

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. PETIT

Théorie ergodique : classification de certaines transformations réelles

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, n° 1 (1979), p. 25-32

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_1_25_0

© Gauthier-Villars, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Théorie ergodique : classification de certaines transformations réelles

par

B. PETIT

Mathématiques, Université de Brest, 29200 Brest

SUMMARY. — Aaronson and Kemperman have shown that the transformation $Tx = \alpha x + \beta + \sum_1^n \gamma_n | (t_n - x)$ is strongly mixing and extends to a K system for suitable values of the parameters. We show here that these transformations extend to Bernoulli shifts with entropy $\int \log T'(x) dm(x)$ where T' is the derivative of T and m is the Cauchy invariant measure.

1. INTRODUCTION

Nous considérons les transformations *non-injectives* de $\overline{\mathbb{R}}$ sur lui-même définies par :

$$(1) \quad Tx = \alpha + \beta + \sum_1^N \frac{\gamma_n}{t_n - x}$$

où

a) $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$,

b) $N \geq 1$ (si $\alpha = 0$, on a alors $N \geq 2$); $t_1 < t_2 \dots < t_N$ et pour $1 \leq n \leq N$, $\gamma_n > 0$.

Nous supposons en outre que T admet un point fixe $a + ib$ avec $b > 0$

(un tel point fixe est nécessairement unique). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi (voir [3]) est que :

c) Pour tout x réel tel que $T(x) = x$, on ait $T'(x) > 1$.

Ces conditions étant supposées réalisées, nous savons qu'il existe une seule mesure de probabilité sur $\overline{\mathbb{R}}$ invariante par T : c'est la distribution de Cauchy

$$dm = \frac{b}{\pi} \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} \text{ (cf. [4]).}$$

Nous considérons alors le système dynamique $\mathcal{S} = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, m, T)$. Depuis les travaux de Aaronson et Kemperman [1], [3], nous savons que \mathcal{S} est ergodique, fortement mélangeant, et que son extension naturelle est un K-système. Nous nous proposons d'établir ici que l'extension naturelle de \mathcal{S} est isomorphe à un schéma de Bernoulli ayant pour entropie

$$h = \int \log T'(x) dm(x),$$

où T' est la dérivée de T .

Pour ce faire, nous étudierons uniquement le cas $\alpha > 0$, établirons que \mathcal{S} est isomorphe à un shift et utiliserons les résultats de [5].

Pour le cas $\alpha = 0$, il est facile de se ramener au cas précédent de la façon suivante : soient x_0 un point fixe réel de T (il en existe !) et ϕ la transformation de $\overline{\mathbb{R}}$ sur lui-même :

$$\phi(x) = x_0 - \frac{1}{x}.$$

Posons alors $S(x) = \phi^{-1} \circ T \circ \phi(x)$.

En remarquant que S est une fraction rationnelle dont les pôles (simples) sont les N solutions finies $\{t'_1, \dots, t'_N\}$ de $T \circ \phi(x) = x_0$, il est facile par un simple calcul de voir que :

$$S(x) = \frac{x}{T'(x_0)} + \beta' + \sum_1^N \frac{\gamma'_n}{t'_n - x}$$

où tous les γ'_n sont strictement > 0 .

ϕ constitue alors un isomorphisme entre $\mathcal{S} = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, m, T)$ et $\mathcal{S}' = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, \phi^{-1}, m, S)$. Donc, dans ce qui vient, α est supposé strictement positif.

Dans toute la suite, nous désignerons par \mathcal{P} la partition de $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\begin{aligned} A_0 &= [\infty, t_1[\\ A_n &= [t_n, t_{n+1}[\quad \text{si} \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ A_N &= [t_N, \infty[\end{aligned}$$

m étant T -invariante et équivalente à la mesure de Lebesgue, la partition \mathcal{P} est un générateur (voir [4]); nous retrouverons ce résultat naturellement en cours de démonstration.

2. RELÈVEMENT LOCAL DE m PAR T^{-1}

Sur chaque ensemble A_n $0 \leq n \leq N$, T est une bijection de A_n sur $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $T_n = T|_{A_n} : A_n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Suivant en cela [2], nous appellerons relèvement local de m par T^{-1} la mesure Qm définie par :

Pour toute fonction continue bornée sur \mathbb{R} ,

$$Qm(f) = \frac{b}{\pi} \sum_{n=0}^N \int_{\overline{\mathbb{R}}} f(T_n^{-1}x) \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2}$$

Si, dans chacune de ces intégrales, nous posons $x = T_n u$ ($u \in A_n$), nous obtenons :

$$Qm(f) = \frac{b}{\pi} \sum_{n=0}^N \int_{A_n} f(u) \cdot \frac{T'(u)}{(Tu-a)^2 + b^2} du$$

Nous en déduisons que $Qm \ll m$ et :

$$\frac{dQm}{dm} = \frac{T'(u) \cdot ((u-a)^2 + b^2)}{(Tu-a)^2 + b^2}$$

Nous constatons que $\frac{dQm}{dm}$ est toujours > 0 sur $\overline{\mathbb{R}}$; nous poserons donc :

$$g(u) = \frac{(Tu-a)^2 + b^2}{T'(u) \cdot ((u-a)^2 + b^2)}$$

En posant $g(\infty) = \alpha$, il est manifeste que :

- 1) g est continue sur $\overline{\mathbb{R}}$
- 2) g est > 0 sur $\overline{\mathbb{R}}$.

LEMME 1. — $\|g\|_\infty < 1$.

Démonstration. — En vertu des remarques précédentes, il suffit de voir que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \sum_{Ty=x} g(y) = 1$$

Soit f une fonction continue bornée sur \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} m(f) &= \int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)g(x)dQm(x) = \frac{b}{\pi} \int_{\overline{\mathbb{R}}} \sum_{n=0}^N f(T_n^{-1}x)g(T_n^{-1}x) \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} \\ &= \int_{\overline{\mathbb{R}}} \sum_{Ty=x} [g(y)f(y)] dm(x) \end{aligned}$$

m étant T-invariante, $m(Tf) = m(f)$, donc :

$$m(f) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} \left[\sum_{Ty=x} g(y)f(y) \right] dm(x) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} \left[\sum_{Ty=x} g(y) \right] f(x) dm(x) = m(Tf).$$

On a donc :

$$m\text{-presque partout : } \sum_{Ty=x} g(y) = 1.$$

m étant équivalente à la mesure de Lebesgue et g étant continue sur $\overline{\mathbb{R}}$, cette égalité a lieu partout. On a donc bien la conclusion annoncée.

Définissons maintenant sur $L^1(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, m)$ l'opérateur ϕ par :

Pour toute $f \in L^1(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, m)$:

$$\phi f(x) = \sum_{Ty=x} g(y)f(y)$$

Par définition de g , il est bien évident que :

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} \phi f dm = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f dm$$

Nous retrouvons à l'aide de ϕ le résultat :

LEMME 2. — La partition \mathcal{P} est un générateur pour \mathcal{B} .

Démonstration. — Soit $\mathcal{P}_n = \bigvee_0^{n-1} T^{-k}\mathcal{P}$. Tout élément B de \mathcal{P}_n est un intervalle $[a_n, b_n[$. Il suffit alors de voir que :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\sup_{B \in \mathcal{P}_n} m(B) < \varepsilon$.

Si $B \in \mathcal{P}_n$, $B = \bigcap_0^{n-1} T^{-k} A_{i_k}$ $0 \leq i_k \leq N$.

T^n est injective sur B et $T^n B = \bar{\mathbb{R}}$.

On a alors :

$$m(B) = \int_{\bar{\mathbb{R}}} 1_B(x) dm(x) = \int_{\bar{\mathbb{R}}} \phi^n 1_B(x) dm(x)$$

Mais

$$\phi^n 1_B(x) = \sum_{T^n y = x} \left(\prod_{j=1}^n g(T^{n-j} y) \right) 1_B(y).$$

Un seul terme de cette somme est non nul puisque T^n est injective sur B , donc :

$$\| \phi^n 1_B \|_\infty \leq \| g \|^n.$$

D'où le résultat en vertu du lemme 1.

3. ISOMORPHISME AVEC UN SHIFT

Soit $\Omega = \{ 0, \dots, N \}^{\mathbb{N}}$ muni de la distance et de la tribu habituelles.

Soit $\varphi : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \Omega$

$$x \rightarrow \{ \omega_n(x) \}_{n \geq 0} \quad \text{où} \quad \omega_n(x) = j \Leftrightarrow T^n x \in A_j.$$

Les remarques suivantes sont immédiates :

- 1) Si S désigne le shift sur Ω , on a : $\varphi \circ T = S \circ \varphi$.
- 2) En vertu du lemme 2, φ est injective.
- 3) Les seuls points de Ω non atteints par φ sont les points $\{ \omega_n \}_{n \geq 0}$

pour lesquels : $\bigcap_0^\infty T^{-n} A_{\omega_n} = \phi$; compte tenu de la forme des éléments

de \mathcal{P}_n , il faut et il suffit pour cela que, si $[a_n, b_n[= \bigcap_0^{n-1} T^{-j} A_{\omega_j}$, la suite $\{ b_n \}$

soit constante à partir d'un certain rang, ce qui revient à dire que $\omega_n = N$ à partir d'un certain rang; φ est donc surjective à un ensemble dénombrable près.

Comme $\varphi^{-1}([\omega_0\omega_1 \dots \omega_n]) = \bigcap_0^n A_{\omega_i}$, φ constitue un isomorphisme de \mathcal{S} sur $\mathcal{S}' = (\Omega, \mathcal{B}, S, \varphi m)$.

Si $Q\varphi m$ est le relèvement local de φm par S^{-1} , on a : $Q\varphi m = \varphi Qm$. Au sens de [2], φm est une g -mesure, c'est-à-dire $\frac{d\varphi m}{dQ\varphi m} = g_0$, et en vertu de ce qui précède : $g_0 \circ \varphi = g$.

Nous nous proposons maintenant, pour utiliser les résultats de [5], de montrer que g_0 est lipschitzienne sur Ω . Puisque φm ne charge pas les points et que $\Omega \setminus \varphi(\overline{\mathbb{R}})$ est dénombrable, il suffit de le montrer sur $\varphi(\overline{\mathbb{R}})$.

Choisissons $\lambda > 0$ tel que $\|g\|_\infty < \frac{1}{2^\lambda}$.

Soient $\omega, \omega' \in \varphi(\overline{\mathbb{R}})$ tels que $\delta(\omega, \omega') = \frac{1}{2^n}$

$$\text{i. e. } \omega_k = \omega'_k \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Il nous suffit de montrer que :

$$(L) \quad |g_0(\omega) - g_0(\omega')| \leq K \cdot \frac{1}{2^{n\lambda}}$$

où K est une constante indépendante de ω, ω' et n .

Ceci revient à montrer que :

$$|g(\varphi^{-1}\omega) - g(\varphi^{-1}\omega')| \leq K \cdot \frac{1}{2^{n\lambda}}$$

Posons $x = \varphi^{-1}(\omega)$ et $x' = \varphi^{-1}(\omega')$ $x, x' \in \bigcap_0^{n-1} T^{-j}A\omega_j$.

LEMME 3. — La fonction $x \rightarrow g'(x)((x-a)^2 + b^2)$ est bornée sur $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. — g étant une fraction rationnelle toujours définie est de classe C^1 sur \mathbb{R} . Il nous suffit donc de montrer que $g'(x)((x-a)^2 + b^2)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow \infty$.

$$g'(x)((x-a)^2 + b^2) = 2(Tx-a) - 2(x-a) \frac{(Tx-a)^2 + b^2}{T'x((x-a)^2 + b^2)} - \frac{((Tx-a)^2 + b^2)}{(T'x)^2} T''x$$

$$\text{Mais } T'x = \alpha + \sum_1^N \frac{\gamma_n}{(t_n - x)^2}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} T'x = \alpha$

$$T''x = 2 \sum_1^N \frac{\gamma_n}{(t_n - x)^3}$$

Donc quand $x \rightarrow \infty$, $T''x$ est un infiniment petit en $\frac{1}{x}$, d'ordre 3.

Par suite $\lim_{x \rightarrow \infty} ((Tx - a)^2 + b^2)T''x = 0$.

D'autre part, $\frac{(x - a)((Tx - a)^2 + b^2)}{T'x((x - a)^2 + b^2)} \sim \frac{\alpha^2 x^3}{\alpha x^2} \sim \alpha x$ quand $x \rightarrow \infty$.

Comme $Tx \sim \alpha x$ quand $x \rightarrow \infty$, $g'(x)((x - a)^2 + b^2)$ admet bien une limite finie quand $x \rightarrow \infty$.

Ceci nous permet d'établir la propriété (L) :

On peut toujours supposer $x \leq x'$.

$$|g(x) - g(x')| = \left| \int_x^{x'} g'(u) du \right| \leq \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} \frac{\pi}{b} |g'(x)((x - a)^2 + b^2)| \cdot \frac{b}{\pi} \int_x^{x'} \frac{dt}{(t - a)^2 + b^2}$$

Donc :

$$|g(x) - g(x')| \leq K \cdot m([x, x']) \leq K \cdot m\left(\bigcap_0^{n-1} T^{-j} A \omega_j\right)$$

ce qui donne, grâce au lemme 2 :

$$|g(x) - g(x')| \leq K \cdot \|g\|_\infty^n \leq K \cdot \frac{1}{2^{n\lambda}} = K \cdot \delta(\omega, \omega')^\lambda.$$

4. CONCLUSION

En utilisant les résultats de [5] et l'isomorphisme φ , on en déduit :

1° \mathcal{S} est fortement mélangeant, donc ergodique, ce que nous savions déjà, et son extension naturelle est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

2° L'entropie de \mathcal{S} est donnée par :

$$h = - \int_{\mathbb{R}} \log g(x) dm(x)$$

c'est-à-dire encore :

$$h = \int_{\mathbb{R}} \log T'(x) dm(x) + \int_{\mathbb{R}} \log ((x - a)^2 + b^2) dm(x) - \int_{\mathbb{R}} \log ((Tx - a)^2 + b^2) dm(x)$$

Du fait que m est T -invariante, les deux dernières intégrales sont égales, de sorte que :

$$h = \int_{\mathbb{R}^+} \log T'(x) dm(x).$$

Dans le cas particulier où $Tx = \alpha x - \frac{\beta}{x}$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$.

On a :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 1$$

et un simple calcul montre que :

$$h = \log (1 + 2\sqrt{\alpha\beta}).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AARONSON, *Ergodic theory for inner functions of the upper half-plane* (à paraître aux *Annales de l'I. H. P.*).
- [2] M. KEANE, Strongly mixing g -measures, *Invent. Math.*, t. 16, 1972, p. 309-324.
- [3] J. H. B. KEMPERMAN, *The ergodic behaviour of a class of real transformations. Stochastic processes and related topics. Proceedings of Summer research Institute on statistical inference for stochastic processes* (Editor Puri), Ind. Univ. Bloomington (Ind.), 1974, p. 249-258, Academic Press, N. Y., 1975.
- [4] G. LETAC, *Which functions preserve Cauchy laws?* (à paraître in *P. A. M. S.*).
- [5] B. PETIT, Schémas de Bernoulli et g -mesures, *C. R. Acad. Sc. Paris, série A*, t. 280, 1975, p. 17-20.

(Manuscrit reçu le 30 juin 1978).