée par :

$$(2) \qquad f(x) = \lim_{r \to \infty} \int_0^\infty \psi(\rho) h(r, \rho) d\rho$$

où on a posé :

$$\psi(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{s'+1}} \varphi(\rho) \frac{\mathrm{J}_{s'}(\rho \| x \|)}{(\rho \| x \|)^{s'}} \rho^{s-1}, \quad h(r, \rho) = e^{-\frac{\rho^2}{2r^2}}$$

Il suffit de montrer qu'en tout x pour lequel la limite dans (1) existe, la limite dans (2) existe aussi et lui est égale.

Soit $\varepsilon > 0$, la convergence (1) assure l'existence de A_ε tel que :

$$\forall A, A \geq A_\varepsilon \left| \int_{A_\varepsilon}^{A} \psi(\rho)d\rho \right| \leq \varepsilon$$

On a la majoration suivante :

$$(3) \quad \left| \int_0^\infty \psi(\rho)h(r, \rho)d\rho - \lim_{A\to\infty} \int_0^A \psi(\rho)d\rho \right| \leq \left| \int_0^{A_\varepsilon} \psi(\rho)[h(r, \rho) - 1]d\rho \right| + \left| \int_{A_\varepsilon}^\infty \psi(\rho)h(r, \rho)d\rho \right| + \varepsilon$$

On choisit r_0 tel que, pour tout $r \geq r_0$, le premier terme du second membre de (3) soit inférieur à ε. Le deuxième terme s'écrit à l'aide de la seconde formule de la moyenne :

$$\left| \int_{A_\varepsilon}^\infty \psi(\rho)h(r, \rho)d\rho \right| = \lim_{A\to\infty} \left| \int_{A_\varepsilon}^A \psi(\rho)h(r, \rho)d\rho \right| = \lim_{A\to\infty} h(r, A_\varepsilon) \left| \int_{A_\varepsilon}^{A'(A)} \psi(\rho)d\rho \right| \leq \varepsilon$$

Le premier membre de (3) est ainsi majoré par 3ε pour $r \geq r_0$; ce qui achève la démonstration.

II.2.4. Remarque. — La loi de probabilité P, dans le corollaire II.2.3, est absolument continue par rapport à λ_s, si et seulement si la fonction définie par (1) est d'intégrale égale à 1.

3. Étude de la résultante

Soit $X_1, \ldots, X_n$, n vecteurs aléatoires indépendants de même loi U_s sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$. Dans la suite, on appellera résultante et on notera X le vecteur aléatoire.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

II.3.1. Proposition. — La résultante X est un vecteur aléatoire centré, de matrice de variance-covariance $\Lambda_X = \frac{n}{s} \mathbb{1}_s$ et de fonction caractéristique $[\Omega_s(t)]^n$. Pour $n \geq 2$ (et $s \geq 2$), la loi de probabilité Q_n de X est absolument continue par rapport à λ_s avec pour densité :

$$q_n(x) = g(s, s, n; 0, \| x \|).$$

DÉMONSTRATION. — Il s'agit, pour la première partie, d'une conséquence directe des corollaires II.1.3 et II.1.4. La deuxième partie est une application du corollaire II.2.3 et de la remarque II.2.4.

En effet, on a, pour $n = 2$:

$$q_2(x) = g(s, s, 2\,; 0, \| x \|) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right]^2}{2^{s-2}\pi^{\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \frac{(4 - \| x \|^2)^{\frac{s-3}{2}}}{\| x \|} 1_{]0,2[}(\| x \|)$$

Le changement de variable $V = \left\| \frac{X}{2} \right\|^2$ montre que la variable aléatoire $\left\| \frac{X}{2} \right\|^2$ suit la loi Bêta de paramètres $\frac{s-1}{2}$ et $\frac{s-1}{2}$. Ceci prouve l'absolue continuité de Q_2 donc celle de Q_n comme convolution de Q_2 avec Q_{n-2}.

II.3.2. PROPOSITION. — Soit Y la projection orthogonale de la résultante X sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h. La loi de probabilité ${}_hQ_n$ de Y ne dépend que de h; c'est une loi de probabilité sphérique sur $(\mathbb{R}^h, B_{\mathbb{R}^h})$ absolument continue par rapport à λ_h avec pour densité :

$${}_hq_n(y) = g(s, h, n; 0, \| y \|).$$

Démonstration. — Les fonctions caractéristiques associées à X et Y sont des fonctions radiales qui coïncident en tant que fonctions de $\| t \|$. Le corollaire II.2.3 conduit au résultat, l'absolue continuité étant assurée pour $n \geqslant 2$ par la proposition II.3.1. Pour $n = 1$, la proposition II.3.2 donne les lois marginales de U_s et on a :

$$q_1(y) = g(s, h, 1\,; 0, \| y \|) = \frac{\Gamma(s' + 1)}{\pi^{h'+1}\Gamma(s' - h')}(1 - \| y \|^2)^{s'-h'-1} 1_{]0,1[}(\| y \|)$$

Cette expression montre que $\| Y \|^2$ suit, pour $n = 1$, la loi Bêta de paramètres $\frac{h}{2}$ et $\frac{s-h}{2}$, ce qui prouve l'absolue continuité.

II.3.3. REMARQUE. — Le profil ${}_h\tilde{Q}_n$ (resp. $\tilde{Q}_n$) de Q_n (resp. ${}_hQ_n$) est la loi de probabilité de $R = \| X \|$ (resp. $V = \| Y \|$) dont la densité par rapport à λ_+ est égale à :

$$\tilde{q}_n(r) = \frac{2\pi^{s'+1}}{\Gamma(s' + 1)} r^{s-1} q_n(r) \qquad \left(\text{resp. } {}_h\tilde{q}_n(v) = \frac{2\pi^{h'+1}}{\Gamma(h' + 1)} v^{h-1} {}_hq_n(v)\right)$$

Notons que la démonstration de la proposition II.3.2 établit le résultat suivant :

II.3.4. PROPOSITION. — Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, \mathrm{B}_{\mathbb{R}^s})$ de loi de probabilité sphérique P et Y la projection orthogonale de X sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h. Si P n'affecte aucune masse à l'origine, la variable aléatoire $\| \mathrm{Y} \|^2/\| \mathrm{X} \|^2$ suit une loi Bêta de paramètres $\frac{h}{2}$ et $\frac{s-h}{2}$.

Ce résultat est donné par D. Kelker [5] lorsque P est absolument continue. En fait, on constate que le vecteur aléatoire $\mathrm{X}/\| \mathrm{X} \|$ suit la loi U_s et que le carré de la norme de la projection n'est autre que $\| \mathrm{Y} \|^2/\| \mathrm{X} \|^2$.

III. LOI DE VON MISES S-DIMENSIONNELLE

1. Définition et premières propriétés

III.1.1. DÉFINITION. — On appelle loi de von Mises s-dimensionnelle de paramètre θ la loi de probabilité P_θ sur $(\mathbb{R}^s, \mathrm{B}_{\mathbb{R}^s})$ absolument continue par rapport à la loi uniforme U_s avec pour densité :

$$\frac{d\mathrm{P}_\theta}{d\mathrm{U}_s}(x) = \frac{e^{\langle \theta, x \rangle}}{\mathrm{L}_{\mathrm{U}_s}(-\theta)} \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}^s$$

Lorsque le paramètre θ est différent de zéro, on écrit :

$$\theta = k\mathrm{M} \quad , \quad k = \| \theta \| \quad , \quad \mathrm{M} = \frac{\theta}{k}$$

Le vecteur unitaire M est la direction modale de P_θ et k est le paramètre de concentration. La loi P_θ est notée s-D. M. D. (θ) ou s-D. M. D. (k, M). La restriction à $\mathbb{R}^s$ de la transformée de Laplace $\mathrm{L}_{\mathrm{U}_s}$ (proposition II.1.2) est une fonction radiale qui devient :

$$\mathrm{L}_{\mathrm{U}_s}(-\theta) = \mathrm{L}_{\mathrm{U}_s}(k) = \frac{2^{s'}\Gamma(s'+1)}{k^{s'}} \mathrm{I}_{s'}(k)$$

Le passage en coordonnées sphériques montre qu'il s'agit bien des lois présentées en I.1.

La définition III.1.1 et les propriétés des familles exponentielles [2] (chap. X) sont à l'origine de la plupart des résultats qui vont suivre, en particulier de ceux que nous énoncerons sans démonstration.

III.1.2. PROPOSITION. — Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, \mathrm{B}_{\mathbb{R}^s})$ de loi de probabilité s-D. M. D. (k, M). La fonction caractéristique associée à X est égale à :

$$\forall t \in \mathbb{R}^s \quad , \quad \varphi(t) = \frac{k^{s'} {}_0\mathrm{F}_1 \left\{ s' + 1 \, ; \frac{1}{4}(k^2 + 2ik\langle \mathrm{M}, t \rangle - \| t \|^2) \right\}}{2^{s'}\Gamma(s' + 1)\mathrm{I}_{s'}(k)}$$

X a des moments de tout ordre, en particulier :

$$\mathrm{E(X)} = \frac{\mathrm{I}_{s'+1}(k)}{\mathrm{I}_{s'}(k)} \mathrm{M},$$

$$\Lambda_{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{I}_{s'+2}(k)}{\mathrm{I}_{s'}(k)} \mathrm{M}^t\mathrm{M} + \frac{1}{k}\frac{\mathrm{I}_{s'+1}(k)}{\mathrm{I}_{s'}(k)} \mathbb{1}_s - \mathrm{E(X)}^t\mathrm{E(X)}$$

où Λ_{X} est la matrice de variance-covariance de X.

2. Étude de la résultante

Soit X la résultante associée à un échantillon de taille n issu de la loi s-D. M. D. (k, M). La loi de probabilité P_θ^{*n} de X est absolument continue par rapport à λ_s et sa densité est égale à :

$$f_\theta^{*n}(x) = \frac{e^{\langle \theta, x \rangle}}{[\mathrm{L}_{\mathrm{U}_s}(k)]^n} q_n(x)$$

La loi de probabilité de la norme $\mathrm{R} = \| \mathrm{X} \|$ est absolument continue par rapport à λ_+ de densité :

$$\tilde{f}_k^n(r) = \frac{2^{s'}\Gamma(s' + 1)}{[\mathrm{L}_{\mathrm{U}_s}(k)]^n} \frac{\mathrm{I}_{s'}(kr)}{(kr)^{s'}} \tilde{q}_n(r)$$

III.2.1. PROPOSITION. — Désignons par Y et Z respectivement les vecteurs des h premières composantes de X et des l dernières $(h + l = s)$ et décomposons de la même façon θ en $\theta = (\lambda, \mu)$. Quel que soit $n \geq 1$ et $1 \leq h < s$ la loi de probabilité ${}_h\mathrm{P}^{*n}_{(\lambda,\mu)}$ de Y est absolument continue par rapport à λ_h et admet pour densité :

$${}_hf^{*n}_{(\lambda,\mu)}(y) = \frac{e^{\langle \lambda, y \rangle}}{[\mathrm{L}_{\mathrm{U}_s}(k)]^n} g(s, h, n \, ; \| \mu \|, \| y \|)$$

Démonstration. — La densité de la loi de probabilité du couple (Y, Z) par rapport à Q_n est de la forme :

$$\frac{d\mathrm{P}^{*n}_{(\lambda,\mu)}}{d\mathrm{Q}_n} = \mathrm{C}(\lambda, \mu) e^{\langle \lambda, y \rangle} e^{\langle \mu, z \rangle}$$

où $C(\lambda, \mu)$ est le coefficient normalisateur :

$$C(\lambda, \mu) = [L_{U_s}(k)]^{-n} \quad , \quad k^2 = \| \lambda \|^2 + \| \mu \|^2$$

La loi marginale en Y s'obtient par intégration :

$${}_hf^{*n}_{(\lambda,\mu)}(y) = C(\lambda, \mu)e^{\langle \lambda, y\rangle} \int_{\mathbb{R}^l} e^{\langle \mu, z\rangle} Q_n(y, dz)$$

en particulier pour $\lambda = 0$ où :

$${}_hf^{*n}_{(0,\mu)}(y) = C(0, \mu) \int_{\mathbb{R}^l} e^{\langle \mu, z\rangle} Q_n(y, dz)$$

Or, lorsque $\lambda = 0$, la loi de probabilité de Y est sphérique et sa fonction caractéristique est obtenue à l'aide de la proposition III.1.2. :

$$\forall t \in \mathbb{R}^h, \ \varphi_y(t) = \left\{ \frac{b^{s'}}{I_{s'}(b)} \frac{J_{s'}[(\| t \|^2 - b^2)^{1/2}]}{(\| t \|^2 - b^2)^{s'/2}} \right\}^n, \ b = \| \mu \|$$

La densité correspondante est donnée par le corollaire II.2.3 :

$${}_hf^{*n}_{(0,\mu)}(y) = \left\{ \frac{b^{s'}}{2^{s'}\Gamma(s' + 1)I_{s'}(b)} \right\}^n g(s, h, n \, ; b, \| y \|)$$

Le résultat s'en déduit par identification.

Lorsque $n = 1$, la proposition fournit les lois marginales de la loi de von Mises et la valeur de l'intégrale conduit, en posant $b = \| \mu \|$, au résultat suivant :

$${}_hf_{(\lambda,\mu)}(y) = \frac{e^{\langle \lambda, y\rangle}}{(2\pi)^{h'+1}} \frac{k^{s'}}{I_{s'}(k)} \frac{I_{l'}[b(1 - \| y \|^2)^{1/2}]}{[b(1 - \| y \|^2)^{1/2}]^{l'}} (1 - \| y \|^2)^{l'} \mathbb{1}_{]0,1[}(\| y \|)$$

La loi de probabilité de la norme $V = \| Y \|$ est absolument continue par rapport à λ_+ et la densité correspondante ne dépend que des paramètres $a = \| \lambda \|$ et $b = \| \mu \|$:

$${}_h\tilde{f}^{n}_{(a,b)}(v) = \frac{(2\pi)^{h'+1}}{[L_{U_s}(k)]^n} \frac{I_{h'}(av)}{(av)^{h'}} v^{h-1} g(s, h, n \, ; b, v)$$

Le cas $n = 1$ se simplifie comme ci-dessus.

III.2.2. PROPOSITION. — Avec les notations précédentes et U désignant la variable aléatoire sur $(\mathbb{R}^h, B_{\mathbb{R}^h})$ égale à Y/V, la loi de probabilité conditionnelle $P^v_{U/V}$ de U à V est définie sur $\mathbb{R}^+ \times B_{\mathbb{R}^h}$ par :

$$\forall v \in \mathbb{R}^+, \ \forall B \in B_{\mathbb{R}}{}^h, \ P^v_{U/V}(B) = P_{v\lambda}(B)$$

où $P_{v\lambda}$ est la loi h-D. M. D. $(v\lambda)$.

Ce résultat est immédiat en constatant que la loi du couple (U, V) admet une densité par rapport à $U_h \otimes \lambda_+$ de la forme :

$$\frac{e^{\langle v\lambda, u\rangle}}{L_{U_h}(av)} \, {}_h\tilde{f}^{n}_{(a,b)}(v).$$

La proposition III.2.2 subsiste en particulier pour $h = s$, c'est-à-dire $Y = X$ et $V = R$ et $n \geq 2$. Ceci permet de calculer les lois de probabilité conditionnelles $P^r_{U/R}$ et $P^r_{V/R}$ en utilisant les lois marginales de la loi de von Mises.

III.2.3. PROPOSITION. — La loi de probabilité conditionnelle $P^{(v,z)}_{U/(V,Z)}(B)$ de U à (V, Z) est définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \times B_{\mathbb{R}^h}$ par :

$$\forall v \in \mathbb{R}^+,\ z \in \mathbb{R}^l,\ B \in B_{\mathbb{R}^h},\ P^{(v,z)}_{U/(V,Z)}(B) = P_{v\lambda}(B)$$

où $P_{v\lambda}$ est la loi h-D. M. D. $(v\lambda)$.

Démonstration. — Pour $n \geq 2$, la densité de la loi de (U, V, Z) par rapport à $U_h \otimes \lambda_+ \otimes \lambda_l$ est égale à :

$$\frac{(2\pi)^{h'+1}}{\Gamma(h'+1)} v^{h-1} \frac{e^{\langle v\lambda, u\rangle}}{[L_{U_s}(-\theta)]^n} e^{\langle \mu, z\rangle} q_n[(v^2 + \| z \|^2)^{1/2}]$$

La loi marginale en (V, Z) a donc pour densité par rapport à $\lambda_+ \otimes \lambda_l$:

$$\frac{(2\pi)^{h'+1}}{\Gamma(h'+1)} v^{h-1} \frac{L_{U_h}(-v\lambda)}{[L_{U_s}(-\theta)]^n} e^{\langle \mu, z\rangle} q_n[(v^2 + \| z \|^2)^{1/2}]$$

D'où la densité conditionnelle :

$$\frac{dP^{(v,z)}_{U/(V,Z)}}{dU_h} = \frac{e^{\langle v\lambda, u\rangle}}{L_{U_h}(-v\lambda)}$$

La démonstration ci-dessus n'est pas valable pour $n = 2$ car la loi de (U, V, Z) est singulière par rapport à $U_h \otimes \lambda_+ \otimes \lambda_l$. On peut alors vérifier directement la propriété en utilisant les coordonnées sphériques.

Notons que cette proposition établit l'indépendance de la direction U de Y par rapport à Z conditionnellement à $V = \| Y \|$. Elle est aussi une généralisation à n quelconque des résultats exprimés en d'autres termes par Downs dans le cas $n = 1$ [*3*].

ANNEXE

Justification et valeurs particulières de l'expression :

$$g(s, h, n\ ;\ b, v) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{(2\pi)^{h'+1}} \int_0^\infty \left\{ \frac{J_{s'}[(\rho^2 - b^2)^{1/2}]}{(\rho^2 - b^2)^{s'/2}} \right\}^n \frac{J_{h'}(\rho v)}{(\rho v)^{h'}} \rho^{h-1} d\rho$$

La définition de l'intégrale pose un problème uniquement au voisinage de l'infini. On utilise le développement asymptotique de la fonction de Bessel ([*13*], p. 199).

$$J\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + 0(z^{-3/2})$$

où 0 est une fonction telle que $\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}$ est borné au voisinage de zéro.

On se place sur $[A, +\infty[$ avec A suffisamment grand. Pour $v \neq 0$, l'intégrale se comporte comme :

$$\int_A^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)^{n(s-1)-(h-1)} \left\{ \left[\cos\left(\rho - \frac{s-1}{4}\pi\right)\right]^n \cos\left(v(\rho^2 + b^2)^{1/2} - \frac{h-1}{4}\pi\right) + 0(\rho^{-1}) \right\} d\rho$$

Elle est absolument convergente pour $n(s-1) - (h-1) > 2$. Les paramètres n, s et h sont entiers et vérifient :

$$\begin{array}{lll} 1 \leq h < s & \text{si} & n = 1 \\ 1 \leq h \leq s & \text{si} & n \geq 2 \end{array}$$

L'intégrale est absolument convergente pour $n \geq 4$; pour $n \leqslant 3$ et

$$n(s-1) - (h-1) \leqslant 2$$

elle est semi-convergente sauf en $v = 1$ lorsque $n = 3$ et $s = h = 2$.

Pour $v = 0$, on montre que l'intégrale est absolument convergente si

$$n(s-1) - 2(h-1) > 2$$

(en particulier $n \geqslant 5$). Dans les autres cas, on a une semi-convergence pour les situations suivantes :

$$\begin{array}{lll} n = 1 & \text{et} & h < s/2\ ; \\ n = 3 & \text{et} & h < \frac{3}{2}s - 1 \end{array}$$

Notons enfin les valeurs particulières suivantes :

i) $$g(s, s, 2\ ;\ 0, v) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right]^2}{2^{s-2}\pi^{\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \frac{(4 - v^2)^{\frac{s-3}{2}}}{v} \mathbb{1}_{]0,2[}(v)$$ ([*13*], p. 411)

ii) $$g(s, h, 1 : 0, v) = \frac{\Gamma(s'+1)}{\pi^{h'+1}\Gamma(s'-h')}(1 - v^2)^{s'-h'-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(v)$$ ([*13*], p. 411)

iii) $$g(s, h, 1\ ;\ b, v) = \frac{2^{s'}\Gamma(s'+1)}{(2\pi)^{h'+1}} \frac{I_{l'}(b\sqrt{1-v^2})}{(b\sqrt{1-v^2})^{l'}}(1 - v^2)^{l'}\mathbb{1}_{]0,1[}(v)$$ ([*13*], p. 415)

où $l = s - h$.

REFERENCES

[1] K. J. ARNOLD, *On spherical probability distributions, Dissertation*, Massachusetts Institute of Technology, 1941.

[2] J. R. BARRA, *Notions fondamentales de statistique mathématique*, Dunod, éditeur, Paris, 1971.

[3] T. D. DOWNS, Some relationships among the von Mises distribution of different dimensions, *Biometrika*, t. **54**, 1966, p. 262-272.

[4] R. A. FISHER, Dispersion on a sphere, *Proc. Roy. Soc. London*, A **217**, 1953, p. 295-305.

[5] D. KELKER, Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. Sankhyä, *The Indian Journal of Statistics*, A, 1969, p. 419-430.

[6] J. C. KLUYVER, A local probability theorem, *Ned. Akad. Wet. Proc.*, A **8**, 1906, p. 341-350.

[7] R. D. LORD, The use of the Hankel transform in statistics. I. General theory and examples, *Biometrika*, t. **41**, 1954, p. 44-55.

[8] LORD RAYLEIGH, On the problem of random vibrations, and of random flights in one, two or three dimensions, *Phil. Mag.*, (6), t. **37**, 1919, p. 321-347.

[9] K. PEARSON, A mathematical theory of random migration, Draper's company research memoirs, *Biometric Series*, t. III, 1906, p. 15.

[10] M. A. STEPHENS, The statistics of directions: the von Mises and Fisher distributions, *Ph. D. Thesis*, University of Toronto, 1962.

[11] H. R. VAN DER VAART, Determining the absolutely continuous component of a probability distribution from its Fourier-Stieltjes transform, *Arkiv för Mathematik*, Band 7, Nr. 24, 1967, p. 331-342.

[12] R. VON MISES, Ueber die «Ganzzahligkeit» der Atomgewicht und verwandte Fragen, *Physikal. Z.*, t. **19**, 1918, p. 490-500.

[13] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press (2nd ed.), 1944.

(Manuscrit reçu le 3 octobre 1978).